

**Uniwersytet Wrocławski**  
**Wydział Matematyki i Informatyki**  
**Instytut Matematyczny**

Anna Grabowiecka

**Teoria pola dla figur wielokątnych na sferze**

Praca magisterska  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2005

# SPIS TREŚCI

<b>SPIS TREŚCI</b> .....	1
<b>WSTĘP</b> .....	2
<b>ROZDZIAŁ 1</b> .....	4
1.1 Definicje.....	4
1.2 Dwukąt sferyczny.....	5
1.3 Trójkąt sferyczny.....	7
1.4 Wielokąt sferyczny.....	9
1.5 Niezależność funkcji $P$ od sposobu rozbicia na trójkąty.....	11
<b>ROZDZIAŁ 2</b> .....	14
2.1 Defekt figury wielokątnej.....	14
2.2 Niesprzeczność teorii pola.....	17
2.3 Niezależność układu aksjomatów: AJ, AS, AM, AP.....	19
<b>ROZDZIAŁ 3</b> .....	25
3.1 Pola figur sferycznych nie będących wielokątami.....	25

## WSTĘP

Niniejsza praca opisuje zagadnienia geometrii sferycznej, która to jest jednym z modeli geometrii nieeuklidesowej. Jako płaszczyznę rozumiemy tu sferę, proste to okręgi wielkie na sferze natomiast punkty to punkty na sferze.

Celem tej pracy jest sformułowanie, jak również uzasadnienie, poprawności teorii pola dla figur sferycznych. Opierając się na czterech aksjomatach, których treść przytaczam poniżej, wyprowadzę wzór na pole, najpierw dla dwukątów, następnie dla trójkątów a w końcu dla wielokątów na sferze. Pokażę, że pole dowolnego wielokąta sferycznego jest równe jego defektowi. Po zdefiniowaniu defektu figury wielokątnej, jak również samej figury wielokątnej, pokażę, że pole takiej figury to suma defektów jej trójkątów składowych.

Najważniejszą jednak częścią tej pracy jest analiza wyprowadzonej wcześniej teorii pod kątem niesprzeczności i niezależności wspomnianych już aksjomatów. Ostatni rozdział poświęcony jest figurom innym niż figury wielokątne, a mianowicie czasom sferycznym. Okaże się, że przybliżając pole czasu wielokątami sferycznymi z góry i z dołu, a następnie przechodząc do granicy, uzyskamy dokładną wartość jej pola.

Aksjomaty, na których opiera się teoria dla figur wielokątnych na sferze:

(Tu, jak i w dalszej części pracy, będziemy rozumieć pole jako funkcję  $P$ , która figurom na sferze przyporządkowuje liczby rzeczywiste)

**AM** – aksjomat monotoniczności

*Jeśli figura  $F$  zawiera się w figurze  $G$  to  $P(F) \leq P(G)$*

**AS** – aksjomat addytywności

*Jeśli figury  $F$  i  $G$  nie zachodzą na siebie (czyli nie mają wspólnych punktów wewnętrznych) to mamy zależność  $P(F \cup G) = P(F) + P(G)$*

**AP** – aksjomat przystawania

*Jeśli figury  $F$  i  $G$  są przystające to  $P(F) = P(G)$*

**AJ** – aksjomat jednostki pola

*Pole całej sfery wynosi  $4\pi$*

Sformułuję teraz aksjomat sumy uogólniony dla większej liczby nie zachodzących na siebie figur.

### Uogólnienie AS

*Jeśli figury  $F_1, F_2, \dots, F_n$  parami na siebie nie zachodzą to*  

$$P(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) = P(F_1) + P(F_2) + \dots + P(F_n).$$

Dowód:

Niech  $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ , gdzie  $F_i$  to figury składowe figury  $F$ , parami na siebie nie zachodzące.

Przeprowadzając rozumowanie indukcyjne mamy:

dla  $n = 1$   $P(F_1) = P(F_1)$ , czyli prawda;

dla  $n = 2$  z AS  $P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2)$ .

Zakładam prawdziwość dla  $n$

$$P(F) = P(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) = P(F_1) + P(F_2) + \dots + P(F_n)$$

i pokazuję, że zachodzi dla  $n + 1$ :

$$P(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n \cup F_{n+1}) = P(F \cup F_{n+1}) = P(F) + P(F_{n+1}) = P(F_1) + P(F_2) + \dots + P(F_n) + P(F_{n+1}).$$

Czyli:

$$P(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) = P(F_1) + P(F_2) + \dots + P(F_n)$$

# ROZDZIAŁ 1

W rozdziale tym wyprowadzę wzór na pole wielokąta sferycznego. Po sformułowaniu definicji wyprowadzę wzór na pole dwukąta sferycznego, a następnie na pole trójkąta sferycznego. Korzystając z faktu, że każdy wielokąt można podzielić na skończoną liczbę trójkątów nie zachodzących na siebie, pokażę, że pole dowolnego  $n$  - kąta sferycznego jest równe  $P(W) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n - (n - 2)\pi$ , gdzie  $\alpha_i$  to kąty  $n$  - kąta.

## 1.1 Definicje

W podrozdziale tym sformułuję kilka istotnych dla pracy definicji.

SFERA – zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu będącego środkiem sfery jest stała, równa promieniowi sfery;

OKRĄG WIELKI – okrąg, którego środkiem jest środek sfery a promieniem promień sfery;

ODCINEK SFERYCZNY – część okręgu wielkiego;

PUNKTY ANTYPODYCZNE – dwa różne punkty sfery, które leżą na jednej prostej ze środkiem sfery;

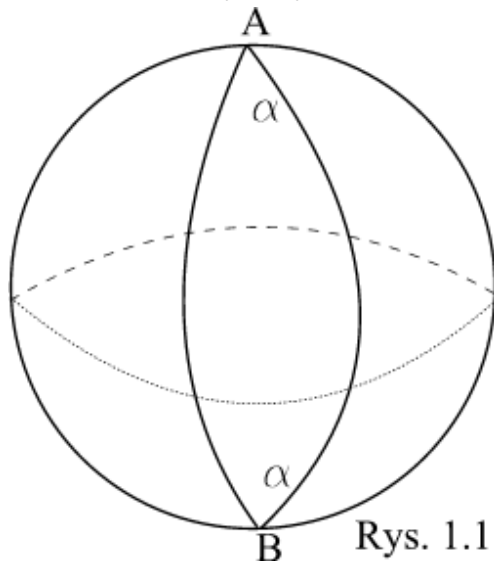
DWUKĄT SFERYCZNY – część sfery ograniczona dwoma odcinkami sferycznymi o wspólnych wierzchołkach będących punktami antypodycznymi;

TRÓJKĄT SFERYCZNY – część sfery ograniczona trzema odcinkami sferycznymi;

WIELOKĄT SFERYCZNY – część sfery ograniczona łamaną zamkniętą bez samoprzecięć, złożoną z odcinków sferycznych.

Teraz przystępujemy do wyprowadzenia z przytoczonych we wstępie aksjomatów wzoru na pole dwukąta sferycznego.

### 1.2 Dwukąt sferyczny



Rys. 1.1

Rozważmy dwukąt o kącie  $\alpha$  przy wierzchołku A. Zauważmy, że kąt przy wierzchołku A jest równy kątowi przy wierzchołku B. Tu, jak i w dalszej części pracy będziemy oznaczać dwukąt o kącie  $\alpha$  symbolem  $D_\alpha$ .

Korzystając z aksjomatów przytoczonych we wstępie pokażę teraz, że pole dowolnego dwukąta sferycznego  $D_\alpha$  jest równe jego podwojonemu kątowi, tzn.  $P(D_\alpha) = 2\alpha$ .

Rozpatrzmy najpierw takie dwukąty, gdzie  $\alpha$  jest współmierny z  $2\pi$  czyli  $\exists k \in \mathcal{Q}: k\alpha = 2\pi$ .

Rozważmy osobno przypadki, gdy  $k \in \mathcal{Z}$  oraz gdy  $k \in \mathcal{Q}$  ale  $k \notin \mathcal{Z}$ .

a)  $k \in \mathcal{Z}$

Całą sferę można podzielić na  $k$  przystających do siebie dwukątów o kącie  $\alpha$ . Z aksjomatu jednostki wiemy, że pole całej sfery wynosi  $4\pi$ . Pole dwukąta wynosi, zatem:

$$P(D_\alpha) = \frac{4\pi}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad \text{czyli} \quad P(D_\alpha) = \frac{4\pi}{\frac{2\pi}{\alpha}} = 2\alpha.$$

Otrzymujemy stąd, że:

$$P(D_\alpha) = 2\alpha$$

Stąd wniosek, że gdy  $k$  jest całkowite pole dwukąta wynosi  $2\alpha$ .

b)  $k \in \mathcal{Q}$

Zauważmy, że  $k = p + q$ , gdzie  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $q \in \langle 0,1 \rangle$

Mamy:

$$(p + q) \cdot \alpha = 2\pi$$

$$p \cdot \alpha + q \cdot \alpha = 2\pi$$

Wiemy, że pole całej sfery wynosi  $4\pi$ , z AS otrzymujemy:

$$4\pi = p \cdot P(D_\alpha) + P(D_{q\alpha}), \text{ gdzie } D_{q\alpha} \text{ jest dwukątem o kącie } q\alpha.$$

Do przeprowadzenia dalszej części dowodu, potrzebny będzie następujący fakt:

**1.3.1 FAKT POMOCNICZY**

Pole dwukąta  $D_{q\alpha}$ , gdzie  $q \in \mathbb{Q}$  oraz  $q \in \langle 0,1 \rangle$  wynosi:  $P(D_{q\alpha}) = q \cdot P(D_\alpha)$ .

Dowód faktu:

Niech  $q = \frac{l}{n}$ ,  $l, n \in \mathbb{N}$ ,  $l \leq n$ .

Pokażemy najpierw, że  $\frac{1}{n} P(D_\alpha) = P(D_{\frac{\alpha}{n}})$ .

