

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Nauczycielska

Bartłomiej Czerkas

Zastosowanie zasady Cavalieriego

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
Profesora Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2013

Oświadczam, że pracę magisterską wykonałem samodzielnie i zgłaszam ją do oceny.

Data:..... Podpis autora pracy:.....

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data: Podpis opiekuna pracy:.....

1. Wstęp.

Poniższa praca ma na celu przybliżenie tematu zasady Cavalieriego, umożliwiającej wyznaczanie objętości brył bądź pól powierzchni. W swej oryginalnej, okrojonej treści z XVII wieku brzmi ona następująco:

„Objętości (lub pola) dwu figur są równe, jeśli równe są pola (lub linie) wszystkich odpowiadających sobie ich przekrojów, poprowadzonych równoległe do pewnej danej płaszczyzny (lub prostej).”

Celem głównym jest sformalizowanie owej zasady, zarówno w ujęciu wyznaczania objętości brył jak i pól powierzchni obrotowych oraz próba uogólnienia jej, gdy bryłę bądź powierzchnie możemy przedstawiać w postaci kombinacji liniowej innych (łatwiejszych do analizowania) brył bądź powierzchni.

Nie ukrywam, że przy wyborze tematu pracy magisterskiej w dużym stopniu kierowałem się moją specjalnością – omawiane przeze mnie przykłady są na tyle podstawowe, że mogą stanowić interesujące uzupełnienie edukacji w szkołach ponadgimnazjalnych (np. na różnego rodzaju kółkach pozalekcyjnych), a wzór na objętość kuli omawiany kilka stron dalej sam chętnie będę przytaczał na pierwszych lekcjach z brył obrotowych – nawet w gimnazjum. Wreszcie, poniższa praca będzie – mam nadzieję – pomocą i rodzajem skryptu dla przyszłych studentów mających styczność z Geometrią Elementarną.

2. Zasada Cavalieriego dotycząca objętości brył.

W rozdziale tym przytaczam zasadę Cavalieriego dla objętości brył, formalizuję ją, a następnie staram się ją uogólnić.

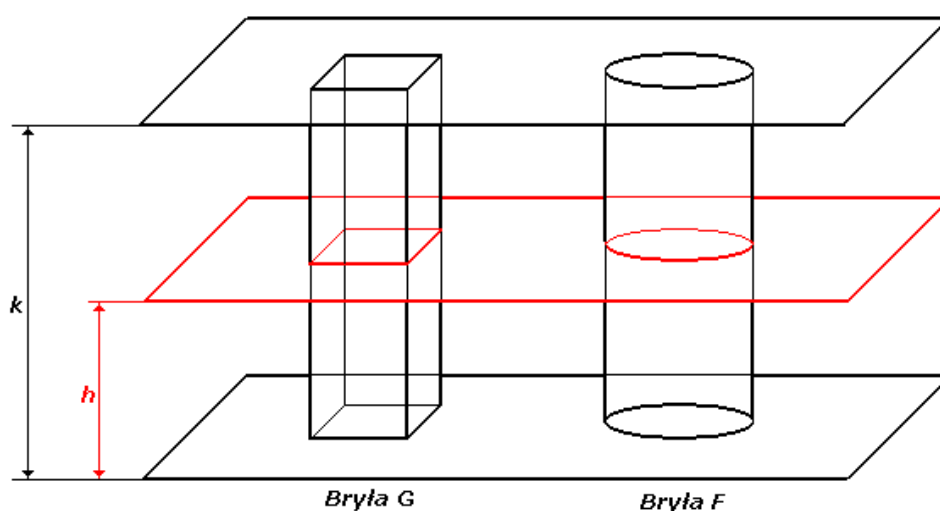
2.1. Zasada Cavalieriego: Niech dane będą dwie bryły, obie leżące pomiędzy dwiema równoległymi płaszczyznami. Jeśli przekroje tych brył dowolną płaszczyzną równoległą do danych, mają równe pola powierzchni, to bryły te mają równe objętości.

Dla uproszczenia przyjmuję, że bryła jest częścią przestrzeni ograniczoną powierzchniami kawałkami gładkimi.

Założmy, że omawiane bryły G i F leżą pomiędzy dwiema równoległymi płaszczyznami oddalonymi o k . Jeśli dla dowolnego h ($0 \leq h \leq k$) przetniemy dane bryły płaszczyzną równoległą do danych, odległą od jednej z nich o h otrzymując przekroje o równych polach, to bryły G i F mają równe objętości.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $P_G(h)$ – pole figury będącej przekrojem bryły G płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ($0 \leq h \leq k$);
- $P_F(h)$ – pole figury będącej przekrojem bryły F płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ($0 \leq h \leq k$).



Rys.2.1.1. Ilustracja zasady Cavalieriego.

Jeśli dla dowolnego h ($0 \leq h \leq k$) $P_G(h) = P_F(h)$, to $V_G = V_H$.

Zasadę Cavalieriego 2.1 możemy rozszerzyć do dowolnej liczby brył.

Pole figury będącej przekrojem bryły G płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ($0 \leq h \leq k$) możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej n pól figur będących przekrojami brył G_1, G_2, \dots, G_n na tejże wysokości:

$$P_G(h) = a_1 \cdot P_{G_1}(h) + a_2 \cdot P_{G_2}(h) + \dots + a_n \cdot P_{G_n}(h),$$

gdzie $P_{G_i}(h) \geq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$).

Wobec tego prawdą jest, że:

$$V_G = a_1 \cdot V_{G_1} + a_2 \cdot V_{G_2} + \dots + a_n \cdot V_{G_n}.$$

Powyższy zapis skłania nas do następującego uogólnienia:

2.2. Uogólniona zasada Cavalieriego: Niech dane będzie $n+1$ brył G oraz G_1, G_2, \dots, G_n , leżących pomiędzy dwiema równoległymi płaszczyznami oddalonymi o k .

Jeśli przekrój bryły G dowolną płaszczyzną równoległą do danych, odległą od jednej z nich o h (gdzie $0 \leq h \leq k$) ma pole równe kombinacji liniowej o rzeczywistych współczynnikach pól będących przekrojami brył G_1, G_2, \dots, G_n tą samą płaszczyzną, to objętość bryły G jest kombinacją liniową objętości brył G_1, G_2, \dots, G_n o tych samych rzeczywistych współczynnikach.

3. Objętości wybranych brył.

W poniższym rozdziale stosując zasadę Cavalieriego dotyczącą objętości brył udowadniam, że objętości skomplikowanych figur przestrzennych mogą być wyznaczone w oparciu o bryły, których objętości potrafimy bez problemu wyznaczyć. Uwagą do każdego podrozdziału jest jawny wzór na objętość omawianej w nim figury przestrzennej.

3.1. Kula.

W tym podrozdziale celem będzie udowodnienie objętość oparciu o zasadę Cavalieriego, że objętość kuli można wyrazić za pomocą różnicy objętości innych brył obrotowych: walca i podwojonego stożka.

Poniższy przykład jest jednym z najpopularniejszych i najbardziej elementarnych przykładów zastosowania owej zasady (czytelników odsyłam do pozycji drugiej w bibliografii).

3.1.1. Twierdzenie: Objętość kuli o promieniu R jest równa różnicy objętości walca o wysokości $2R$ i promieniu podstawy R oraz podwojonego stożka o wysokości R i promieniu podstawy R .

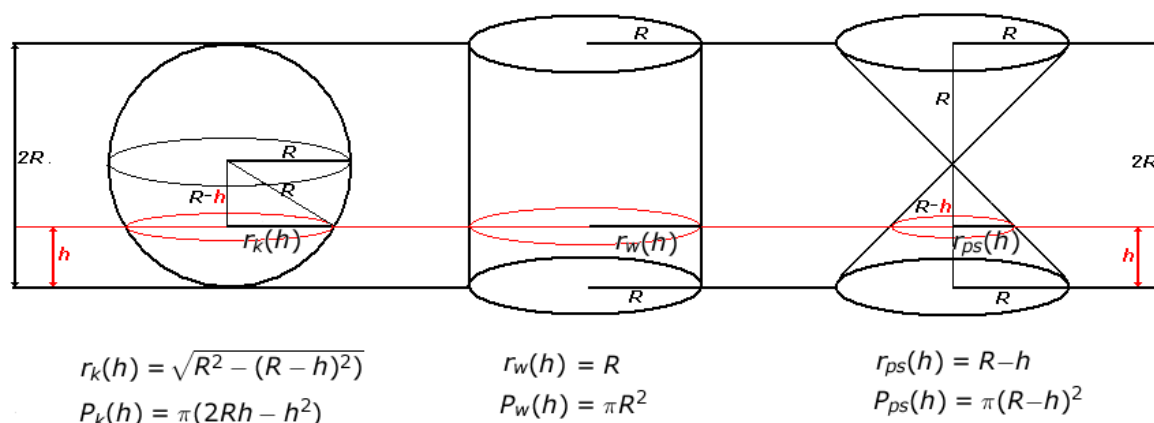
Dowód:

Aby znaleźć objętość kuli sprawdzam, jaka jest zależność pomiędzy wysokością płaszczyzny przekroju a polem przekroju ową płaszczyzną dla kuli, walca i podwojonego stożka (Rys.3.1.2).

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq 2R$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_k(h)$ – promień koła będącego przekrojem kuli płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $r_w(h)$ – promień koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $r_{ps}(h)$ – promień koła będącego przekrojem podwojonego stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_k(h)$ – pole koła będącego przekrojem kuli płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_w(h)$ – pole koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_{ps}(h)$ – pole koła będącego przekrojem podwojonego stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h .

Zauważmy, że $r_k(h)$ wyznaczone jest z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa, a $r_{ps}(h)$ z wykorzystaniem twierdzenia Talesa. Wyliczenie wyżej wymienionych promieni oraz pól przedstawione jest na Rys.3.1.2 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



Rys.3.1.2. Zależność pomiędzy wysokością płaszczyzny przekroju a polem przekroju kuli, walca i podwojonego stożka.

Następnie porównujemy różnicę pól przekrojów (poprowadzonych na wysokości h) walca i podwojonego stożka z polem przekroju kuli poprowadzonym na wysokości h .

$$\begin{aligned}
 P_w(h) - P_{ps}(h) &= \pi R^2 - \pi(R-h)^2 = \\
 &= \pi R^2 - \pi R^2 + \pi 2Rh - \pi h^2 = \pi(2Rh - h^2) = P_k(h).
 \end{aligned}$$

Zatem, zgodnie z Uogólnioną Zasadą Cavalieriego (Zasada 2.2) objętość kuli jest różnicą objętości walca i podwojonego stożka.

$$V_k = V_w - V_{ps}.$$

□

3.1.3. Uwaga:

Twierdzenie 3.1.1 pozwala na wyznaczenie wzoru na objętość kuli w oparciu o znajomość wzorów na objętość stożka i walca.

$$V_k = V_w - V_{ps} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3.2. Paraboloïda obrotowa.

Kolejnym zastosowaniem zasady Cavalieriego będzie analiza bryły ograniczonej wykresem paraboloidy obrotowej: $z=x^2+y^2$ oraz płaszczyzną $z=H$, gdzie $H>0$.

Należy zwrócić uwagę, że pole przekroju paraboloidy płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h , równoległą do $z=H$ w sposób liniowy zależy od wyboru owej wysokości.

W celu wyznaczenia objętości opisywanej bryły rozpatrujemy inną bryłę, w której także zależność pomiędzy wysokością przekroju a jego polem jest liniowa. Jest to graniastosłup trójkątny (ustawiony tak jak na Rys.3.2.2).

Naszym celem w tym podrozdziale będzie udowodnienie, że objętość fragmentu paraboloidy obrotowej jest równa objętości graniastosłupa trójkątnego.

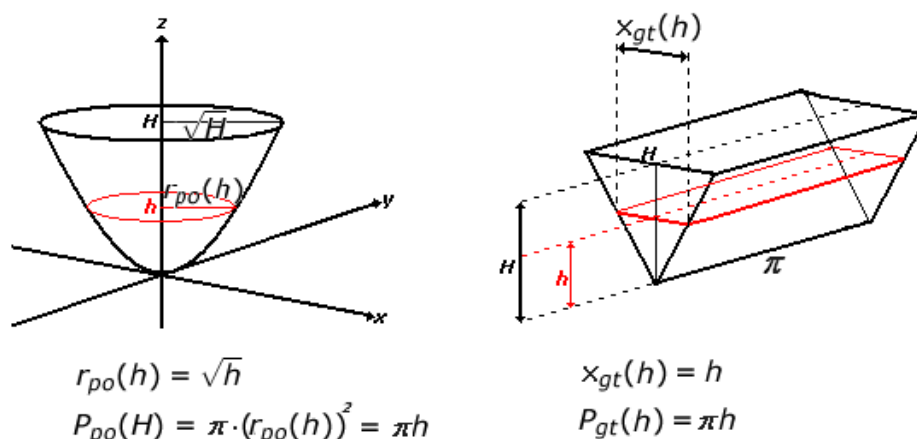
3.2.1. Twierdzenie: Objętość fragmentu paraboloidy obrotowej ograniczonej płaszczyzną $z=H$ jest równa objętości graniastosłupa trójkątnego, którego podstawą jest trójkąt o podstawie H i wysokości H . Natomiast wysokość graniastosłupa trójkątnego to H .

Dowód:

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq H$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_{po}(h)$ – promień koła będącego przekrojem paraboloidy obrotowej płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h , równoległą do $z=H$;
- $P_{po}(h)$ – pole koła będącego przekrojem paraboloidy obrotowej płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h , równoległą do $z=H$;
- $x_{gt}(h)$ – bok prostokąta będącego przekrojem graniastosłupa trójkątnego płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h , równoległą do $z=H$;
- $P_{gt}(h)$ – pole prostokąta będącego przekrojem graniastosłupa trójkątnego płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h , równoległą do $z=H$.

Zauważmy, że jeden z boków prostokąta będąc przekrojem graniastosłupa trójkątnego jest stały, równy π . Natomiast drugi, równy $x_{gt}(h)$, został wyznaczony z wykorzystaniem twierdzenia Talesa. Wyliczenie wyżej wymienionych wielkości przedstawione jest na Rys.3.2.2 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



Rys.3.2.2. Zależność pomiędzy wysokością przekroju a polem przekroju paraboloidy obrotowej i graniastosłupa trójkątnego.

Następnie porównujemy pola przekrojów opisywanych brył płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h i zauważamy, że:

$$P_{po}(h) = P_{gt}(h) .$$

Zatem, zgodnie z zasadą Cavalieriego (Zasada 2.1) objętości brył są równe:

$$V_{po} = V_{gt} .$$

□

3.2.3. Uwaga:

Twierdzenie 3.2.1 pozwala na wyznaczenie wzoru na objętość fragmentu paraboloidy w oparciu o znajomość wzoru na objętość graniastosłupa trójkątnego:

$$V_{po} = V_{gt} = \frac{H \cdot H}{2} \cdot \pi = \frac{\pi H^2}{2} .$$

3.3. Hiperboloida jednowłokowa.

Następnie rozważmy bryłę ograniczoną wykresem hiperboloidy jednowłokowej: $z^2 + a = x^2 + y^2$ oraz płaszczyznami: $z=0$ i $z=c$, gdzie $a, c \geq 0$.

Pole przekroju owej bryły płaszczyzną $z=h$, równoległą do płaszczyzn $z=0$ i $z=c$, gdzie $0 \leq h \leq c$ okaże się sumą pól przekrojów stożka oraz walca.

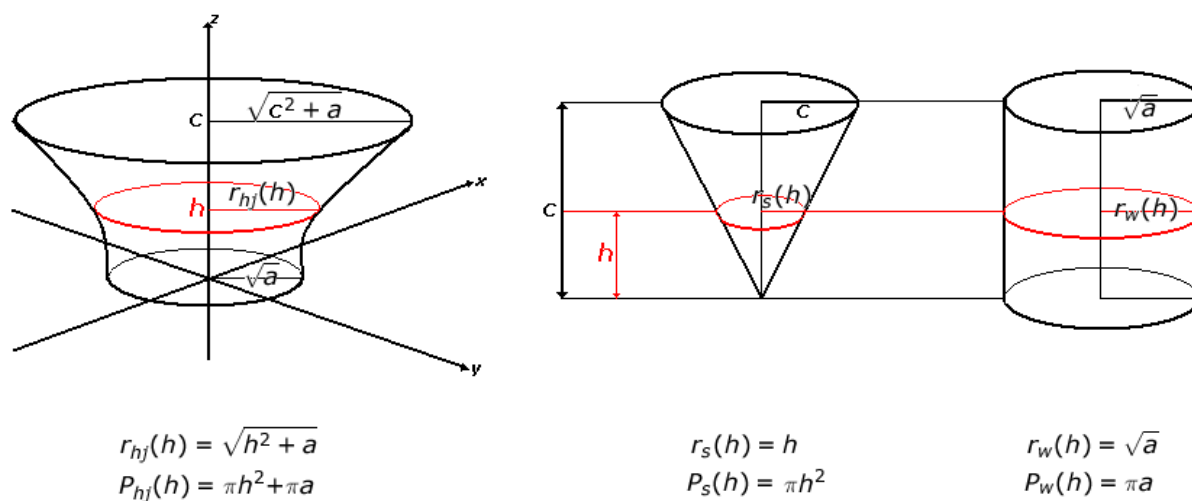
3.3.1. Twierdzenie: Objętość fragmentu hiperboloidy jednowłokowej ograniczonej płaszczyznami $z=0$ i $z=c$ jest równa sumie objętości stożka o promieniu c i wysokości c oraz walca o promieniu \sqrt{a} i wysokości c .

Dowód:

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq c$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_{hj}(h)$ – promień koła będącego przekrojem hiperboloidy jednowłokowej płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $r_s(h)$ – promień koła będącego przekrojem stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $r_w(h)$ – promień koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_{hj}(h)$ – pole koła będącego przekrojem hiperboloidy jednowłokowej płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_s(h)$ – pole koła będącego przekrojem stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_w(h)$ – pole koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h .

Zauważmy, że $r_s(h)$ wyznaczamy z wykorzystaniem twierdzenia Talesa. Wyliczenie wyżej wymienionych wielkości przedstawione jest na Rys.3.3.2 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



Rys.3.3.2. Zależność pomiędzy wysokością przekroju a polem przekroju hiperboloidy jednowłokowej, stożka i walca.

Następnie porównujemy sumę pól przekrojów stożka i walca z polem przekroju fragmentu hiperboloidy jednopowłokowej (poprowadzonych na wysokości h):

$$P_s(h) + P_w(h) = \pi h^2 + \pi a = P_{hj}(h).$$

Zatem, zgodnie z Uogólnioną Zasadą Cavalieriego (Zasada 2.2) objętość fragmentu hiperboloidy jednopowłokowej jest równa sumie objętości stożka i walca:

$$V_{hj} = V_s + V_w .$$

□

3.3.3. Uwaga:

Twierdzenie 3.3.1 pozwala na wyznaczenie wzoru na objętość fragmentu hiperboloidy jednopowłokowej w oparciu o znajomość wzorów na objętość stożka i walca:

$$V_{hj} = V_s + V_w = \frac{1}{3}\pi c^2 \cdot c + \pi a \cdot c = \pi\left(\frac{c^3}{3} + ac\right).$$

3.4. Hiperboloida dwupowłokowa.

Kolejnym przykładem wykorzystania zasady Cavalieriego jest bryła ograniczona wykresem hiperboloidy dwupowłokowej: $z^2 - a = x^2 + y^2$ ($a > 0$) oraz płaszczyznami: $z = c$ ($c > 0$), $z = \sqrt{a}$ (to naturalne, gdyż wierzchołek hiperboloidy dwupowłokowej jest w punkcie $(0, 0, \sqrt{a})$).

Tym razem pole przekroju płaszczyzną $z = h$, równoległą do płaszczyzn $z = \sqrt{a}$ i $z = c$, gdzie $\sqrt{a} \leq h \leq c$ okaże się różnicą pól przekrojów ściętego stożka oraz walca.

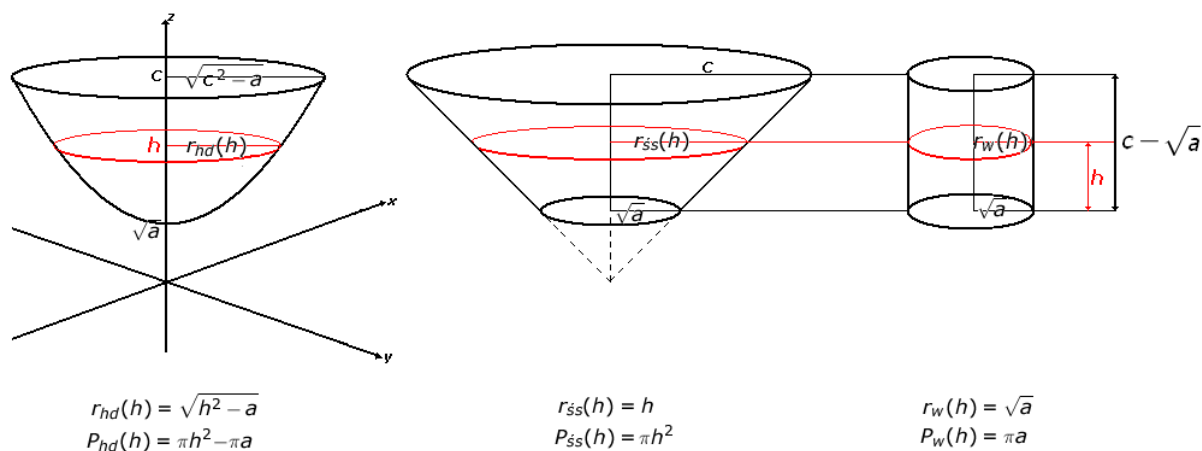
3.4.1. Twierdzenie: Objętość fragmentu hiperboloidy dwupowłokowej ograniczonej płaszczyznami $z = 0$ i $z = c$ jest równa sumie objętości ściętego stożka o promieniu c i wysokości c oraz walca o promieniu podstawy \sqrt{a} i wysokości $c - \sqrt{a}$.

Dowód:

Po ustaleniu dowolnego h ($\sqrt{a} \leq h \leq c - \sqrt{a}$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_{hd}(h)$ – promień koła będącego przekrojem hiperboloidy dwupowłokowej płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $r_{ss}(h)$ – promień koła będącego przekrojem ściętego stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $r_w(h)$ – promień koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_{hd}(h)$ – pole koła będącego przekrojem hiperboloidy dwupowłokowej płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_{ss}(h)$ – pole koła będącego przekrojem ściętego stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_w(h)$ – pole koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h .