Istnieje podział kąta  $\alpha$  na  $n$  równych części. Z AS mamy:

$$P(D_\alpha) = P(D_{\frac{\alpha}{n}} + \dots + D_{\frac{\alpha}{n}}) = P(D_{\frac{\alpha}{n}}) + \dots + P(D_{\frac{\alpha}{n}}) = nP(D_{\frac{\alpha}{n}})$$

$\underbrace{\text{niezmierny} \dots \text{niezmierny}}_{n \text{ razy}} \quad \underbrace{\text{niezmierny} \dots \text{niezmierny}}_{n \text{ razy}}$

Otrzymujemy stąd równość  $P(D_\alpha) = nP(D_{\frac{\alpha}{n}})$ . Po podzieleniu obydwu stron przez  $n$

otrzymamy:  $\frac{1}{n} P(D_\alpha) = P(D_{\frac{\alpha}{n}})$ . (\*)

Weźmy teraz  $l$  kątów  $\frac{\alpha}{n}$ . Z AS wynika, że:

$$P(D_{\frac{l\alpha}{n}}) = P(D_{\frac{\alpha}{n}} + \dots + D_{\frac{\alpha}{n}}) = P(D_{\frac{\alpha}{n}}) + \dots + P(D_{\frac{\alpha}{n}}) = lP(D_{\frac{\alpha}{n}})$$

$\underbrace{\text{niezmierny} \dots \text{niezmierny}}_{l \text{ razy}} \quad \underbrace{\text{niezmierny} \dots \text{niezmierny}}_{l \text{ razy}}$

Po skorzystaniu z (\*) dostajemy  $\frac{l}{n} P(D_\alpha) = P(D_{\frac{l\alpha}{n}})$ ,

a w ostateczności otrzymujemy, że:

$$P(D_{q\alpha}) = q \cdot P(D_\alpha), \text{ co było do okazania.}$$

c.d. b)

Wracając do rozpoczętego wcześniej dowodu, skorzystamy z powyżej udowodnionego faktu:

$$4\pi = p \cdot P(D_\alpha) + P(D_{q\alpha}) = p \cdot P(D_\alpha) + q \cdot P(D_\alpha) = P(D_\alpha)(p + q) = k \cdot P(D_\alpha),$$

stąd  $P(D_\alpha) = \frac{4\pi}{k}$ , a ponieważ  $k = \frac{2\pi}{\alpha}$  mamy:

**1.3.2 WNIOSEK**

*Dla dwukąta o kącie  $\alpha$  współmiernym z  $2\pi$  mamy:  $P(D_\alpha) = 2\alpha$ .*

Przejdźmy teraz do dwukątów, gdzie  $\alpha$  jest niewspółmierny z  $2\pi$ , czyli  $k = \frac{2\pi}{\alpha} \notin \mathbb{Q}$ .

Weźmy taki kąt  $\beta$ , że  $\beta < \alpha$ ,  $\beta$  współmierny z  $2\pi$  i  $D_\beta \subset D_\alpha$ .

Z AM mamy  $P(D_\beta) < P(D_\alpha)$ , natomiast z wniosku 1.3.1.2 mamy  $2\beta < P(D_\alpha)$ .

Weźmy teraz inny kąt  $\gamma$  taki, że  $\gamma > \alpha$ , oraz  $\gamma$  współmierny z  $2\pi$ .

Wtedy  $D_\alpha \subset D_\gamma$ , więc  $P(D_\alpha) < P(D_\gamma)$ , czyli  $P(D_\alpha) < 2\gamma$ .

Otrzymujemy następujące nierówności:  $2\beta < P(D_\alpha) < 2\gamma$ .

Ponieważ  $\alpha$  można dowolnie przybliżyć z dołu i z góry kątami współmiernymi z  $2\pi$  weźmy dwa następujące ciągi:  $\beta_n \rightarrow \alpha$  z dołu oraz  $\gamma_n \rightarrow \alpha$  z góry takie, że  $\beta_n < \alpha < \gamma_n$ .

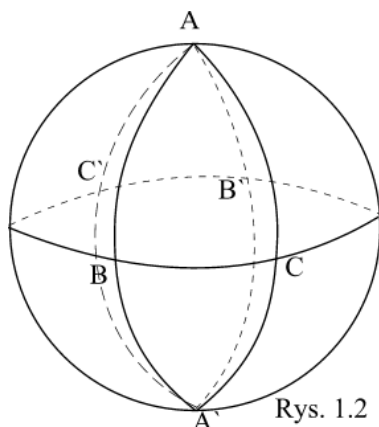
Prawdziwa, zatem jest nierówność  $2\beta_n < P(D_\alpha) < 2\gamma_n$ . Z twierdzenia o trzech ciągach mamy, że skoro  $2\beta_n \rightarrow 2\alpha$  oraz  $2\gamma_n \rightarrow 2\alpha$  to  $P(D_\alpha) = 2\alpha$ . Stąd wniosek:

**1.3.3 WNIOSEK**

*Pole dowolnego dwukąta na sferze o kącie  $\alpha$  wynosi:  $P(D_\alpha) = 2\alpha$*

Korzystając z wyprowadzonego powyżej wzoru na pole dwukąta sferycznego wyprowadzimy teraz wzór na pole trójkąta sferycznego.

**1.3 Trójkąt sferyczny**



$\left. \begin{matrix} ABA'C \\ BCB'A \\ CBC'A \end{matrix} \right\}$  dwukąty sferyczne

Rys. 1.2

Pole trójkąta ABC to część wspólna dwukątów ABA'C, BCB'A, CBC'A. Przyjmijmy następujące oznaczenia dla kątów trójkąta ABC:



$\alpha$  - kąt przy wierzchołku A,

$\beta$  - kąt przy wierzchołku B,

$\gamma$  - kąt przy wierzchołku C.

Zauważmy, że:

$$\triangle AC'B' \equiv \triangle A'CB,$$

$$\triangle BA'C' \equiv \triangle B'AC,$$

$$\triangle CA'B' \equiv \triangle C'AB,$$

a także, że:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

Zauważmy również:

$$P_{\triangle A'BC} = P(D_\alpha) - P_{\triangle ABC},$$

$$P_{\triangle C'BA} = P(D_\gamma) - P_{\triangle ABC}, \quad (**)$$

$$P_{\triangle B'CA} = P(D_\beta) - P_{\triangle ABC}.$$

Mamy stąd:  $4\pi = 2(P_{\triangle ABC} + P_{\triangle A'BC} + P_{\triangle B'CA} + P_{\triangle C'BA})$ .

Korzystając z równości oznaczonych (\*\*), mamy:

$$4\pi = 2(P_{\triangle ABC} + P(D_\alpha) - P_{\triangle ABC} + P(D_\beta) - P_{\triangle ABC} + P(D_\gamma) - P_{\triangle ABC}).$$

Ponieważ pole dwukąta sferycznego jest równe jego podwojonemu kątowi, mamy:

$$2\pi = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2P_{\triangle ABC}.$$

A stąd wyliczymy, że pole trójkąta sferycznego wynosi:

$$P_{\triangle ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

1.3.4 Defektem w trójkącie o kątach  $\alpha, \beta, \gamma$  nazywamy liczbę

$$\Delta(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

### 1.3.5 WNIOSEK

*Pole trójkąta sferycznego jest równe jego defektowi,  $P(T) = \Delta(T)$ , czyli*

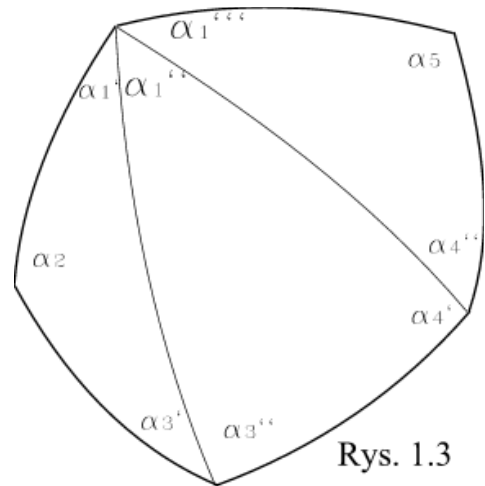
$$P(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Kolejną ważną figurą na sferze jest wielokąt sferyczny, wyprowadzę więc na podstawie wcześniejszych wniosków wzór na jego pole.

## 1.4 Wielokąt sferyczny

Wielokąt sferyczny wypukły – wielokąt, który znajduje się po jednej stronie każdego wielkiego okręgu zawierającego bok tego wielokąta.

Każdy wypukły wielokąt sferyczny można podzielić na skończoną liczbę trójkątów sferycznych, łącząc jeden z wierzchołków, z każdym przeciwległym wierzchołkiem odcinkiem sferycznym. Pole takiego wielokąta, z AS i jego uogólnienia będzie, zatem równe sumie pól tych trójkątów.



Rys. 1.3

Dla dowolnego  $n -$  kąta sferycznego wypukłego otrzymamy w ten sposób  $n - 2$  trójkątów sferycznych. Podział taki nazywamy *triangulacją*.

Niech  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  będą kątami  $n -$  kąta, natomiast  $\alpha_1', \alpha_1'', \dots, \alpha_1^{(n-2)}$  kąty trójkątów podziału we wspólnym wierzchołku A. Ponadto kąty  $\alpha_3', \alpha_3'', \dots, \alpha_{n-1}', \alpha_{n-1}''$  powstają w wyniku podziału kątów  $\alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$ . Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} \alpha_1' + \dots + \alpha_1^{(n-2)} &= \alpha_1 \\ \alpha_3' + \alpha_3'' &= \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_{n-1}' + \alpha_{n-1}'' &= \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

Z AS mamy:  $P(W_N) = P(T_1) + P(T_2) + \dots + P(T_{N-2})$ .