Zauważmy, że $r_{ss}(h)$ wyznaczamy z wykorzystaniem twierdzenia Talesa, a $r_{hd}(h)$ z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa. Wyliczenie wyżej wymienionych wielkości przedstawione jest na Rys.3.4.2 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



Rys.3.4.2. Zależność pomiędzy wysokością przekroju a polem przekroju hiperboloidy dwupowłokowej, ściętego stożka i walca.

Następnie porównujemy różnicę pól przekrojów ściętego stożka i walca z polem przekroju fragmentu hiperboloidy dwupowłokowej (poprowadzonych na wysokości h):

$$P_{\acute{s}s}(h) - P_w(h) = \pi h^2 - \pi a = P_{hd}(h).$$

Zatem, zgodnie z Uogólnioną Zasadą Cavalieriego (Zasada 2.2) objętość fragmentu hiperboloidy dwupowłokowej jest równa różnicy objętości ściętego stożka i walca:

$$V_{hd} = V_{\acute{s}s} - V_w.$$

□

3.4.3. Uwaga:

Twierdzenie 3.4.1 pozwala na wyznaczenie wzoru na objętość fragmentu hiperboloidy dwupowłokowej w oparciu o znajomość wzorów na objętość ściętego stożka i walca:

$$\begin{aligned} V_{hd} &= V_{\acute{s}s} - V_w = \frac{1}{3}(\pi c^2 \cdot c - \pi a \sqrt{a}) - \pi a \cdot (c - \sqrt{a}) = \\ &= \frac{\pi c^3}{3} - \frac{\pi a \sqrt{a}}{3} - \pi a c + \pi a \sqrt{a} = \pi \left(\frac{c^3}{3} + \frac{2}{3} a \sqrt{a} - a c \right). \end{aligned}$$

3.5. Bryła powstała przez obrót wokół cięciwy krótszego łuku okręgu o końcach wspólnych z tą cięciwą – wrzeciono.

Kolejną bryłą, której objętość wyznaczymy jest wrzeciono – bryła obrotowa powstała przez obrót krótszego łuku (fragment okręgu o promieniu R) wokół cięciwy mającej wspólne końce z owym łukiem. Przecinając bryłę płaszczyznami prostopadłymi do osi obrotu w przekrojach otrzymujemy koła.

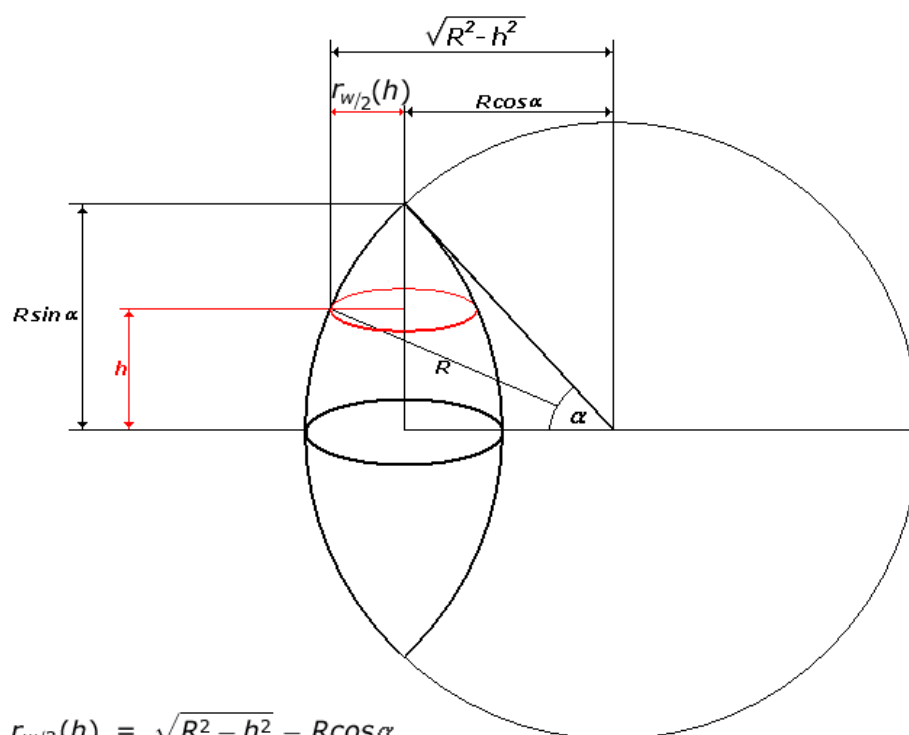
Długość łuku, a więc wielkość wrzeciona, uzależniamy od kąta środkowego 2α . W poniższych rozważaniach ograniczę się wyłącznie do połowy omawianej bryły (czyli o kącie środkowym α).

Aby w pełni zrozumieć i wywnioskować, jaką bryłę (a wręcz bryły) należy porównywać z naszym wrzecionem lepiej jest najpierw przyjrzeć się, jak wygląda zależność pomiędzy wysokością płaszczyzny przekroju a polem przekroju (Rys.3.5.1).

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq R \sin \alpha$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_{w/2}(h)$ – promień koła będącego przekrojem połowy wrzeciona płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_{w/2}(h)$ – pole koła będącego przekrojem połowy wrzeciona płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h .

Zauważmy, że $r_{w/2}(h)$ wyznaczamy z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa. Wyliczenie wyżej wymienionych wielkości przedstawione jest na Rys.3.5.1 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



$$r_{w/2}(h) = \sqrt{R^2 - h^2} - R \cos \alpha$$

$$P_{w/2}(h) = \pi(R^2 - h^2) + \pi(R^2 \cos^2 \alpha) - \pi(2\sqrt{R^2 - h^2} R \cos \alpha)$$

Rys.3.5.1. Zależność pomiędzy wysokością przekroju a polem przekroju połowy wrzeciona.

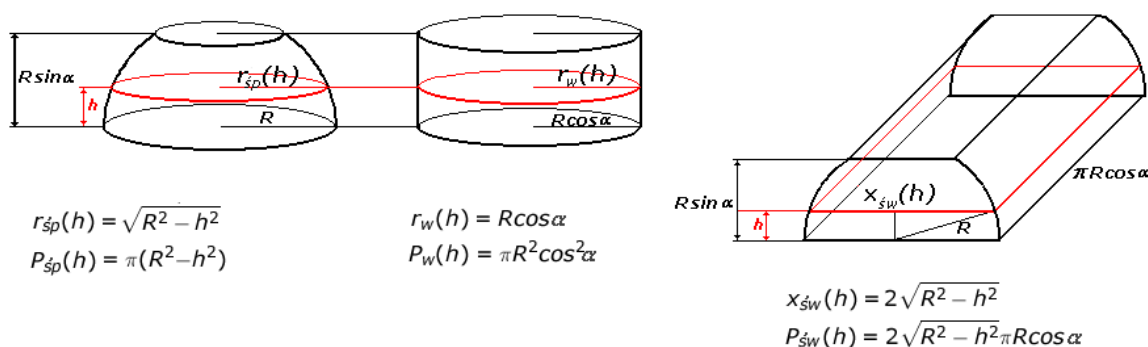
3.5.2. Twierdzenie: Objętość połowy wrzeciona (o wspomnianych wyżej parametrach α i R) jest równa sumie objętości półkuli o promieniu R ściętej na wysokości $R\sin\alpha$ i walca o promieniu $R\cos\alpha$ i o wysokości $R\sin\alpha$ pomniejszonej o objętość połowy poziomego walca o promieniu R i wysokości $\pi R\cos\alpha$ ściętego płaszczyzną równoległą do osi obrotu i oddaloną od niej o $R\sin\alpha$ (Rys.3.5.3).

Dowód:

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq R\sin\alpha$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_{sp}(h)$ – promień koła będącego przekrojem ściętej półkuli płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $r_w(h)$ – promień koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $x_{sw}(h)$ – bok prostokąta będącego przekrojem ściętej połowy poziomego walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_{sp}(h)$ – pole koła będącego przekrojem ściętej półkuli płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_w(h)$ – pole koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $P_{sw}(h)$ – pole prostokąta będącego przekrojem ściętej połowy poziomego walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h .

Zauważmy, że $r_{sp}(h)$ i $x_{sw}(h)$ wyznaczamy z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa. Wyliczenie wyżej wymienionych wielkości przedstawione jest na Rys.3.5.3 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



rys.3.5.3. Zależność pomiędzy wysokością przekroju a polem przekroju ściętej półkuli, walca i ściętej połowy poziomego walca.

Następnie porównujemy sumę pól przekrojów ściętej półkuli i walca pomniejszoną o pole przekroju ściętej połowy poziomego walca z polem przekroju połowy wrzeciona (poprowadzonych na wysokości h):

$$P_{\acute{s}p}(h) + P_w(h) - P_{\acute{s}w}(h) = \pi(R^2 - h^2) + \pi R^2 \cos^2 \alpha - 2\sqrt{R^2 - h^2} \pi R \cos \alpha = P_{w/2}(h).$$

Zatem, zgodnie z zasadą Cavalieriego (Zasada 2.2) objętość połowy wrzeciona jest równa sumie objętości ściętej półkuli i walca pomniejszonej o objętość ściętej połowy poziomego walca:

$$V_{w/2} = V_{\acute{s}p} + V_w - V_{\acute{s}w}.$$

□

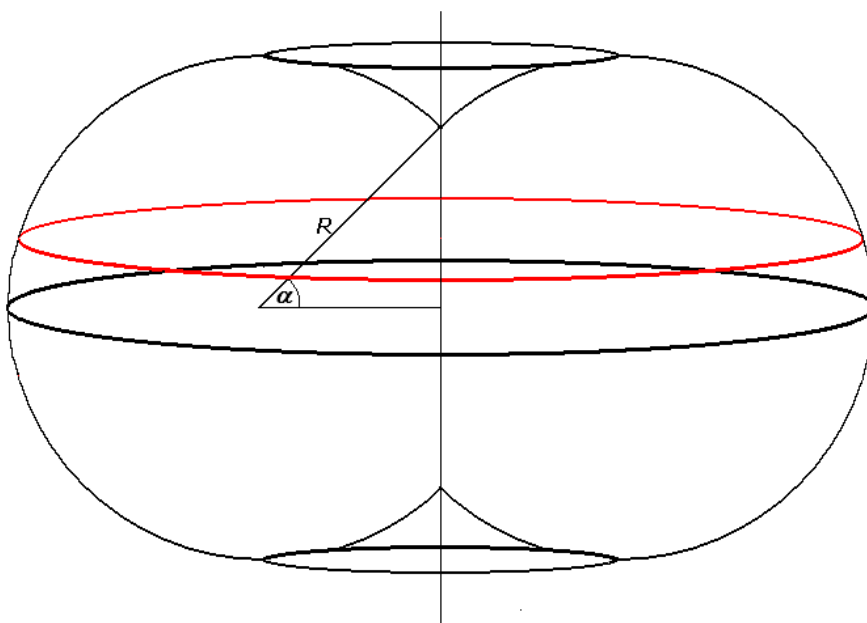
3.5.4. Uwaga:

Twierdzenie 3.5.2 pozwala na wyznaczenie wzoru na objętość połowy wrzeciona w oparciu o znajomość wzorów na objętość ściętej półkuli, walca i ściętej połowy poziomego walca:

$$V_{w/2} = V_{\acute{s}p} + V_w - V_{\acute{s}w} = \pi R^3 \left(\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha - \alpha \cos \alpha \right).$$

3.6. Bryła powstała przez obrót wokół cięciwy dłuższego łuku okręgu o końcach wspólnych z tą cięciwą – jabłko.

Naturalną konsekwencją poprzedniego przykładu jest próba wyznaczenia objętości bryły powstałej przez obrót dłuższego łuku (fragmentu okręgu o promieniu R) wokół cięciwy mającej wspólne końce z owym łukiem. Swoim kształtem bryła przypomina jabłko (rys.3.6.0) i w tenże sposób będzie przeze mnie nazywana.



Rys.3.6.0.

Długość obracanego łuku, a więc wielkość jabłka, uzależniamy od kąta środkowego $2\pi - 2\alpha$. W poniższych rozważaniach ograniczę się wyłącznie do połowy omawianej bryły (o kącie środkowym $\pi - \alpha$).

Przecinając bryłę płaszczyznami prostopadłymi do osi obrotu na wysokości h ($0 \leq h \leq R$) w przekrojach otrzymujemy koła (dla $0 \leq h \leq R \sin \alpha$) bądź pierścienie ($R \sin \alpha \leq h \leq R$). Połowę jabłka dzielę na dwie bryły płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu poprowadzoną na wysokości $R \sin \alpha$ (na część dolną: $0 \leq h \leq R \sin \alpha$ i część górną: $R \sin \alpha \leq h \leq R$).

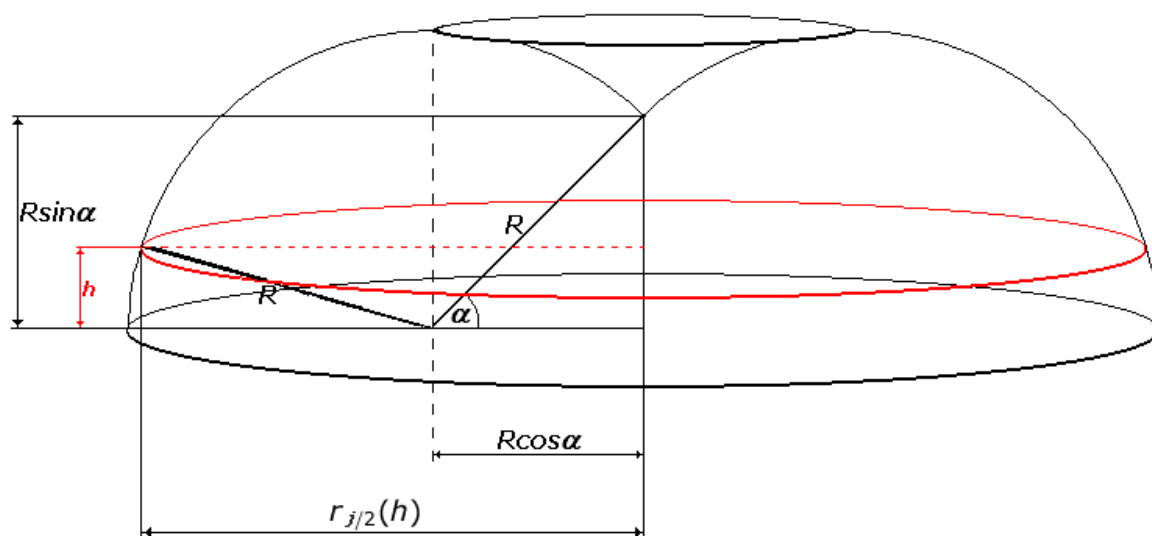
Zajmijmy się przypadkiem, gdy $0 \leq h \leq R \sin \alpha$.

Aby w pełni zrozumieć i wywnioskować, jaką bryłę (a wręcz bryły) należy porównywać z połową jabłka lepiej jest najpierw przyjrzeć się, jak wygląda zależność pomiędzy wysokością płaszczyzny przekroju a polem przekroju (rys.3.6.1).

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq R \sin \alpha$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_{j/2}(h)$ – promień koła będącego przekrojem połowy jabłka płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ;
- $P'_{j/2}(h)$ – pole koła będącego przekrojem połowy jabłka płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h .

Zauważmy, że $r_{j/2}(h)$ wyznaczamy z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa. Wyliczenie wyżej wymienionych wielkości przedstawione jest na Rys.3.6.1 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



$$r_{j/2}(h) = \sqrt{R^2 - h^2} + R \cos \alpha$$

$$P'_{j/2}(h) = \pi(R^2 - h^2) + \pi(R^2 \cos^2 \alpha) + \pi(2\sqrt{R^2 - h^2} R \cos \alpha)$$

Rys.3.6.1. Zależność pomiędzy wysokością przekroju a polem przekroju połowy jabłka dla $0 < h < R \sin \alpha$.

Jak widać, dla $0 \leq h \leq R \sin \alpha$, zależność pomiędzy wysokością przekroju a polem przekroju połowy jabłka jest niemal identyczna jak w przypadku wrzeciona (podrozdział 3.5).

Stąd też naturalne jest, że:

3.6.2. Twierdzenie: Objętość fragmentu połowy jabłka (o wspomnianych wyżej parametrach α i R) dla $0 \leq h \leq R \sin \alpha$ jest równa sumie objętości półkuli o promieniu R ściętej na wysokości $R \sin \alpha$, walca o promieniu $R \cos \alpha$ i o wysokości $R \sin \alpha$ i połowy poziomego walca o promieniu R i wysokości $R \cos \alpha$ ściętego płaszczyzną równoległą do osi obrotu i oddaloną od niej o $R \sin \alpha$.

Z racji analogii do przykładu wrzeciona dowód pomijam (pozostawiam czytelnikom).

3.6.3. Uwaga:

Twierdzenie 3.6.2 pozwala na wyznaczenie wzoru na objętość części (dolnej) połowy jabłka w oparciu o znajomość wzorów na objętość ściętej półkuli, walca i ściętej połowy poziomego walca (oznaczenia identyczne jak w poprzednim podrozdziale).

$$V'_{j/2} = V_{sp} + V_w + V_{sw} = \pi R^3 \left(3 \sin \alpha - \frac{7}{3} \sin^3 \alpha + \alpha \cos \alpha \right)$$

Sytuacja, gdy $R\sin\alpha \leq h \leq R$ wymaga osobnego rozpatrzenia – tym razem przecinając bryłę płaszczyznami prostopadłymi do osi obrotu otrzymujemy pierścienie.

Bryłą, do której porównywać będziemy opisywaną część jabłka jest tym razem poziomy walec ucięty w pewnej odległości od swej osi obrotu (Rys.3.6.5).

3.6.4. Twierdzenie: Objętość fragmentu połowy jabłka (o wspomnianych wyżej parametrach α i R) dla $R\sin\alpha \leq h \leq R$ jest równa objętości części poziomego walca o promieniu R i wysokości $2\pi R\cos\alpha$ ściętego płaszczyzną równoległą do osi obrotu i oddaloną od niej o $R\sin\alpha$.

Dowód:

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq R\sin\alpha$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

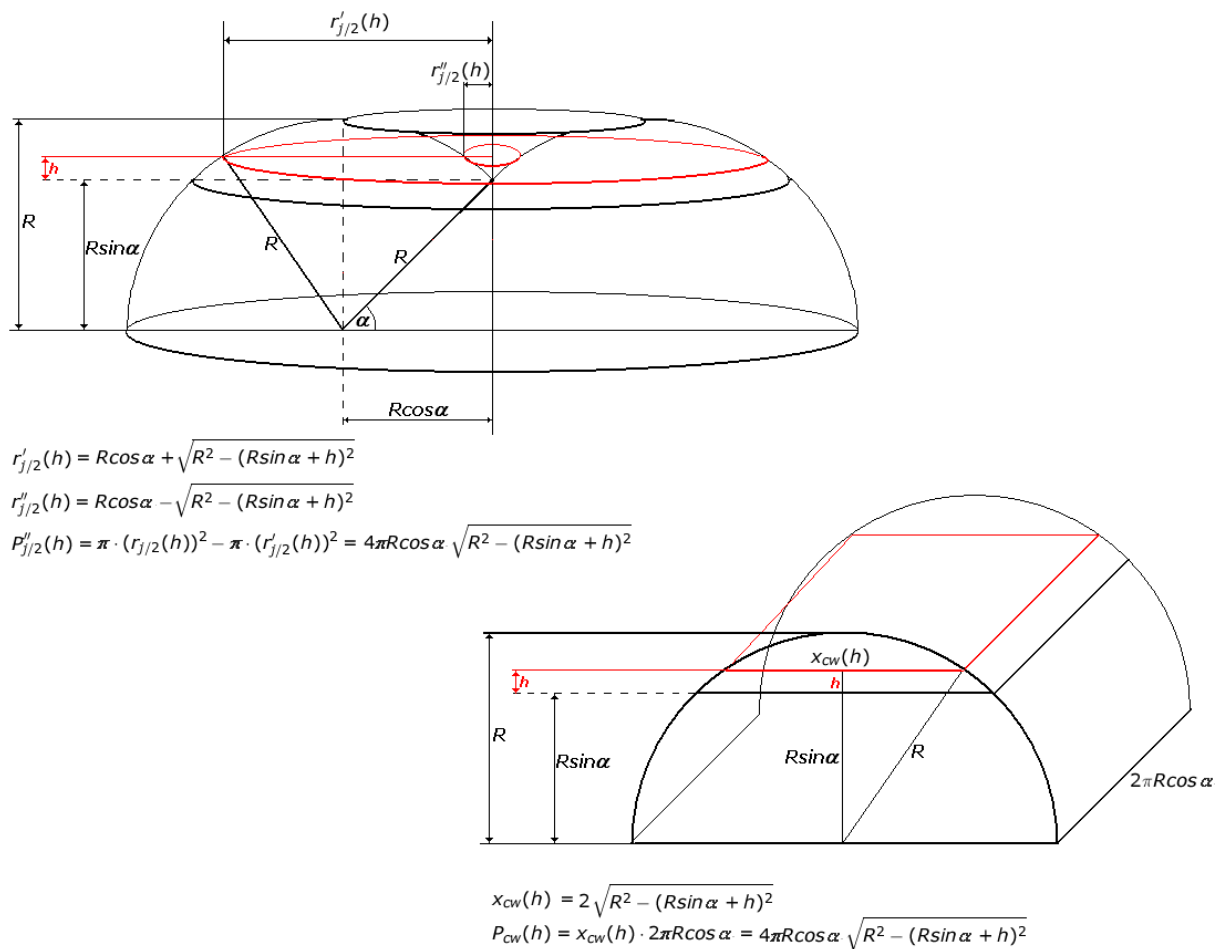
- $r'_{j/2}(h)$ – promień większego koła będącego przekrojem połowy jabłka płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ;
- $r''_{j/2}(h)$ – promień mniejszego koła będącego przekrojem połowy jabłka płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ;
- $P''_{j/2}(h)$ – pole pierścienia (różnicy kół o promieniach $r'_{j/2}(h)$ i $r''_{j/2}(h)$) będącego przekrojem połowy jabłka płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ;
- $x_{cw}(h)$ – bok prostokąta będącego przekrojem części poziomego walca płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ;
- $P_{cw}(h)$ – pole prostokąta będącego przekrojem części poziomego walca płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h .