Pola poszczególnych trójkątów wynoszą:

$$\begin{aligned} P(T_1) &= \alpha_1' + \alpha_2 + \alpha_3' - \pi \\ P(T_2) &= \alpha_1'' + \alpha_3'' + \alpha_4' - \pi \\ \dots \\ P(T_{N-2}) &= \alpha_1^{N-2} + \alpha_{N-1}'' + \alpha_N - \pi, \end{aligned}$$

stąd pole wielokąta, jako suma pól trójkątów składowych wynosi:

$$\begin{aligned} P(W_N) &= \alpha_1' + \alpha_2 + \alpha_3' - \pi + \alpha_1'' + \alpha_3'' + \alpha_4' - \pi + \dots + \alpha_1^{N-2} + \alpha_{N-1}'' + \alpha_N - \pi = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N - (n-2)\pi \end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd, że pole wypukłego  $n -$  kąta sferycznego  $W_n$  wyraża się wzorem:

$$P(W_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - (n-2)\pi .$$

Zauważmy, że suma kątów wewnętrznych  $n -$  kąta wypukłego na płaszczyźnie wynosi  $(n - 2)\pi$ .

Defektem wielokąta nazywać będziemy różnicę między sumą kątów tego wielokąta a  $(n - 2)\pi$ , gdzie  $n$  to liczba kątów wielokąta, i oznaczać będziemy:

$$\Delta(W_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - (n-2)\pi$$

Na podstawie definicji defektu otrzymujemy następujący wniosek:

### 1.3.6 WNIOSEK

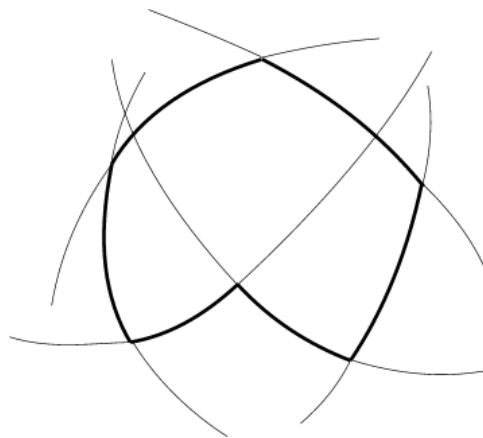
*Pole wypukłego wielokąta sferycznego jest równe jego defektowi*

$$P(W_n) = \Delta(W_n).$$

*Wielokąt, który nie jest wypukły nazywamy wielokątem wklęsłym.*

### 1.3.7 FAKT

*Każdy wielokąt wklęsły można podzielić na skończoną liczbę wielokątów wypukłych poprzez wyznaczanie przedłużeń każdego z boków tego wielokąta.*



Rys. 1.4

Dowód:

Weźmy dowolny wielokąt wklęsły. Istnieje przynajmniej jeden bok tego wielokąta, który po dorysowaniu przedłużeń przetnie inny bok tego wielokąta. Zauważmy, że każdy z boków wielokąta jest częścią jakiegoś okręgu wielkiego. Zatem każdy bok po dorysowaniu okręgu wielkiego, na którym leży przetnie nam sferę na dwie półsfery. Zauważmy, że wielokąty uzyskane przez podział przedłużeniami boków są przekrojami pewnej liczby półsfer. A jak łatwo zauważyć przekrój skończonej liczby półsfer jest wielokątem wypukłym.

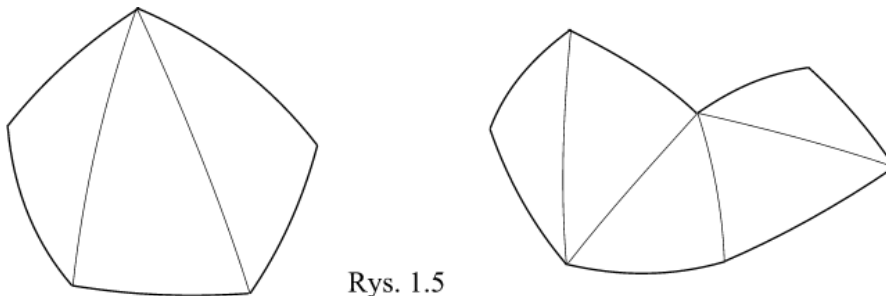
Z 1.5.4.1 i 1.5.1 mamy, że każdy wielokąt wypukły można podzielić na skończoną liczbę trójkątów.

Ważnym faktem jest, że bez względu na sposób rozbicia danego wielokąta na trójkąty składowe, wartość  $P(F)$  pozostanie ta sama. Analizą powyższego zajmę się w kolejnym podrozdziale.

## 1.5 Niezależność funkcji $P$ od sposobu rozbicia na trójkąty

Dowolny wielokąt sferyczny rozbijmy na trójkąty składowe. Spróbujmy policzyć jego pole. Poniższe przykłady sposobów rozbicia ilustrują pewne aspekty ogólnego rozumowania, które zostanie przeprowadzone w dalszej części.

W momencie, gdy wszystkie wierzchołki trójkątów pokrywają się z wierzchołkami wielokąta (rys. 1.5) mamy sytuację analogiczną do 1.5.1, Wiemy stąd, że pole tego wielokąta to suma pól jego trójkątów składowych, czyli de facto, suma ich defektów.



Rys. 1.5

Może się zdarzyć, że któryś z wierzchołków trójkąta będzie leżał na boku wielokąta. Rozważmy czworokąt jak na rysunku 1.6.

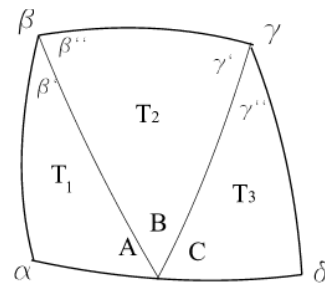
Mamy wówczas:  $P(W) = P(T_1) + P(T_2) + P(T_3)$ .

Korzystając z wniosku 1.4.2 otrzymujemy, że:

$$P(W) = \alpha + \beta' + A - \pi + \beta'' + \gamma' + B - \pi + C + \gamma'' + \delta - \pi$$

Zauważmy, że:  $\beta' + \beta'' = \beta$ ,  $\gamma' + \gamma'' = \gamma$  oraz, że

$$A + B + C = \pi$$



Rys. 1.6

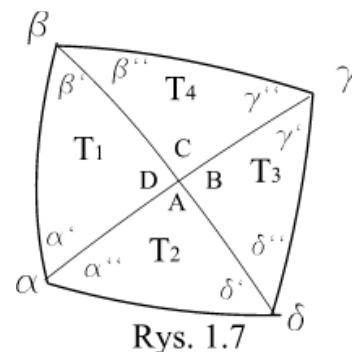
Po podstawieniu otrzymujemy, więc:

$$P(W) = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\pi$$

Może zaistnieć również sytuacja, gdzie któryś z wierzchołków trójkąta składowego będzie leżał wewnątrz wielokąta.

Weźmy czworokąt jak na rysunku 1.7. Jego pole jest wówczas

równe:  $P(W) = P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) + P(T_4)$ , czyli:



Rys. 1.7

$$P(W) = \alpha' + A + \beta' - \pi + \beta'' + B + \gamma' - \pi + \gamma'' + C + \delta' - \pi + \delta'' + D + \alpha'' - \pi$$

Zauważmy, że:

$$\alpha' + \alpha'' = \alpha, \beta' + \beta'' = \beta, \gamma' + \gamma'' = \gamma, \delta' + \delta'' = \delta,$$

oraz, że  $A + B + C + D = 2\pi$ .

Stąd pole naszego wielokąta wynosi:

$$P(W) = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\pi$$

Zwróćmy uwagę, że triangulacja, czyli rozkład wielokąta na trójkąty ma taką cechę, że dwa różne trójkąty są albo rozłączne, albo mają jeden wspólny wierzchołek, albo mają wspólny cały bok.

Ogólnie:

Jeśli w rozkładzie wielokąta na trójkąty występuje  $m$  trójkątów składowych,  $p$  wierzchołków leżących na bokach  $n$  – kąta oraz  $l$  wierzchołków wewnętrznych mamy:

$$P(W_n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n - m\pi + p\pi + 2l\pi, \text{ gdzie } \alpha_i - \text{kąty } n - \text{kąta, } m, p, l \in N$$

$$P(W_n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n - \pi(m - p - 2l). (*)$$

Udowodnię teraz następujący fakt:

**1.3.8 FAKT**

$$m - p - 2l = n - 2, \text{ gdzie } m, n, p \text{ i } l \text{ jak wyżej.}$$

Dowód:

Posłużę się tu wzorem Eulera, który mówi, że jeśli wielokąt jest podzielony na trójkąty w sposób tworzący triangulację i jeśli triangulacja ta posiada  $W$  - wszystkich wierzchołków,  $K$  - wszystkich krawędzi,  $m$  - trójkątów składowych, to zachodzi zależność:  $W - K + m = 1$ .

Łatwo zauważyć, że liczba wszystkich wierzchołków to suma liczby wierzchołków  $n$  – kąta, wierzchołków wewnętrznych i leżących na bokach  $n$  – kąta, czyli:  $W = p + l + n$ .