Zauważmy, że $r'_{j/2}(h)$, $r''_{j/2}(h)$ i $x_{cw}(h)$ wyznaczamy z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

Wyliczenie wyżej wymienionych wielkości przedstawione jest na Rys.3.6.5

– sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.

Drugi bok prostokąta będącego przekrojem części poziomego walca płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h jest stały i ma długość $2\pi R\cos\alpha$.



Rys.3.6.5. Zależność pomiędzy wysokością przekroju a polem przekroju połowy jabłka dla $R \sin \alpha < h < R$ oraz części walca.

Następnie porównujemy pola przekrojów opisywanych brył płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h :

$$P_{cw}(h) = 4\pi R \cos \alpha \sqrt{R^2 - (R \sin \alpha + h)^2} = P''_{j/2}(h).$$

Zatem, zgodnie z Zasadą Cavalieriego (Zasada 2.1) objętości brył są równe:

$$V''_{j/2} = V_{cw}.$$

□

3.6.6. Uwaga:

Twierdzenie 3.6.4 pozwala na wyznaczenie wzoru na objętość części (górnej) połowy jabłka w oparciu o znajomość wzorów na objętość części ściętego poziomego walca:

$$V''_{j/2} = V_{cw} = R^3 \pi (\pi \cos \alpha - 2\alpha \cos \alpha - 2\cos^2 \alpha \sin \alpha).$$

3.6.7. Uwaga:

Ostatecznie objętość połowy jabłka jest sumą objętości części (dolnej) połowy jabłka dla $0 \leq h \leq R \sin \alpha$ oraz objętości części (górnej) połowy jabłka dla $R \sin \alpha \leq h \leq R$.

$$V_{j/2} = V'_{j/2} + V''_{j/2} = R^3 \pi (\pi \cos \alpha - 2\alpha \cos \alpha - 2\cos^2 \alpha \sin \alpha).$$

3.7. Torus

Kolejną omawianą bryłą jest torus – to dwuwymiarowa powierzchnia obrotowa, powstała przez obrót okręgu o promieniu R wokół prostej s leżącej w tej samej płaszczyźnie odległej o d od środka okręgu i nieprzecinającej go (czyli nie mającej z nim wspólnych punktów). Celem tego podrozdziału jest udowodnienie, że objętość torusa jest równa objętości odpowiedniego walca.

W poniższych rozważaniach ograniczę się wyłącznie do połowy omawianej bryły.

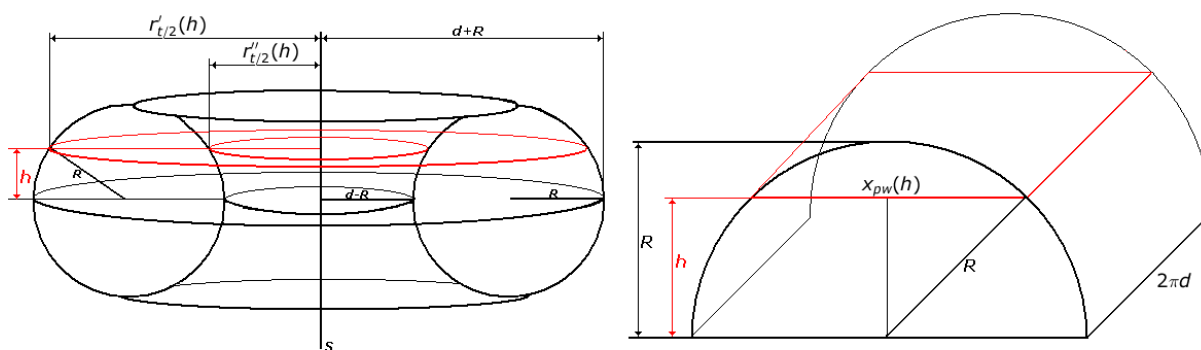
3.7.1. Twierdzenie: Objętość połowy torusa o promieniu R oddalonego od osi obrotu o d jest równa objętości połowy poziomego walca o promieniu R i wysokości $2\pi d$.

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq R$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r'_{t/2}(h)$ – promień większego koła będącego przekrojem połowy torusa płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ;
- $r''_{t/2}(h)$ – promień mniejszego koła będącego przekrojem połowy torusa płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ;
- $P_{t/2}(h)$ – pole pierścienia (różnicy kół o promieniach $r'_{t/2}(h)$ i $r''_{t/2}(h)$) będącego przekrojem połowy torusa płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ;
- $x_{pw}(h)$ – bok prostokąta będącego przekrojem połowy poziomego walca płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h ;
- $P_{pw}(h)$ – pole prostokąta będącego przekrojem połowy poziomego walca płaszczyzną poprowadzoną na dowolnej wysokości h .

Zauważmy, że $r'_{t/2}(h)$, $r''_{t/2}(h)$ i $x_{pw}(h)$ wyznaczamy z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa. Wyliczenie wyżej wymienionych wielkości przedstawione jest na Rys.3.7.2 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.

Długość drugiego boku prostokąta będącego przekrojem połowy poziomego walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ($0 \leq h \leq R$) jest stała i ma długość $2\pi d$.



$$r'_{t/2}(h) = d + \sqrt{R^2 - h^2} \quad r''_{t/2}(h) = d - \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$P_{t/2}(h) = \pi \cdot (r'_{t/2}(h))^2 - \pi \cdot (r''_{t/2}(h))^2 = 4\pi d \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$x_{pw}(h) = 2\sqrt{R^2 - h^2}$$

$$P_{pw}(h) = 4\pi d \sqrt{R^2 - h^2}$$

rys.3.7.2. Zależność pomiędzy wysokością przekroju a polem przekroju połowy torusa i połowy poziomego walca.

Następnie porównujemy pola przekrojów opisywanych brył płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h :

$$P_{pw}(h) = 4\pi d\sqrt{R^2 - h^2} = P_{t/2}(h).$$

Zatem, zgodnie z zasadą Cavalieriego (Zasada 2.1) objętości brył są równe:

$$V_{t/2} = V_{pw}.$$

□

3.7.3. Uwaga:

Twierdzenie 3.7.1 pozwala na wyznaczenie wzoru na objętość połowy torusa w oparciu o znajomość wzoru na objętość połowy poziomego walca:

$$V_{t/2} = V_{pw} = \pi^2 dR^2.$$

4. Pola wybranych powierzchni obrotowych.

Celem poniższego rozdziału jest sformułowanie zasady Cavalieriego dla powierzchni obrotowych po wcześniejszym sprawdzeniu, że analogiczna wersja jak dla objętości brył nie jest poprawna. W dalszej części rozdziału, korzystając z nowej wersji i uogólnienia zasady Cavalieriego dla powierzchni obrotowych, wyznaczam pola skomplikowanych powierzchni za pomocą powierzchni, których pola umiem wyznaczyć.

4.1. „Dwa stożki i walec”.

Poniżej zamierzam pokazać, że nie jest prawdziwa zasada Cavalieriego dotycząca pól powierzchni obrotowych – analogiczna do tej przedstawionej w poprzednim rozdziale.

4.1.1. Zasada Cavalieriego dla powierzchni obrotowych: *Niech dane będą dwie powierzchnie obrotowe, obie leżące pomiędzy dwiema równoległymi płaszczyznami odległymi o k . Jeśli przekroje tych powierzchni dowolną płaszczyzną równoległą do danych, odległą o h ($0 \leq h \leq k$), mają równe obwody, to powierzchnie te mają równe pola.*

Nietrudno jest znaleźć kontrprzykład – wystarczy porównać dwa stożki i walec.

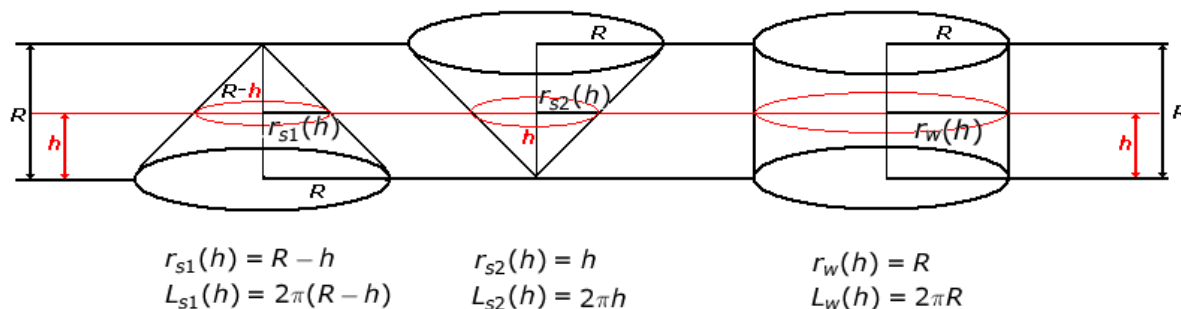
4.1.2. Twierdzenie: Pole powierzchni bocznej dwóch stożków o promieniach podstawy R i wysokościach R nie jest równe polu powierzchni walca o promieniu podstawy R i wysokości R pomimo tego, że suma obwodów przekrojów dwóch stożków płaszczyzną na dowolnej wysokości h ($0 \leq h \leq R$) jest równa obwodowi przekroju walca płaszczyzną na tejże wysokości (Rys. 4.1.3).

Dowód:

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq R$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_{s1}(h)$ – promień koła będącego przekrojem pierwszego stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $r_{s2}(h)$ – promień koła będącego przekrojem drugiego stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $r_w(h)$ – promień koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $L_{s1}(h)$ – obwód koła będącego przekrojem pierwszego stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $L_{s2}(h)$ – obwód koła będącego przekrojem drugiego stożka płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h ;
- $L_w(h)$ – obwód koła będącego przekrojem walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h .

Zauważmy, że $r_{s1}(h)$ i $r_{s2}(h)$ wyznaczamy z wykorzystaniem twierdzenia Talesa. Wyliczenie wyżej wymienionych wielkości przedstawione jest na Rys.4.1.3 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



Rys.4.1.3. Zależność pomiędzy wysokością płaszczyzny przekroju a obwodem przekroju dwóch stożków i walca.

Następnie porównujemy sumę obwodów przekrojów dwóch stożków płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h i obwód przekroju walca płaszczyzną poprowadzoną na wysokości h :

$$L_{s1}(h) + L_{s2}(h) = 2\pi(R - h) + 2\pi h = 2\pi R = L_w(h).$$

Zatem, zgodnie z zasadą Cavalieriego (Twierdzenie 4.1.1) pola powierzchni bocznych brył są równe:

$$Pb_{s1} + Pb_{s2} = Pb_w.$$

W tym momencie dochodzimy do sprzeczności – znajomość wzorów na obliczenie pola powierzchni bocznych stożków i walca pozwala nam to w pełni zobaczyć:

$$Pb_{s1} + Pb_{s2} = 2\pi Rl = 2\pi R^2\sqrt{2} \neq 2\pi R^2 = Pb_w.$$

4.1.4. Wniosek: Należy na nowo sformułować zasadę Cavalieriego dotyczącą wyznaczania pól powierzchni obrotowych na podstawie obwodów przekrojów brył płaszczyznami poprowadzonymi na danej wysokości.

4.2. Zasada Cavalieriego (i jej uogólnienie) dotycząca pól powierzchni obrotowych.

W poniższym podrozdziale zamierzam sformułować zasadę Cavalieriego dla powierzchni obrotowych a następnie uogólnić ją (analogicznie jak w przypadku zasady Cavalieriego dla brył).

4.2.1. Zasada Cavalieriego dotycząca pól powierzchni obrotowych:

Niech dane będą dwie powierzchnie obrotowe, obie powstałe przez obrót krzywych o takich samych długościach k .

Niech pierwsza krzywa ma początek w punkcie A_1 , a druga w punkcie A_2 .

Każdy punkt na krzywej wyznacza, przez obracanie, okrąg zawarty w powierzchni obrotowej, który nazwijmy równoleżnikiem. Równoleżniki pokrywają całą powierzchnie.

Jeśli dla dowolnego h z przedziału $[0, k]$ dla punktu X_1 oddalonego od A_1 o h na pierwszej krzywej oraz dla punktu X_2 oddalonego od A_2 o h na drugiej krzywej, równoleżniki odpowiadające punktom X_1 i X_2 mają równe długości, to powierzchnie obrotowe mają równe pola.

Wielkość h oznacza tu odległość między punktami na krzywej/krzywych, wysokość nie wysokość – litera ta została wybrana nieprzypadkowo, z powodu analogii do zasady Cavalieriego dotyczącej objętości brył.

4.2.2. Uogólnienie zasady Cavalieriego dotyczącej pól powierzchni obrotowych:

Niech dane będzie $n+1$ powierzchni obrotowych powstałych przez obrót krzywych o takich samych długościach k .

Niech pierwsza krzywa ma początek w punkcie A , druga w A_1 , ..., ostatnia w A_n .

Jeśli istnieją rzeczywiste współczynniki a_1, a_2, \dots, a_n takie, że dla dowolnego h z przedziału $[0, k]$

dla punktu X oddalonego od A o h na pierwszej krzywej,
dla punktu X_1 oddalonego od A_1 o h na drugiej krzywej, ...,
dla punktu X_n oddalonego od A_n o h od ostatniej krzywej,

równoleżnik odpowiadający punktowi X o długości $L(X)$ możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej równoleżników odpowiadającym punktom X_1, \dots, X_n (o długościach odpowiednio: $L(X_1), \dots, L(X_n)$):

$$L(x) = a_1 \cdot L(X_1) + a_2 \cdot L(X_2) + \dots + a_n \cdot L(X_n)$$

to pierwsza powierzchnia obrotowa ma pole będące kombinacją liniową pozostałych n powierzchni z tymi samymi rzeczywistymi współczynnikami:

$$P = a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 + \dots + a_n \cdot P_n .$$

4.3. Torus

Aby zasada Cavalieriego dla pól powierzchni obrotowych była przez czytelników w pełni zrozumiała, posłużymy się najpierw przykładem torusa.

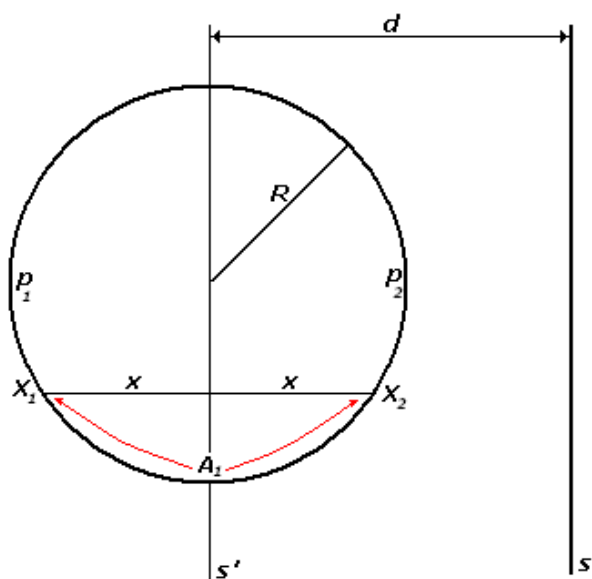
Torus to dwuwymiarowa powierzchnia obrotowa, powstała przez obrót okręgu o promieniu R wokół prostej s leżącej w tej samej płaszczyźnie odległej o d od środka okręgu i nieprzecinającej go (czyli nie mającej z nim wspólnych punktów).

W tym podrozdziale celem będzie udowodnienie, że pole powierzchni torusa jest równe polu powierzchni bocznej pewnego walca.

4.3.1. Twierdzenie: Pole powierzchni torusa, powstałego przez obrót okręgu o promieniu R wokół prostej s leżącej w tej samej płaszczyźnie odległej o d od środka okręgu (i nieprzecinającej go) jest równe polu powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy $2d$ i wysokości πR (Rys. 4.3.2).

Dowód:

Powierzchnia torusa traktuję jako sumę powierzchni powstałej przez obrót półokręgu p_1 będącego dalej od osi obrotu s oraz powierzchni powstałej przez obrót półokręgu p_2 będącego bliżej od osi obrotu. Oba półokręgi mają długość πR (Rys.4.3.1').



Rys.4.3.1'.

Skoro dwie powyżej opisane powierzchnie obrotowe porównujemy do powierzchni bocznej walca to znaczy, że mamy do czynienia z trzema powierzchniami obrotowymi, każda powstała przez obrót krzywej o długości πR . Punkty A_1 , A_2 i A_2' wybieram zgodnie z Rys.4.3.2. Punkt A_1 jest wspólnym punktem początkowym półokręgów p_1 i p_2 (Rys. 4.3.1'). Dla dowolnego h ($0 \leq h \leq \pi R$) wybieram punkty o h odległe od A_1 – są to punkty X_1 i X_2 .

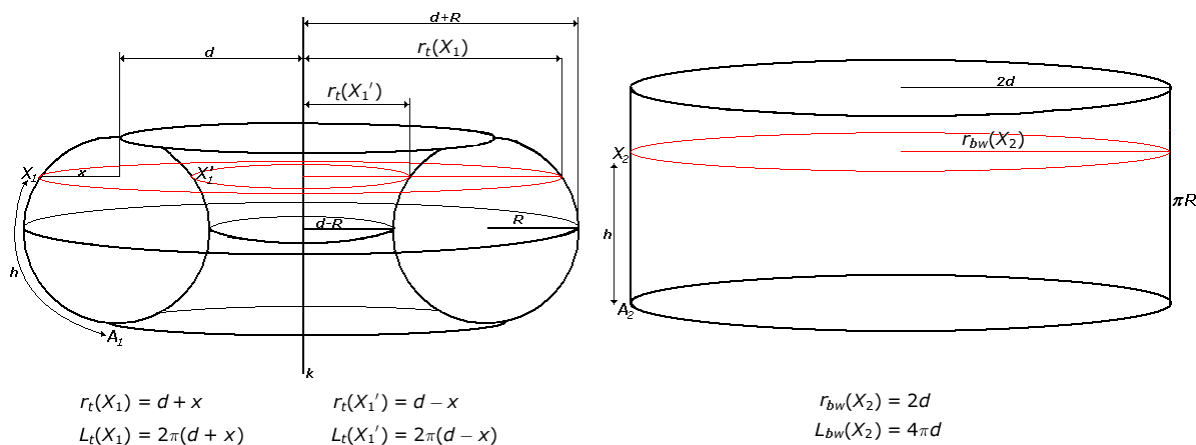
Równoleżnik odpowiadający punktowi X_1 jest oddalony od osi obrotu o $d+x$, natomiast równoleżnik odpowiadający punktowi X_2 o $d-x$, gdzie x to odległość owych punktów od prostej s' równoległej do osi obrotu s przechodzącej przez A_1 .

Wielkość x można wyznaczyć poprzez h , ale nie jest to potrzebne, gdyż w kolejnych wyliczeniach wielkość ta ulegnie skróceniu.

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq \pi R$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_t(X_1)$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni torusa, przechodzącego przez punkt X_1 oddalony od A_1 o h ;
- $r_t(X_1')$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni torusa, przechodzącego przez punkt X_1' oddalony od A_1 o h ;
- $r_{bw}(X_2)$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni bocznej walca, przechodzącego przez punkt X_2 oddalony od A_2 o h ;
- $L_t(X_1)$ – długość okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni torusa, przechodzącego przez punkt X_1 oddalony od A_1 o h ;
- $L_t(X_1')$ – długość okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni torusa, przechodzącego przez punkt X_1' oddalony od A_1 o h ;
- $L_{bw}(X_2)$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni bocznej walca, przechodzącego przez punkt X_2 oddalony od A_2 o h ;
- $l = \pi R$ – wysokość pola powierzchni bocznej walca.

Wyliczenie wyżej wymienionych promieni oraz długości równoleżników przedstawione jest na Rys.4.3.2 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



Rys.4.3.2. Zależność pomiędzy położeniem równoleżnika a jego długością dla torusa i pola powierzchni bocznej walca.

Następnie porównujemy sumę długości równoleżników (odległych od punktu A_1 o h) dla torusa i długość równoleżnika (odległego od punktu A_2 o h) dla powierzchni bocznej walca:

$$L_t(X_1) + L_t(X'_1) = 2\pi(d + x) + 2\pi(d - x) = 4\pi d = L_{bw}(X_2).$$

Zatem, zgodnie z wersją zasady Cavalieriego dla powierzchni obrotowych (Zasada 4.2.2):

$$P_t = P_{bw}.$$

□

4.3.3. Uwaga:

Twierdzenie 4.3.1 pozwala nam wyznaczyć pole powierzchni torusa w oparciu o znajomość wzoru na pole powierzchni bocznej walca:

$$P_t = P_{bw} = 4\pi d \cdot l = 4\pi d \cdot \pi R = 4\pi^2 R d.$$

4.4. Powierzchnia obrotowa - wrzeciono.

Jedną z brył omawianych w poprzednim rozdziale dotyczącym objętości było wrzeciono (podrozdział 3.5). Teraz postaramy się, w oparciu o nową zasadę Cavalieriego dla powierzchni obrotowych, wyznaczyć pole owej powierzchni.

Powierzchnia obrotowa, którą będziemy teraz omawiać powstała z obrotu łuku (fragment okręgu o kącie środkowym 2α) wokół cięciwy mającej wspólny punkt z owym łukiem.

W poniższych rozważaniach ograniczę się wyłącznie do połowy omawianej powierzchni (kąta środkowego α).

Naszym celem jest udowodnienie, że pole powierzchni połowy wrzeciona jest różnicą pól innych powierzchni obrotowych: odcinka sfery i powierzchni bocznej walca.

Twierdzenie 4.4.1. Pole powierzchni połowy wrzeciona (o wspomnianych wyżej parametrach α i R) jest różnicą pola odcinka sfery o promieniu R (powstałego z półsfery przez odcięcie górnej części na wysokości $R\sin\alpha$) oraz pola powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy $R\cos\alpha$ i wysokości αR .