Policzmy teraz krawędzie.  $3m$  określi nam liczbę krawędzi trójkątów składowych z tym, że wewnętrzne krawędzie tych trójkątów zostaną policzone dwa razy. Jeśli dodamy do tego liczbę boków  $n$  – kąta oraz liczbę wierzchołków leżących na bokach  $n$  – kąta, otrzymamy podwojoną liczbę wszystkich krawędzi. Stąd, po podzieleniu wyniku przez 2 uzyskamy żadaną

$$\text{liczbę: } K = \frac{3m + n + p}{2}.$$

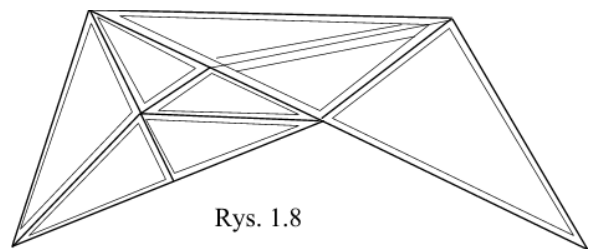
Po podstawieniu  $W$  i  $K$  do wzoru Eulera otrzymamy:

$$p + l + n - \frac{3m + n + p}{2} + m = 1,$$

co po przekształceniu da nam:

$$m - p - 2l = n - 2.$$

Wracając do wzoru (\*), po skorzystaniu z faktu 1.6.1 mamy:



$$P(W_n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n - \pi(n-2).$$

Na mocy definicji 1.5.2 otrzymujemy w ten sposób następujący:

### **1.3.9 WNIOSEK**

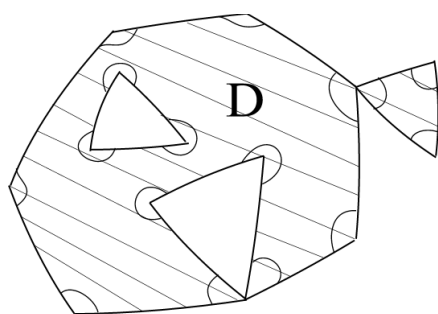
*Pole dowolnego wielokąta sferycznego jest równe jego defektowi  $P(W_n) = \Delta(W_n)$ .*

## ROZDZIAŁ 2

W rozdziale tym zajmę się analizą teorii pola dla figur wielokątnych sferycznych. Na początek zdefiniuję pojęcie figury wielokątnej oraz jej defekt. Następnie zajmę się zdefiniowaniem, bez odwoływania się do pojęcia pola, pewnej funkcji  $L$  przyporządkowującej figurom wielokątnym liczby rzeczywiste. W definicji funkcji  $L$  oprę się na pojęciu defektu figury wielokątnej. W kolejnym kroku wykażę, że funkcja  $L$  spełnia aksjomaty AJ, AS, AM i AP dowodząc tym samym niesprzeczność teorii opartej na tych aksjomatach. Na koniec pokażę, niezależność aksjomatów.

### 2.1 Defekt figury wielokątnej

W przypadku figur, będących wielokątami sferycznymi, defekt jest różnicą pomiędzy sumą kątów figury sferycznej a sumą kątów jej euklidesowego odpowiednika. Rozważmy figurę, która nie jest  $n$  – kątem.



Rys. 2.1

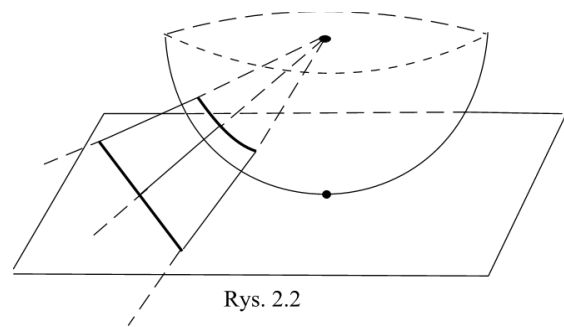
Figura wielokątna – suma nie zachodzących na siebie trójkątów sferycznych.

Ogólnie, można powiedzieć, że jest to taka figura, która zawiera w swoim wnętrzu „wycięte” wielokąty lub, która posiada styczne do siebie w jednym punkcie inne figury wielokątne. Przykładową figurę tego rodzaju ilustruje rys. 2.1. Aby określić defekt takiej figury

sferycznej potrzebujemy znaleźć jej odpowiednik na płaszczyźnie, obliczyć jego kąty i odjąć od sumy kątów figury sferycznej. Przyjmijmy, że bokami takiej figury będą wszystkie odcinki ograniczające tą figurę zarówno z zewnątrz jak i od środka, wierzchołkami wszystkie punkty, w których schodzą się boki tej figury a kątami wszystkie wewnętrzne kąty przy

wierzchołkach (patrz rysunek 2.1). Sumą kątów takiej figury będzie, zatem sumą wszystkich tych kątów.

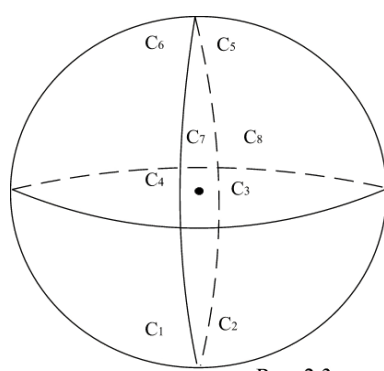
Problem stanowi znalezienie euklidesowego odpowiednika tej figury, którego sumę kątów można by odjąć od sumy kątów naszej figury, aby uzyskać jej defekt. Potrzebujemy, więc znaleźć takie odwzorowanie, które odcinkom sferycznym będącym łukami okręgów wielkich, przyporządkuje odcinki euklidesowe na płaszczyźnie a co za tym idzie figurom wielokątnym sferycznym, figury wielokątne euklidesowe.



Rys. 2.2

Rozważmy odwzorowanie, które punktom półsfery bez brzegu przyporządkowuje ich rzut centralny na płaszczyznę styczną do tej półsfery w punkcie biegunowym. Polega ono na tym, że z punktu będącego środkiem sfery prowadzimy proste przechodzące przez każdy punkt tej półsfery. Punkty będące przecięciem tych prostych ze styczną płaszczyzną to rzuty centralne odpowiednich punktów półsfery. Przy takim odwzorowaniu odcinki, będące na sferze łukami kół wielkich przechodzą na odcinki euklidesowe na płaszczyźnie (rys. 2.2).

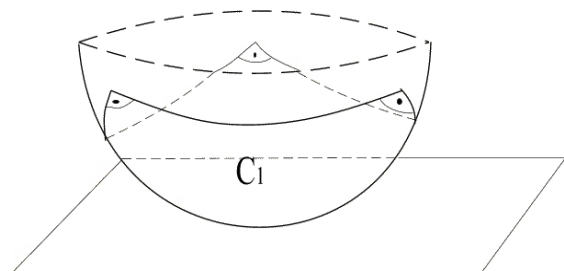
Jeśli rozważana figura wielokątna zawiera się całkowicie w półsferze i nie zahacza o jej brzegi, to możemy wykonać takie odwzorowanie i jej obrazem w rzucie centralnym będzie figura wielokątna na płaszczyźnie. W tym przypadku defekt można określić jako różnicę sumy kątów figury sferycznej i sumy kątów jej odwzorowania na płaszczyźnie. W przypadku, gdy rozważana figura jest większa, wyżej opisane odwzorowanie nie jest wystarczające.



Rys. 2.3

Ustalmy, zatem podział sfery na 8 równych części, tak, że  $S^2 = \bigcup_{i=1}^8 C_i$ , gdzie  $S^2$  to cała sfera (patrz rysunek 2.3). Nasza figura  $W$  podzieli się, zatem, na co najwyżej 8 mniejszych figur wielokątnych, z których każda leży w innej części  $C_i$ . Mamy, że  $W = W_1 \cup \dots \cup W_8$ , gdzie  $W_i \subset C_i$ .

Aby odwzorować figurę wielokątną zawartą w części  $C_1$  umieścimy  $C_1$  na takiej półsferze, która w całości będzie ją zawierać i zrzutujemy ją w wyżej opisany sposób na płaszczyznę. Postępując analogicznie dla każdej kolejnej części, dobierając odpowiednio półsfery, można uzyskać zrzutowany obraz dowolnej figury sferycznej.



Rys. 2.4



Formalnie:

Niech  $\varphi_i$  będzie tym odwzorowaniem, które każdej figurze wielokątnej zawartej całkowicie w  $C_i$  przyporządkowuje jej obraz rzutowany na płaszczyznę:  $\varphi_i : C_i \rightarrow R^2$ . Defekt figury wielokątnej, która całkowicie zawiera się w pewnej  $C_i$  to różnica między sumą kątów figury sferycznej a sumą kątów jej rzutu centralnego. Będziemy to zapisywać jako:  $\Delta(W_i) = S(W_i) - S(\varphi(W_i))$ , gdzie  $S(W)$  to suma kątów figury  $W$ . Definiujemy defekt całej

figury  $W$  jako sumę defektów poszczególnych  $W_i$ , co zapisujemy jako  $L(W) = \sum_{i=1}^8 \Delta(W_i)$ .

Pokażę teraz, że defekt figury wielokątnej zawartej całkowicie w jednej z części sfery jest sumą defektów trójkątów składowych.

### 2.1.1 LEMAT:

*Niech  $W$  będzie figurą wielokątną zawartą w części  $C_i$  i niech  $W = T_1 \cup \dots \cup T_k$  będzie rozkładem tej figury na nie zachodzące na siebie trójkąty. Wówczas*

$$\Delta(W) = \sum_{i=1}^k \Delta(T_i).$$

Dowód:

Rozważmy figurę wielokątną  $W$ . Jej odpowiednik euklidesowy, powstały w wyniku rzutu centralnego  $C_i$  na płaszczyznę rozkłada się na nie zachodzące na siebie trójkąty, będące obrazem odpowiednich sferycznych trójkątów składowych. Z definicji defektu mamy, że  $\Delta(W) = S(W) - S(\varphi(W))$ . Zauważmy, że w rozkładzie  $W$  na trójkąty składowe niektóre z wierzchołków tych trójkątów mogą się zejść na boku tej figury, inne w wierzchołku, jeszcze inne wewnątrz tego wielokąta. W pierwszym przypadku kąty te dadzą w sumie kąt półpełny, w drugim wypełnią kąt naszej figury, natomiast te, które schodzą się wewnątrz dadzą w sumie kąt  $2\pi$ . Załóżmy, że w rozkładzie na trójkąty wystąpi  $n$  tych wierzchołków, które leżą w środku figury i  $m$  tych, które leżą na jej boku. Otrzymujemy stąd, że suma kątów wszystkich trójkątów składowych wynosi:

$$\sum_{i=1}^k S(T_i) = S(W) + n \cdot 2\pi + m \cdot \pi, \text{ a stąd } S(W) = \sum_{i=1}^k S(T_i) - n \cdot 2\pi - m \cdot \pi.$$

Rozważmy teraz sumę kątów odpowiedniej figury euklidesowej, czyli  $\varphi_i(W)$ . Podobnie jak powyżej mamy:

$$\sum_{i=1}^k S(\varphi_i(T_i)) = S(\varphi_i(W)) + n \cdot 2\pi + m \cdot \pi, \quad \text{czyli} \quad S(\varphi_i(W)) = \sum_{i=1}^k S(\varphi_i(T_i)) - n \cdot 2\pi - m \cdot \pi.$$

Ponieważ defekt  $W$  to różnica pomiędzy sumą kątów  $W$  a sumą kątów  $\varphi_i(W)$ , po wykonaniu odejmowania otrzymamy:

$$\Delta(W) = \sum_{i=1}^k S(T_i) - \sum_{i=1}^k S(\varphi_i(T_i)) = \sum_{i=1}^k (S(T_i) - S(\varphi_i(T_i))) = \sum_{i=1}^k \Delta(T_i) \text{ co kończy dowód.}$$

Zanim przejdę do pokazania, że funkcja  $L$  spełnia aksjomaty AJ, AS, AM i AP udowodnię następujący, pomocny później fakt:

**2.1.2 FAKT:**

*Niech  $W$  dowolna figura taka, że  $W = T_1 \cup \dots \cup T_k$ . Jeśli dla każdego  $i$  istnieje  $j$  takie, że*

$$T_i \subset C_j \text{ to } L(W) = \sum_{i=1}^k \Delta(T_i).$$

Dowód:

Z założenia wiemy, że każdy z trójkątów składowych zawarty jest całkowicie w pewnej części  $C_j$ . Z podziału sfery na osiem części wynika, że  $W$  rozłoży się na co najwyżej osiem składowych figur wielokątnych, z których każda zawarta jest w pewnej części  $C_j$ . Rozważmy z osobna każdą z nich i zsumujmy defekty trójkątów składowych na poszczególnych  $C_j$ . Na

mocy lematu 2.1.1 otrzymamy:  $\Delta(W_j) = \sum_{T_i \subset C_j} \Delta(T_i)$ . Z definicji funkcji  $L$  wiemy, że

$$L(W) = \sum_{i=1}^8 \Delta(W_i) \text{ a to z kolei jest równoważne } L(W) = \sum_{i=1}^k \Delta(T_i), \text{ co kończy dowód.}$$

**2.2 Niesprzeczność teorii pola**

Gdy mamy już zdefiniowaną funkcję  $L$  dla dowolnej figury wielokątnej na sferze sprawdzimy, czy  $L$  spełnia aksjomaty zawarte we wstępie.

**2.2.1 AJ**

Chcemy pokazać, że  $L(S^2) = 4\pi$ , gdzie  $S^2$  oznacza całą sferę.

Rozważmy opisany w 2.1 podział sfery na 8 części, będących przystającymi, równobocznymi

trójkątami sferycznymi o kątach równych  $\frac{\pi}{2}$ . Z definicji  $L$  wiemy, że  $L(S^2) = \sum_{i=1}^8 \Delta(C_i)$

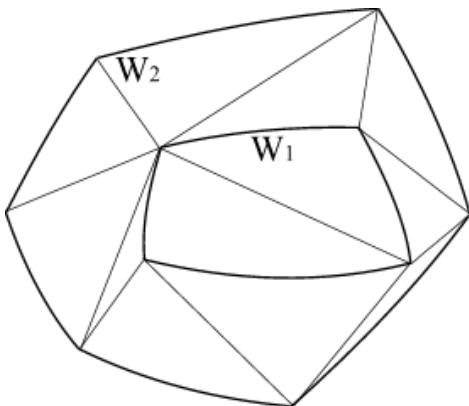
a ponieważ  $C_i$  są przystające  $L(S^2) = 8\Delta(C_i)$ . Czyli mamy:  $L(S^2) = 8\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) = 4\pi$ , więc AJ jest spełniony.

### 2.2.2 AM

Chcę pokazać, że jeśli jedna figura wielokątna zawiera się w drugiej to jej pole jest mniejsze lub równe polu tej drugiej figury.

Mamy dwie figury wielokątne  $W_1$  i  $W_2$  takie, że  $W_1 \subset W_2$ .

Istnieją nie zachodzące na siebie i na  $W_1$  trójkąty takie, że  $W_2 = W_1 \cup T_1 \cup \dots \cup T_n$  oraz, że  $T_i \subset C_j$ .



Rozważmy podział  $W_2$  na nie zachodzące na siebie trójkąty takie, że  $W_2 = W_1 \cup T_1 \cup \dots \cup T_n$ , oraz że  $T_i \subset C_j$ .

Mamy wówczas na mocy faktu 2.1.2, że  $L(W_1) = \Delta(T_{11}) + \dots + \Delta(T_{1k})$

oraz  $L(W_2) = L(W_1) + \Delta(T_1) + \dots + \Delta(T_n)$ .

Ponieważ z geometrii sferycznej wiemy, że defekt dowolnego trójkąta jest wielkością dodatnią, czyli

$\Delta(T_i) > 0$ , mamy stąd nierówność  $L(W_2) \geq L(W_1)$ , czyli AM jest spełniony.

### 2.2.3 AS

Aby pokazać, że AS jest spełniony pokażemy, że z faktu, że  $W = W_1 \cup W_2$ , gdzie  $W_1$  i  $W_2$  to figury wielokątne sferyczne, wynika  $L(W) = L(W_1) + L(W_2)$ . Rozważmy rozkład figury  $W_1$  na trójkąty składowe takie, że każdy z tych trójkątów zawarty jest całkowicie w pewnej  $C_i$ . Podobnie weźmy rozkład figury  $W_2$ . Zauważmy teraz, że suma trójkątów składowych obydwu figur da nam w efekcie  $W_1 \cup W_2$  rozłożone na trójkąty składowe. Mamy więc:

$$\sum_{T_k \subset W_1 \cup W_2} T_k = \sum_{T_m \subset W_1} T_m + \sum_{T_n \subset W_2} T_n. \text{ Z faktu 2.1.2 wiemy, że } L(W_1) = \sum_{T_m \subset W_1} \Delta(T_m) \text{ oraz}$$

$L(W_2) = \sum_{T_n \subset W_2} \Delta(T_n)$  jak również  $L(W_1 \cup W_2) = \sum_{T_k \subset W_1 \cup W_2} \Delta(T_k)$ . Stąd już łatwo zauważyć, że  $L(W) = L(W_1) + L(W_2)$ .

### 2.2.4 AP

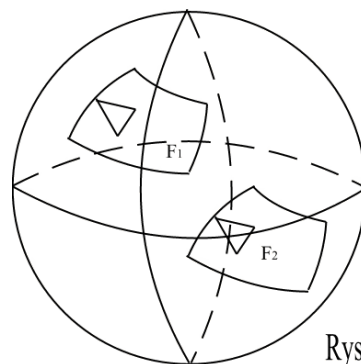
Pokażę, że jeśli dwie figury są przystające to ich pola są równe.

Wiemy, że jeśli  $W_1 \equiv W_2$  to  $W_2$  można rozłożyć na trójkąty w taki sam sposób jak  $W_1$ . Mamy wówczas, że

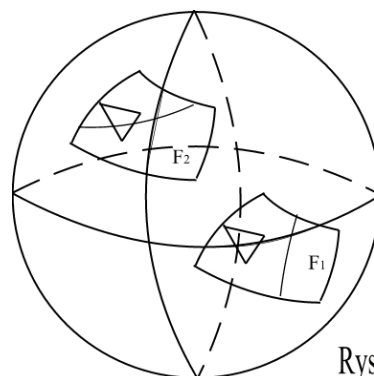
$$\sum_{T_m \subset W_1} \Delta(T_m) = \sum_{T_n \subset W_2} \Delta(T_n)$$

a co za tym idzie, na mocy faktu 2.1.2  $\Delta(W_1) = \Delta(W_2)$ , czyli  $L(W_1) = L(W_2)$ .

Powyższe rozumowanie jest jednak prawdziwe tylko dla takich  $W_1$  i  $W_2$ , które całkowicie zawierają się w jednej spośród części  $C_i$ . W przeciwnym wypadku, krawędzie  $C_i$  mogą nam „rozciąć”  $W_1$  i  $W_2$  na takie figury składowe, które nie będą już figurami przystającymi. Rozważmy zatem izometrię  $l$  sfery, która przekształca  $W_1$  na  $W_2$ . Wyznaczony przez krawędzie  $C_i$  podział figury  $W_1$  przenosimy przy pomocy  $l$  na figurę  $W_2$ , natomiast podział  $W_2$ , przy pomocy  $l^{-1}$  przenosimy na  $W_1$ .



Rys. 2.6



Rys. 2.7

Otrzymamy w ten sposób podział  $W_1$  i  $W_2$  na przystające figury wielokątne, które teraz można rozłożyć na takie trójkąty, z których każdy zawiera się całkowicie w jednej z  $C_i$ . Każdy z trójkątów składowych  $W_1$  ma przystający do niego trójkąt spośród trójkątów składowych  $W_2$ .

na mocy faktu 2.1.2 wiemy, że  $L(W_1) = \sum_{T_k \subset W_1} \Delta(T_k)$  oraz, że  $L(W_2) = \sum_{T_l \subset W_2} \Delta(T_l)$ .

Ponieważ odpowiednie trójkąty  $T_k$  i  $T_l$  są przystające ich defekty, a zatem również suma tych defektów jest sobie równa, stąd  $L(W_1) = L(W_2)$ , tak więc AP jest spełniony.

### 2.2.5 WNIOSEK

*Ponieważ funkcja  $L$  zdefiniowana jest jednoznacznie, spełnia układ aksjomatów AS, AJ, AM, AP wnioskujemy, że teoria pola dla figur wielokątnych na sferze jest niesprzeczna.*

Pokażę teraz, że omawiany układ aksjomatów jest układem niezależnym.