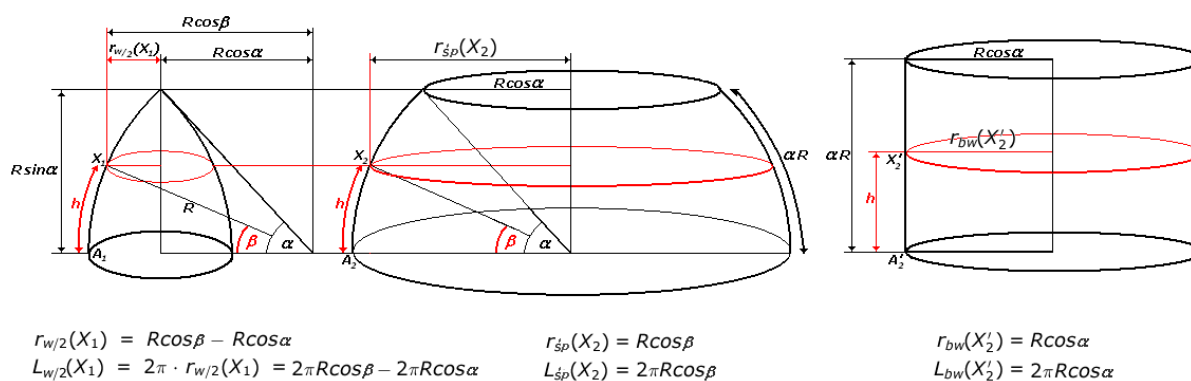
Dowód:

Mamy do czynienia z trzema powierzchniami obrotowymi, każda powstała przez obrót krzywej o długości αR . Punkty A_1, A_2 i A_2' wybieram zgodnie z Rys.4.4.2.

Po ustaleniu dowolnego h ($0 \leq h \leq \alpha R$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r_{w2}(X_1)$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni połowy wrzeciona, przechodzącego przez punkt X_1 (oddalony od punktu A_1 o h);
- $r_{sp}(X_2)$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni odcinka sfery, przechodzącego przez punkt X_2 (oddalony od punktu A_2 o h);
- $r_{bw}(X_2')$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni bocznej walca, przechodzącego przez punkt X_2' (oddalony od punktu A_2' o h);
- $L_{w2}(X_1)$ – długość okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni połowy wrzeciona, przechodzącego przez punkt X_1 (oddalony od punktu A_1 o h);
- $L_{sp}(X_2)$ – długość okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni odcinka sfery, przechodzącego przez punkt X_2 (oddalony od punktu A_2 o h);
- $L_{bw}(X_2')$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni bocznej walca, przechodzącego przez punkt X_2' (oddalony od punktu A_2' o h).

Wybór punktów X_1, X_2 utożsamiamy z wyborem kąta β ($0 \leq \beta \leq \alpha$). Miara kąta β wyraża się wzorem $\beta = h/R$ w przypadku połowy wrzeciona oraz odcinka sfery. Wyliczenie wyżej wymienionych promieni oraz długości równoleżników przedstawione jest na Rys.4.4.2 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



Rys. 4.4.2. Zależność pomiędzy położeniem równoleżnika a jego długością dla połowy powierzchni wrzeciona, ściętej półsfery i powierzchni bocznej walca.

Następnie porównujemy długość równoleżnika odcinka sfery (oddalonego od punktu A_2 o h) pomniejszoną o długość równoleżnika powierzchni bocznej walca (oddalonego od punktu A_2' o h) z długością równoleżnika połowy wrzeciona (oddalonego od punktu A_1 o h):

$$L_{\acute{s}p}(X_2) - L_{bw}(X'_2) = 2\pi R \cos \beta - 2\pi R \cos \alpha = L_{w/2}(X_1).$$

Zatem, zgodnie z wersją zasady Cavalieriego dla powierzchni obrotowych (Zasada 4.2.2):

$$P_{w/2} = P_{\acute{s}p} - P_{bw}.$$

□

4.4.5. Uwaga:

Twierdzenie 4.4.1 pozwala nam wyznaczyć pole powierzchni połowy wrzeciona w oparciu o znajomość wzoru na pole powierzchni ściętej półsfery i pole powierzchni bocznej walca:

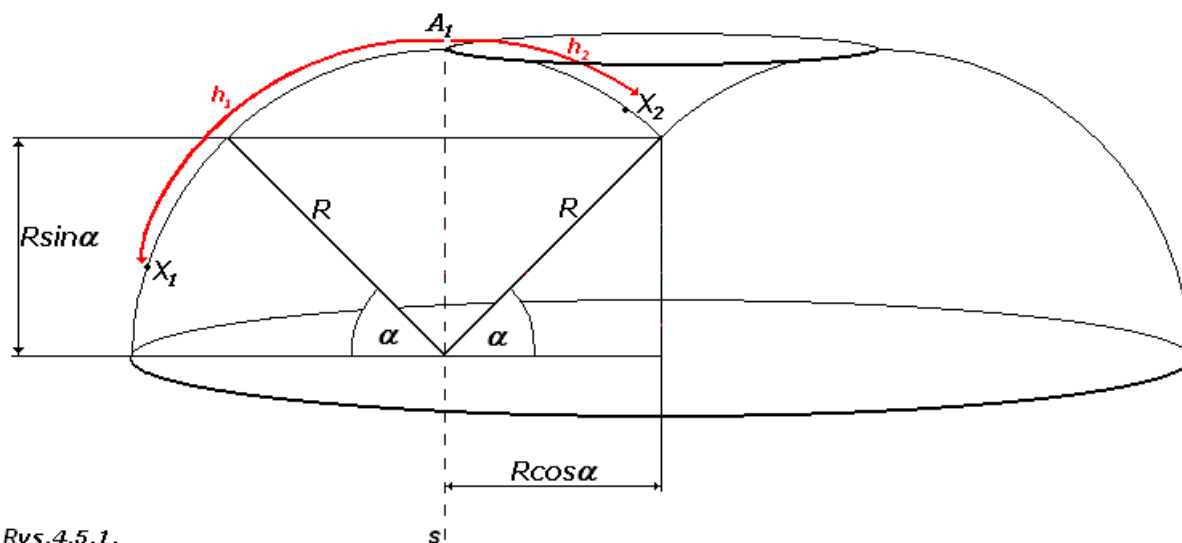
$$P_{w/2} = P_{\acute{s}p} - P_{bw} = 2\pi R^2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

4.5. Powierzchnia obrotowa – jabłko

Korzystając z ulepszonej wersji zasady Cavalieriego dotyczącej pól powierzchni obrotowych możemy wyznaczyć pole kolejnej bryły omawianej w poprzednim rozdziale – jabłka (podrozdział 3.6).

Powierzchnia obrotowa, którą będziemy teraz omawiać powstała w wyniku obrotu łuku (fragmentu okręgu o promieniu R odpowiadającego kątowi środkowemu $2\pi - 2\alpha$) wokół cięciwy mającej dwa wspólne punkty z owym łukiem.

W poniższych rozważaniach ograniczę się wyłącznie do połowy omawianej powierzchni obrotowej (kąt środkowy $\pi - \alpha$).



Rys.4.5.1.

W celu dokonania wyliczenia pola powierzchni połowy jabłka dzielimy opisywany łuk na dwa fragmenty prostą s równoległą do osi obrotu jabłka przechodzącą przez środek okręgu, którego fragmentem jest owy łuk. Oba fragmenty łuku (oddzielone punktem A_1) obracając się wokół osi obrotu jabłka tworzą powierzchnie obrotowe (Rys.4.5.1).

Pierwsza z nich powstaje przez obrót łuku (dłuższego) o długości $\pi R/2$ wokół osi obrotu jabłka. Powierzchnie tą porównuję z sumą pola powierzchni bocznej pewnego walca i pewnej półsfery. Wyznaczanie pola powierzchni fragmentu jabłka będzie bardzo podobnie jak w przypadku pola wrzeciona opisanego w poprzednim podrozdziale.

Twierdzenie 4.5.2. Pole powierzchni części jabłka powstałej przez obrót (dłuższego) łuku o długości $\pi R/2$ wokół osi obrotu jabłka jest równe sumie pola półsfery oraz pola powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy $R \cos \alpha$ i wysokości $\pi R/2$.

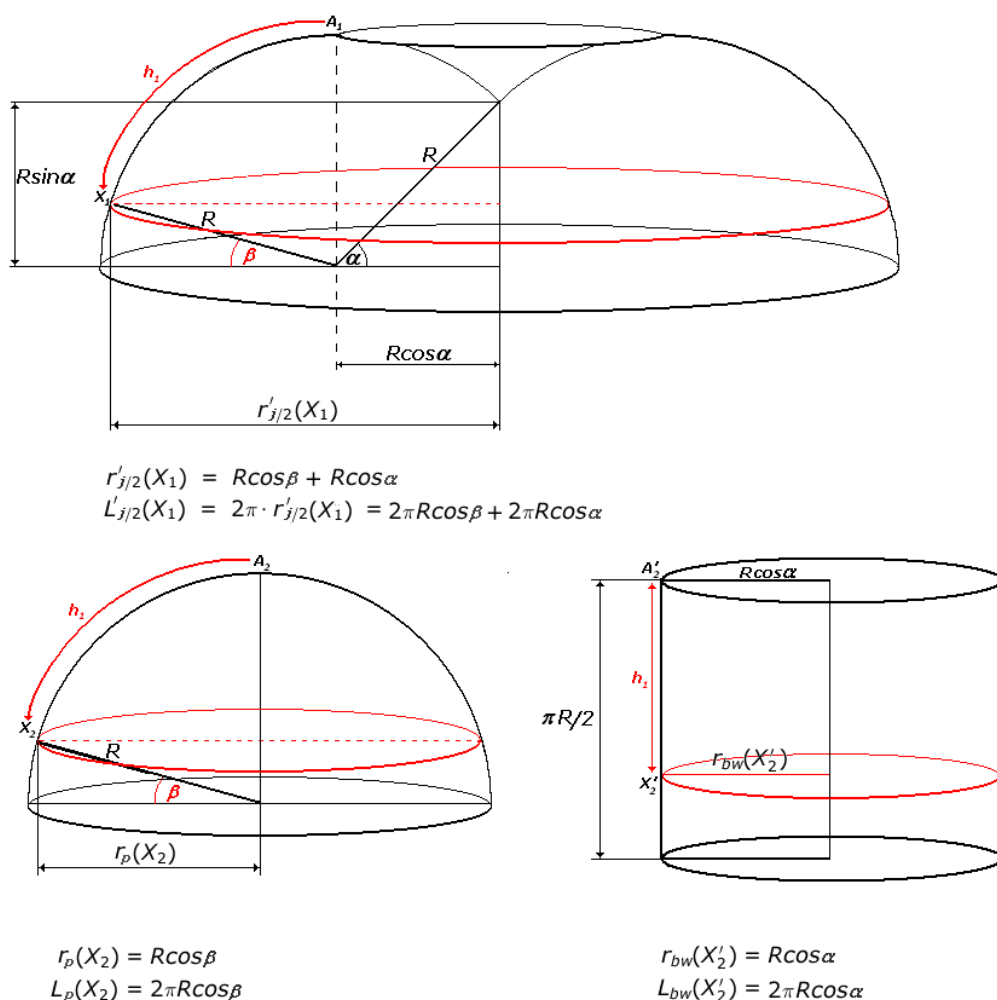
Dowód:

Mamy do czynienia z trzema powierzchniami obrotowymi, każda powstała przez obrót krzywej o długości $\pi R/2$. Punkty A_1 , A_2 i A_2' wybieram zgodnie z Rys.4.5.3.