### 2.3 Niezależność układu aksjomatów: AJ, AS, AM, AP

Układ aksjomatów jest niezależny, gdy jest niesprzeczny oraz gdy każdy z aksjomatów jest niezależny od pozostałych. Żeby pokazać niezależność poszczególnych aksjomatów, wskażę funkcje, przyporządkowujące figurom wielokątnym liczby rzeczywiste, dla których wszystkie aksjomaty są spełnione z wyjątkiem jednego.

#### 2.3.1 **Niezależność aksjomatu jednostki.**

Rozważmy funkcję, która zadanej figurze przyporządkuje podwojoną wartość wcześniej zdefiniowanej funkcji  $L$ , czyli  $L_J(F) = 2L(F)$ .

Funkcja ta nie spełnia AJ, gdyż zgodnie z nim pole całej sfery wynosi  $4\pi$ , podstawiając jednak do wzoru funkcji otrzymamy  $L_J(F) = 2L(F) = 2 \cdot 4\pi = 8\pi$ .

Pokażę teraz, że pozostałe aksjomaty są spełnione. Weźmy aksjomat monotoniczności. Wiemy, że gdy figura  $F_1$  zawiera się w figurze  $F_2$  to  $L(F_1) \leq L(F_2)$ . Po pomnożeniu obu stron nierówności przez dwa otrzymamy  $2L(F_1) \leq 2L(F_2)$ , czyli  $L_J(F_1) \leq L_J(F_2)$  więc AM jest spełniony przez funkcję  $L_J$ .

Ponieważ funkcja  $L$  spełnia aksjomat sumy wiemy, że jeśli dwie figury  $F_1$  i  $F_2$  nie zachodzą na siebie to  $L(F_1 \cup F_2) = L(F_1) + L(F_2)$ . Po pomnożeniu obu stron równania przez dwa otrzymamy  $2L(F_1 \cup F_2) = 2L(F_1) + 2L(F_2)$  a to z kolei jest równoważne  $L_J(F_1 \cup F_2) = L_J(F_1) + L_J(F_2)$ , czyli AS jest spełniony.

Aksjomat przystawania mówi, że jeśli dwie figury  $F_1$  i  $F_2$  są przystające to ich pola są równe. Ponieważ funkcja  $L$  spełnia ten aksjomat prawdziwa jest, zatem równość  $2L(F_1) = 2L(F_2)$  a stąd mamy  $L_J(F_1) = L_J(F_2)$ . AP jest więc spełniony.

Stąd wniosek, że AJ jest niezależny od pozostałych aksjomatów.

#### 2.3.2 **Niezależność aksjomatu sumy.**

Weźmy funkcję  $L_s$ , która zadanej figurze przyporządkowuje następującą wartość:

$$L_s(F) = L^2(F) \cdot \frac{1}{4\pi}.$$

Pokażę teraz, że AS nie jest spełniony czyli, że istnieją nie zachodzące na siebie figury  $F_1$  i  $F_2$ , dla których  $L_s(F_1 \cup F_2) \neq L_s(F_1) + L_s(F_2)$ .

Wiemy, że  $L(F_1 \cup F_2) = L(F_1) + L(F_2)$ . Po podniesieniu obu stron do kwadratu i

pomnożeniu przez  $\frac{1}{4\pi}$  otrzymamy:

$$\frac{1}{4\pi} L^2(F_1 \cup F_2) = \frac{1}{4\pi} L^2(F_1) + \frac{1}{4\pi} L^2(F_2) + \frac{1}{4\pi} L(F_1) \cdot L(F_2), \text{ czyli}$$

$$L_s(F_1 \cup F_2) = L_s(F_1) + L_s(F_2) + \frac{1}{4\pi} L(F_1) \cdot L(F_2). \text{ Ponieważ dla figur wielokątnych mamy}$$

$L(F) > 0$  czyli, że wyrażenie  $\frac{1}{4\pi} L(F_1) \cdot L(F_2)$  jest zawsze większe od zera. Stąd wniosek, że:

$$L_s(F_1 \cup F_2) \neq L_s(F_1) + L_s(F_2) \text{ więc AS nie jest spełniony.}$$

W aksjomacie monotoniczności chcemy, żeby z faktu, że  $F_1$  zawiera się w  $F_2$  wynikało, że  $L_s(F_1) \leq L_s(F_2)$ . Jeśli nierówność  $L(F_1) \leq L(F_2)$ , która zachodzi, gdyż funkcja  $L$  spełnia

AM, podniesiemy obustronnie do kwadratu i pomnożymy przez  $\frac{1}{4\pi}$  otrzymamy

$$\frac{1}{4\pi} L^2(F_1) \leq \frac{1}{4\pi} L^2(F_2), \text{ czyli } L_s(F_1) \leq L_s(F_2), \text{ a więc AM jest spełniony.}$$

Aksjomat jednostki jest spełniony, bo  $L_s(S^2) = \frac{1}{4\pi} L^2(S^2) = \frac{1}{4\pi} (4\pi)^2 = 4\pi$ .

W przypadku aksjomatu przystawania wystarczy równość  $L(F_1) = L(F_2)$ , dla przystających

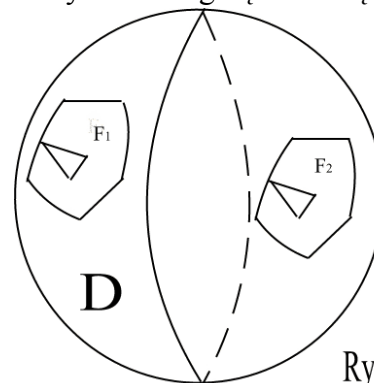
figur  $F_1$  i  $F_2$ , podnieść obustronnie do kwadratu a następnie pomnożyć przez  $\frac{1}{4\pi}$ , co w

$$\text{efekcie da } \frac{1}{4\pi} L^2(F_1) = \frac{1}{4\pi} L^2(F_2) \text{ czyli } L_s(F_1) = L_s(F_2).$$

Stąd wniosek, że AS jest niezależny od pozostałych aksjomatów.

### 2.3.3 Niezależność aksjomatu przystawania

Na początek ustalmy funkcję  $L_p$ . Niech  $D$  będzie półsferyą na sferze. Zdefiniujmy  $L_p$  jako  $L_p(F) = 2L(F \diamond D)$ , gdzie  $L(F) = \Delta(F)$ , natomiast  $F \diamond D$  wyznacza figurę wielokątną zawartą w części wspólnej figury  $F$  i półsfery. Przyjmijmy, że jeśli  $F$  i półsfera nie mają części wspólnej to  $F \diamond D = \emptyset$  oraz, że  $L_p(\emptyset) = 0$ .



Rys. 2.8

Pokażmy teraz, że  $L_p$  nie spełnia AP. Weźmy dwie przystające figury wielokątne  $F_1$  i  $F_2$ , takie, że  $F_1$  jest zawarta w  $D$ , natomiast  $F_2$  jest z nią rozłączna. Mamy, że  $L_p(F_1) = 2L(F_1 \diamond D) = 2\Delta(F_1 \diamond D)$  oraz

$L_p(F_2) = 2L(F_2 \diamond D) = 2L(\emptyset) = 0$ . Ponieważ  $\Delta(F_1 \diamond D) > 0$  stąd wniosek, że  $L_p(F_1) \neq L_p(F_2)$  więc AP nie jest spełniony.

AJ jest spełniony bo:  $L_p(D) = 2L(D \diamond D) = 2\Delta(D) = 4\pi$ .

Pokażmy, że aksjomat monotoniczności jest spełniony przez  $L_p$ . Niech  $F_1$  i  $F_2$  takie, że  $F_1 \subset F_2$ , wtedy również  $F_1 \diamond D \subset F_2 \diamond D$ . Wiemy, że  $L(F_1) \leq L(F_2)$  więc również  $L(F_1 \diamond D) \leq L(F_2 \diamond D)$  a co za tym idzie  $L_p(F_1) \leq L_p(F_2)$ , czyli AM jest spełniony.

Żeby pokazać, że AS jest spełniony rozważmy figurę  $F$ , będącą sumą nie zachodzących na siebie figur wielokątnych  $F_1$  i  $F_2$ . Zauważmy, że prawdziwa jest równość  $(F_1 \cup F_2) \diamond D = (F_1 \diamond D) \cup (F_2 \diamond D)$ .

Zatem:

$$L_p(F) = L_p(F_1 \cup F_2) = 2L((F_1 \cup F_2) \diamond D) = 2L((F_1 \diamond D) \cup (F_2 \diamond D)) = 2L(F_1 \diamond D) + 2L(F_2 \diamond D)$$

. Mamy, że:  $L_p(F_1) = 2L(F_1 \diamond D)$  oraz  $L_p(F_2) = 2L(F_2 \diamond D)$ , więc po dodaniu otrzymamy:  $L_p(F_1) + L_p(F_2) = 2L(F_1 \diamond D) + 2L(F_2 \diamond D)$ , czyli że  $L_p(F_1 \cup F_2) = L_p(F) + L_p(F_2)$  a co za tym idzie AS jest spełniony.

Skoro AJ, AS i AM są spełnione a AP nie dla  $L_p$  więc AP jest niezależny od pozostałych aksjomatów.

### 2.3.4 Niezależność aksjomatu monotoniczności

Aby pokazać niezależność AM wykorzystam istnienie pewnej funkcji  $f: R \rightarrow R$  o następujących własnościach:

$$1. \forall x \in R \quad \forall q \in Q \quad f(qx) = qf(x)$$

$$2. \forall x, y \in R \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$3. \forall q \in Q \quad f(\pi \cdot q) = \pi \cdot q$$

4.  $f$  nie jest tożsamościowa.

Uzasadnienie, że funkcja  $f$  istnieje pomijamy. Opiera się ono na możliwości potraktowania zbioru liczb rzeczywistych jako przestrzeni wektorowej nad ciałem  $Q$ .

Zdefiniujemy teraz funkcję  $H$  jako  $H(W) := f(L(W))$ , gdzie  $W$  jest dowolną figurą wielokątną.

Pokażę, że funkcja  $H$  spełnia AJ:

Jeśli  $S^2$  oznacza całą sferę to  $L(S^2) = 4\pi$ . Mamy, zatem:  $H(S^2) = f(L(S^2)) = f(4\pi)$  a to z własności nr 3 funkcji  $f$  wynosi  $4\pi$ , czyli AJ jest spełniony.

Z faktu, że  $W_1$  i  $W_2$  są nie zachodzącymi na siebie figurami wielokątnymi wynika, że  $L(W_1) + L(W_2) = L(W_1 \cup W_2)$ . Jeśli na równość tą nałożymy funkcję  $f$  otrzymamy  $f(L(W_1) + L(W_2)) = f(L(W_1 \cup W_2))$ . Zauważmy, że na podstawie własności drugiej funkcji  $f$  otrzymamy:  $f(L(W_1)) + f(L(W_2)) = f(L(W_1 \cup W_2))$ . Teraz korzystając z definicji funkcji  $H$  uzyskujemy równość:  $H(W_1) + H(W_2) = H(W_1 \cup W_2)$ , więc również AS jest spełniony.

Uzasadnijmy, że  $H$  spełnia AP. Chcemy, żeby z faktu, że dwie figury wielokątne  $W_1$  i  $W_2$  są przystające wynikało, że  $H(W_1) = H(W_2)$ . Wiemy natomiast, że dla tych figur zachodzi równość  $L(W_1) = L(W_2)$ . Jeśli nałożymy na nią funkcję  $f$  otrzymamy:  $f(L(W_1)) = f(L(W_2))$  a to z definicji funkcji  $H$  oznacza  $H(W_1) = H(W_2)$ .

Pokażę teraz, że  $H$  nie spełnia AM.

Aby to pokazać wykorzystam do tego następujące lematy:

#### 2.3.4.1 LEMAT:

*Istnieją liczby dodatnie  $a$  i  $b$  takie, że  $a < b$  i  $f(a) > f(b)$ .*

Dowód:

Ponieważ funkcja  $f$  nie jest tożsamościowa, istnieje co najmniej jedna wartość  $x \in R$  taka, że  $f(x) \neq x$ . Załóżmy, że  $x > 0$ , w przeciwnym przypadku weźmy  $-x$ . Mamy wówczas z własności pierwszej funkcji  $f$ :  $f(-x) = f((-1)x) = -f(x)$ , czyli w dalszym ciągu  $f(-x) \neq -x$ . Rozpatrzmy teraz dwa przypadki, dla  $x < f(x)$  oraz dla  $f(x) < x$ .

Weźmy  $x < f(x)$ . Wybierzmy dowolnie  $b \in (x, f(x))$  postaci  $b = q \cdot \pi$ , gdzie  $q \in Q$ . Aby

dobrać takie  $b$ , wystarczy wybrać  $q$  z przedziału  $\left(\frac{x}{\pi}, \frac{f(x)}{\pi}\right)$ , mamy wtedy  $\frac{x}{\pi} < q < \frac{f(x)}{\pi}$  i w



konsekwencji  $x < q \cdot \pi < f(x)$ . Skoro  $b = q \cdot \pi$  to z własności 3 funkcji  $f$  wynika, że  $f(q \cdot \pi) = q \cdot \pi$ . Wstawiając do nierówności  $f(q \cdot \pi)$  w miejsce  $q \cdot \pi$  otrzymamy:  $x < f(q \cdot \pi) < f(x)$ . Wstawiając teraz  $a$  w miejsce  $x$  i  $b$  w miejsce  $q \cdot \pi$  otrzymamy, że dla  $a < b$  zachodzi nierówność  $f(a) > f(b)$ .

Rozważmy przypadek, gdy  $f(x) < x$ . Wybierzmy  $b \in (f(x), x)$  postaci  $b = q \cdot \pi$ , gdzie  $q \in \mathcal{Q}$ . Analogicznie z powyższym rozumowaniem otrzymamy nierówność:  $x > q \cdot \pi > f(x)$  a następnie:  $x > f(q \cdot \pi) > f(x)$ . Wstawiając  $a$  w miejsce  $x$  i  $b$  w miejsce  $q \cdot \pi$  otrzymamy, że dla  $a > b$  zachodzi nierówność  $f(a) < f(b)$ , co kończy dowód lematu 2.3.4.1.

**2.3.4.2 LEMAT:**

*Istnieją dodatnie  $a'$  i  $b'$ , że  $a' < b' < \frac{\pi}{2}$  oraz  $f(a') > f(b')$ .*

Dowód:

Rozważmy liczby  $a$  i  $b$  jak w lemacie 2.3.4.1. Weźmy  $a' = \frac{a}{n}$ ,  $b' = \frac{b}{n}$ , i zauważmy, że jeśli

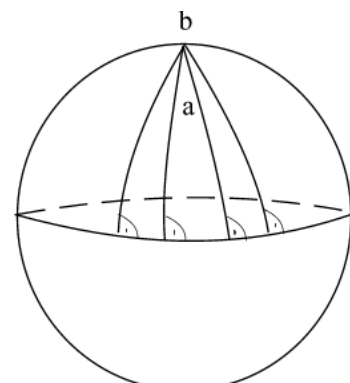
$n$  jest dostatecznie dużą liczbą naturalną to  $a' < b' < \frac{\pi}{2}$ . Mamy też, z własności 1 funkcji  $f$ , że

$f(a') = f(\frac{a}{n}) = \frac{1}{n} f(a)$  oraz  $f(b') = f(\frac{b}{n}) = \frac{1}{n} f(b)$ . Skoro  $f(a) > f(b)$  (zgodnie z tezą

lematu 2.3.4.1), to prawdziwa jest też nierówność  $\frac{1}{n} f(a) > \frac{1}{n} f(b)$ , czyli  $f(\frac{a}{n}) > f(\frac{b}{n})$  a to z

kolei znaczy, że  $f(a') > f(b')$ , co kończy dowód lematu 2.3.4.2.

Wracamy do dowodu faktu, że funkcja  $H$  nie spełnia aksjomatu AM. Dla liczb  $a'$  i  $b'$  jak w lemacie 2.3.4.2 dobierzmy teraz figury  $F_{a'}$  i  $F_{b'}$ , żeby  $F_{a'} \subset F_{b'}$  oraz, żeby  $L(F_{a'}) = a'$  i  $L(F_{b'}) = b'$ . Niech  $F_{b'}$  będzie trójkątem sferycznym o kącie  $b'$  i dwóch kątach prostych, jak na rys. 2.12, natomiast  $F_{a'}$  zawartym w nim trójkącie o kącie  $a'$  i również dwóch kątach prostych. Tak dobierzmy  $F_{a'}$  i  $F_{b'}$ , żeby zawierały się w jednej części, np.  $C_I$ . Ponieważ:



Rys. 2.9

$$L(F_{a'}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + a' - \pi = a', \quad L(F_{b'}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + b' - \pi = b' \quad \text{mamy,}$$

że  $H(F_{a'}) = f(L(F_{a'})) = f(a')$  oraz  $H(F_{b'}) = f(L(F_{b'})) = f(b')$  a z tego, że  $f(a') > f(b')$  wynika, że  $H(F_{a'}) > H(F_{b'})$  co przeczy AM.

### **2.3.5 WNIOSEK**

*Skoro każdy z aksjomatów jest niezależny od pozostałych to układ 4 aksjomatów teorii pola dla figur wielokątnych na sferze jest układem niezależnym.*

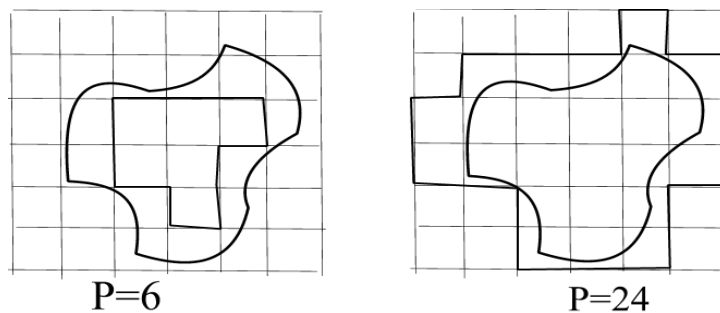
## ROZDZIAŁ 3

W rozdziale tym zajmę się figurami sferycznymi, nie będącymi figurami wielokątnymi a mianowicie czaszami sferycznymi. Pokażę, że pole czaszy można przybliżyć z góry i z dołu wielokątami sferycznymi a przechodząc do granicy uzyskamy miarę pola tej czaszy.

### 3.1 Pola figur sferycznych nie będących wielokątami

Pole dowolnej figury na płaszczyźnie można przybliżyć polem zawartych w niej, bądź całkowicie zawierających w sobie tą figurę kwadratami. Jest to oczywiście metoda przybliżona, gdyż wartość pola będzie wyrażona bądź to z nadmiarem, bądź z niedomiarem.

Przykładowy pomiar ilustruje rys. 3.1



Rys. 3.1

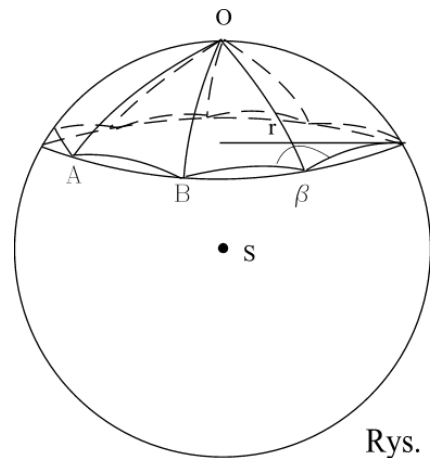
Dokładność tą można zwiększyć rozważając coraz to mniejsze kwadraty, którymi wypełniona jest figura.