Po ustaleniu dowolnego h_1 ($0 \leq h_1 \leq \pi R/2$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r'_{j/2}(X_1)$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni części połowy jabłka, przechodzącego przez punkt X_1 (oddalony od punktu A_1 o h_1);
- $r_p(X_2)$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni półsfery, przechodzącego przez punkt X_2 (oddalony od punktu A_2 o h_1);
- $r_{bw}(X_2')$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni bocznej walca, przechodzącego przez punkt X_2' (oddalony od punktu A_2' o h_1);
- $L'_{j/2}(X_1)$ – długość okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni części połowy jabłka, przechodzącego przez punkt X_1 (oddalony od punktu A_1 o h_1);
- $L_p(X_2)$ – długość okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni półsfery, przechodzącego przez punkt X_2 (oddalony od punktu A_2 o h_1);
- $L_{bw}(X_2')$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni bocznej walca, przechodzącego przez punkt X_2' (oddalony od punktu A_2' o h_1).

Wybór punktu X_1 i X_2 utożsamiamy z wyborem kąta β ($0 \leq \beta \leq \pi/2$). Miara kąta β wyraża się wzorem $\beta = (\pi R/2 - h_1)/R$ w przypadku części połowy jabłka oraz odcinka sfery. Wyliczenie wyżej wymienionych promieni oraz długości równoleżników przedstawione jest na Rys.4.5.3 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



Rys.4.5.3. Zależność pomiędzy położeniem równoleżnika a jego długością dla części połowy jabłka, półsfery i powierzchni bocznej walca.

Następnie porównujemy sumę długości równoleżnika półsfery (oddalonego od punktu A_2 o h) i długości równoleżnika powierzchni bocznej walca (oddalonego od punktu A_2' o h) z długością równoleżnika części połowy jabłka (oddalonego od punktu A_1 o h):

$$L_p(X_2) + L_{bw}(X'_2) = 2\pi R \cos\beta + 2\pi R \cos\alpha = L'_{j/2}(X_1).$$

Zatem, zgodnie z wersją zasady Cavalieriego dla powierzchni obrotowych (Zasada 4.2.2):

$$P'_{j/2} = P_p + P_{bw}.$$

□

4.5.4. Uwaga:

Twierdzenie 4.5.2 pozwala nam wyznaczyć pole powierzchni części jabłka w oparciu o znajomość wzoru na pole powierzchni półsfery i pole powierzchni bocznej walca:

$$P'_{j/2} = P_p + P_{bw} = 2\pi R^2 + \pi^2 R^2 \cos\alpha.$$

Druga z opisywanych na początku powierzchni powstaje przez obrót łuku (krótszego) o długości $R(\pi/2 - \alpha)$ wokół osi obrotu jabłka (Rys.4.5.6). Powierzchnie tą porównuję z różnicą pola powierzchni bocznej pewnego walca i czaszy pewnej sfery (odciętej na wysokości $R \sin\alpha$ od środka sfery). Wyznaczanie pola powierzchni tego fragmentu jabłka będzie również bardzo podobne jak w przypadku pola wrzeciona opisanego w poprzednim podrozdziale.

Twierdzenie 4.5.5. Pole powierzchni części jabłka powstałej przez obrót (krótszego) łuku o długości $R(\pi/2 - \alpha)$ wokół osi obrotu jabłka jest równe różnicy pola powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy $R \cos\alpha$ i wysokości $R(\pi/2 - \alpha)$ i pola czaszy sfery o promieniu R odciętej na wysokości $R \sin\alpha$.

Dowód:

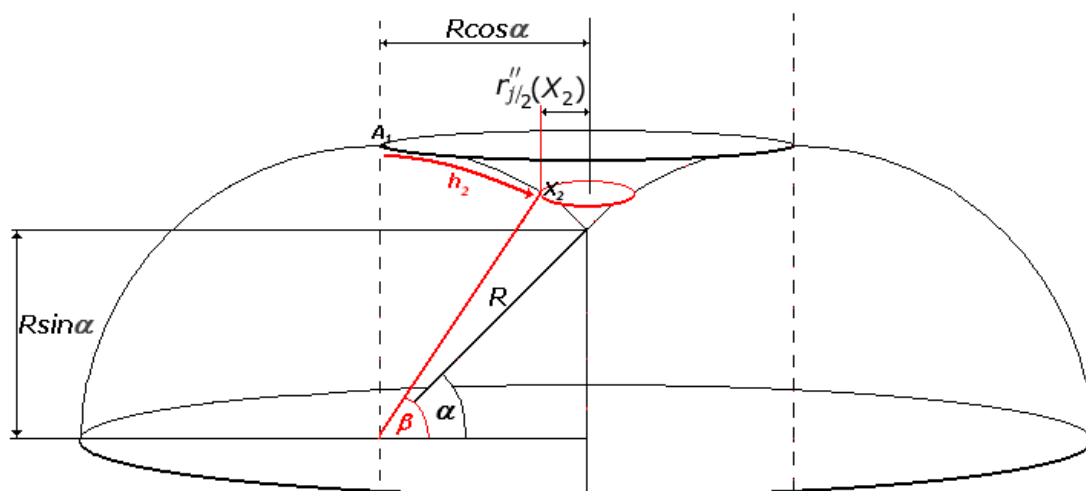
Mamy do czynienia z trzema powierzchniami obrotowymi, każda powstała przez obrót krzywej o długości $R(\pi/2 - \alpha)$.

Po ustaleniu dowolnego h_2 ($0 \leq h_2 \leq R(\pi/2 - \alpha)$) przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $r''_{j/2}(X_1)$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni części połowy jabłka, przechodzącego przez punkt X_2 (oddalony od punktu A_1 o h_2);

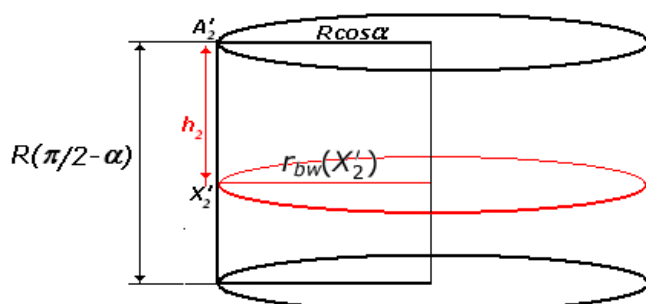
- $r_{bw}(X_2')$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni bocznej walca, przechodzącego przez punkt X_2' (oddalony od punktu A_2' o h_2);
- $r_p(X_2)$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni czaszy sfery, przechodzącego przez punkt X_2'' (oddalony od punktu A_2'' o h_2);
- $L''_{j/2}(X_1)$ – długość okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni części połowy jabłka, przechodzącego przez punkt X_2 (oddalony od punktu A_1 o h_2);
- $L_{bw}(X_2')$ – promień okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni bocznej walca, przechodzącego przez punkt X_2' (oddalony od punktu A_2' o h_2).
- $L_c(X_2'')$ – długość okręgu (równoleżnika) zawartego w powierzchni czaszy sfery, przechodzącego przez punkt X_2'' (oddalony od punktu A_2'' o h_2);

Wybór punktu X_2 i X_2'' utożsamiamy z wyborem kąta β ($\alpha \leq \beta \leq \pi/2$). Miara kąta β wyraża się wzorem $\beta = (\pi R/2 - h_2)/R$ w przypadku części połowy jabłka oraz czaszy sfery. Wyliczenie wyżej wymienionych promieni oraz długości równoleżników przedstawione jest na Rys.4.5.6 – sprawdzenie, czy poniższe wyniki są poprawne pozostawiam czytelnikom.



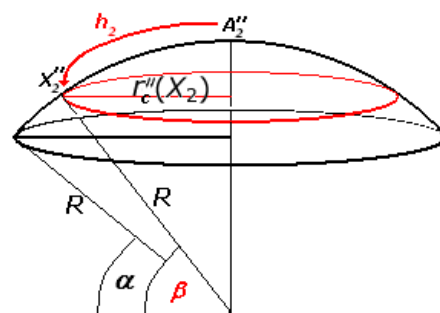
$$r''_{j/2}(X_2) = R \cos \alpha - R \cos \beta$$

$$L''_{j/2}(X_2) = 2\pi \cdot r''_{j/2}(X_2) = 2\pi R \cos \alpha - 2\pi R \cos \beta$$



$$r_{bw}(X'_2) = R \cos \alpha$$

$$L_{bw}(X'_2) = 2\pi R \cos \alpha$$



$$r_c(X''_2) = R \cos \beta$$

$$L_c(X''_2) = 2\pi R \cos \beta$$

Rys.4.5.6. Zależność pomiędzy położeniem równoleżnika a jego długością dla drugiej części połowy jabłka, powierzchni bocznej walca oraz pola czaszy sfery.

Następnie porównujemy różnicę długości równoleżnika powierzchni bocznej walca (oddalonego od punktu A_2' o h_2) i długości równoleżnika powierzchni czaszy sfery (oddalonego od punktu A_2'' o h_2) z długością równoleżnika części połowy jabłka (oddalonego od punktu A_1 o h_2):

$$L_{bw}(X'_2) - L_c(X''_2) = 2\pi R \cos \alpha - 2\pi R \cos \beta = L''_{j/2}(X_2).$$

Zatem, zgodnie z wersją zasady Cavalieriego dla powierzchni obrotowych (Zasada 4.2.2):

$$P''_{j/2} = P'_{bw} - P'_c.$$

□

4.5.7. Uwaga:

Twierdzenie 4.5.5 pozwala nam wyznaczyć pole powierzchni części połowy jabłka w oparciu o znajomość wzoru na pole powierzchni półsfery i pole powierzchni bocznej walca:

$$P_{j/2}'' = P_{bw}' - P_c' = \pi^2 R^2 \cos \alpha - 2\pi R^2 \alpha \cos \alpha - 2\pi R^2 + 2\pi R^2 \sin \alpha.$$

4.5.8. Uwaga:

Ostatecznie pole powierzchni połowy jabłka jest sumą pól opisywanych powierzchni:

$$P_{j/2} = P_{j/2}' + P_{j/2}'' = 2\pi R^2 (\sin \alpha + \pi \cos \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

5. Literatura

- [1] A.P. Juskiewicz, *Historia Matematyki*, PWN, Warszawa 1976.
- [2] J.Mioduszewki, *Ciągłość – Szkice z Historii Matematyki*, WSIP, Warszawa 1996.
- [3] *Encyklopedia szkolna. Matematyka*, WSiP, Warszawa 1989.

SPIS TREŚCI:

1. Wstęp	3
2. Zasada Cavalieriego dotycząca brył obrotowych	4
3. Objętości wybranych brył obrotowych	6
3.1. Kula	6
3.2. Paraboloida obrotowa	8
3.3. Hiperboloida jednowłokowa	10
3.4. Hiperboloida dwuwłokowa	12
3.5. Bryła powstała przez obrót wokół cięciwy krótszego łuku okręgu o końcach wspólnych z tą cięciwą – wrzeczono	14

3.6. Bryła powstała przez obrót wokół cięciwy dłuższego łuku okręgu o końcach wspólnych z tą cięciwą – jabłko	17
3.7. Torus	22
4. Pola wybranych powierzchni obrotowych	24
4.1. „Dwa stożki i walec”	24
4.2. Zasada Cavalieriego dotycząca powierzchni obrotowych	26
4.3. Torus	27
4.4. Powierzchnia obrotowa – wrzeciono	30
4.5. Powierzchnia obrotowa – jabłko	32
Literatura	37