Rozważmy analogiczną sytuację na sferze.

Zdefiniujmy figurę zwaną czaszą sferyczną jako wycinek sfery powstały w wyniku przecięcia sfery płaszczyzną, gdzie promień czaszy to promień okręgu będącego przekrojem sfery i owej płaszczyzny.

3.1.1 Przybliżenie pola czaszy z niedomiarem

Rozważmy sferę o promieniu 1 i czaszę na tej sferze o promieniu  $r \neq 1$ . Przybliżmy ją od wewnątrz  $k$  przystającymi trójkątami sferycznymi. Otrzymamy w ten sposób  $k$ -kąć sferyczny, którego wszystkie wierzchołki leżą na obwodzie czaszy. Pole tego wielokąta przybliży nam pole czaszy jest jednak mniejsze od niego. Aby obliczyć pole tego wielokąta potrzebujemy znaleźć

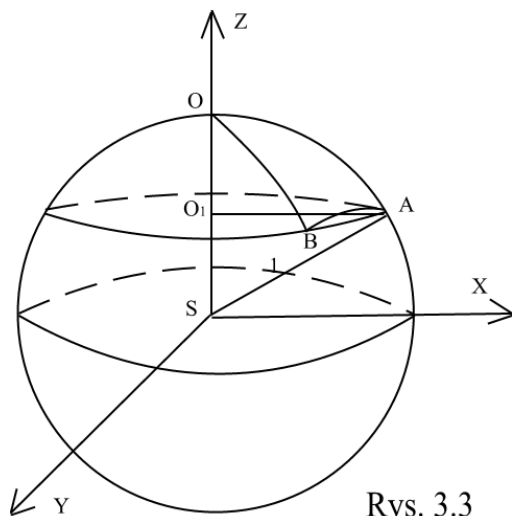


Rys. 3.2

kąć  $\beta$ . Zauważmy, że  $\frac{\beta}{2}$  to kąt dwuścienny pomiędzy

płaszczyzną zawierającą punkty  $S, A, O$  i płaszczyzną zawierającą  $S, B, A$ . Aby znaleźć ten kąt musimy, zatem wyznaczyć współrzędne punktów  $A, B, S, O$ , równania tych płaszczyzn a następnie kąt między nimi.

Umieścimy, więc naszą sferę w prostokątnym układzie współrzędnych tak, aby jej środek był



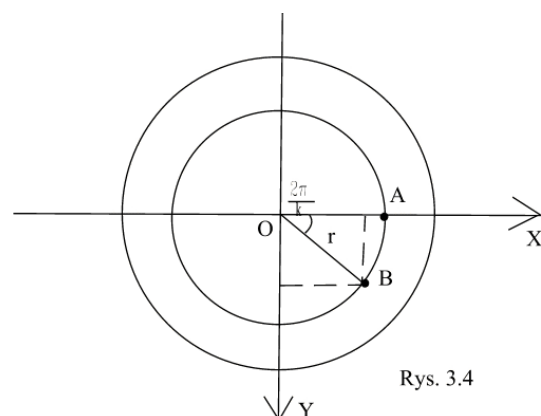
Rys. 3.3

początkiem tego układu. Widać od razu, że  $S=(0,0,0)$ ,  $O=(0,0,1)$ . Punkt  $A$  niech się znajduje prostopadłe nad osią  $OX$ , czyli ma współrzędną  $y_A = 0$ . Aby obliczyć  $z_A$  rozważmy trójkąt  $O_1AS$ . Jest to trójkąt prostokątny, możemy więc skorzystać, z twierdzenia Pitagorasa, żeby obliczyć  $|SO_1| = \sqrt{1-r^2}$ . Stąd  $z_A = \sqrt{1-r^2}$ , natomiast jak łatwo zauważyć  $x_A = r$ . Mamy, więc że  $A=(r, 0, \sqrt{1-r^2})$ .

Punkt  $B$  leży na obwodzie tej samej czaszy sferycznej, więc współrzędna  $z_B = z_A$ . Wiemy, że

miara sferycznego kąta  $AOB$  wynosi  $\frac{2\pi}{k}$ .

Rozważmy rzut prostopadły punktu  $B$  na płaszczyznę  $XOY$  i policzmy  $x_B$  z własności trygonometrycznych trójkąta  $X_BSB'$ . Mamy, że



Rys. 3.4

$\cos \frac{2\pi}{k} = \frac{x_B}{r}$  czyli  $x_B = r \cdot \cos \frac{2\pi}{k}$ . Natomiast  $y_B = r \cdot \sin \frac{2\pi}{k}$ . Stąd współrzędne punktu  $B$  to:

$$B = \left( r \cdot \cos \frac{2\pi}{k}, r \cdot \sin \frac{2\pi}{k}, \sqrt{1-r^2} \right).$$

Możemy teraz wyznaczyć równania płaszczyzn  $Pl_{.SOA}$  i  $Pl_{.SBA}$ . Łatwo zauważyć, że równanie  $Pl_{.SOA}$  to:  $y=0$ . Do wyznaczenia równania  $Pl_{.SBA}$  wykorzystamy następujący wzór znany z geometrii analitycznej:

$$(*) \quad Pl_{. \alpha} : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{gdzie } (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \text{ są}$$

niewspółliniowymi punktami płaszczyzny.

$$Pl_{.SBA} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ r \cdot \cos \frac{2\pi}{k} & r \cdot \sin \frac{2\pi}{k} & \sqrt{1-r^2} \\ r & 0 & \sqrt{1-r^2} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{po obliczeniu tego wyznacznika otrzymujemy}$$

$$\text{równanie: } r \cdot \sin \frac{2\pi}{k} \sqrt{1-r^2} \cdot x + r \sqrt{1-r^2} (1 - \cos \frac{2\pi}{k}) y - r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{k} \cdot z = 0.$$

Kąt między tymi płaszczyznami to kąt między wektorami do nich prostopadłymi, czyli

$$\text{między } u = [0, 1, 0] \text{ a } \vec{v} = \left[ r \cdot \sin \frac{2\pi}{k} \cdot \sqrt{1-r^2}, r \sqrt{1-r^2} (1 - \cos \frac{2\pi}{k}), -r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{k} \right].$$

Do obliczenia tego kąta wykorzystam wzór:  $\cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$  (\*\*).

Po wykonaniu rachunków otrzymujemy, że:

$$\cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\sqrt{(1-r^2) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{k}\right)}}{\sqrt{2-r^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{k}\right)}}.$$

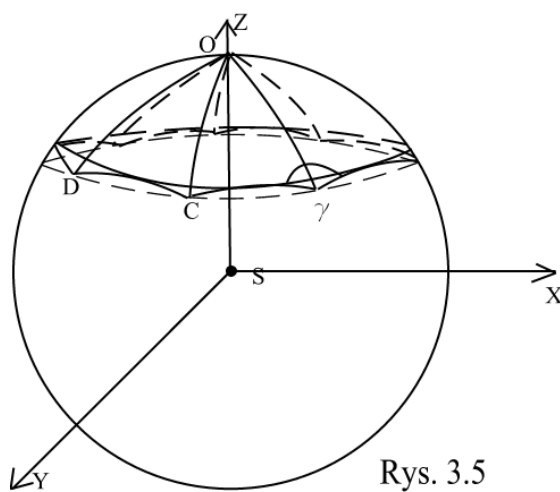
Miara tego kąta to natomiast  $\arccos \sqrt{\frac{(1-r^2) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{k}\right)}{2-r^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{k}\right)}}$ . Kąt  $\beta$ , którego szukamy to

podwojony wyliczony wyżej kąt. Możemy już obliczyć pole naszego  $k$ -kąta, które równe jest jego defektowi (1.6.2):  $P_w = k \cdot \beta - (k-2)\pi$ , co po podstawieniu da nam:

$$P_w = 2k \arccos \sqrt{\frac{(1-r^2)\left(1-\cos\frac{2\pi}{k}\right)}{2-r^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{k}\right)}} - (k-2)\pi.$$

Zauważmy, że jeśli będziemy brać pod uwagę pokrycie coraz to większą liczbą trójkątów dokładność tych obliczeń będzie się zwiększać.

### 3.1.2 Przybliżenie pola czaszy z nadmiarem



Rys. 3.5

Rozważmy teraz pokrycie czaszy  $k$  przystającymi trójkątami, które w swoim wnętrzu będą całkowicie zawierać czaszę. Otrzymamy w ten sposób  $k$  – kąt sferyczny, którego pole będzie przybliżało pole czaszy, będzie jednak od niej większe. Aby obliczyć pole tego wielokąta musimy znaleźć kąt  $\gamma$ , do tego potrzebujemy znać współrzędne dwóch sąsiadujących ze sobą wierzchołków  $k$  – kąta.

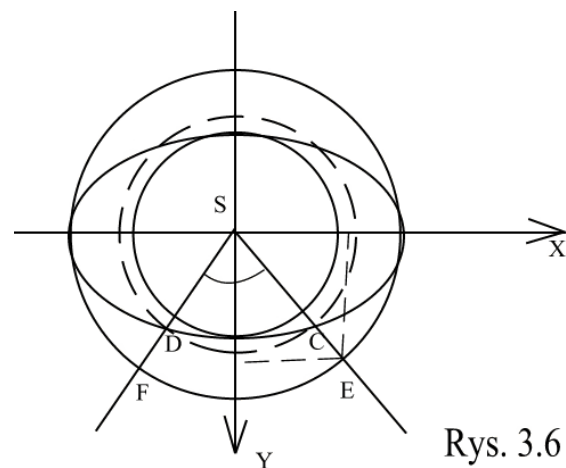
Umieścimy punkty  $C$  i  $D$  symetrycznie względem osi  $OY$  i rozważmy rzut sfery na płaszczyznę  $XOY$ . Wierzchołki  $k$  – kąta leżą na okręgu o promieniu  $r_z$ , natomiast rzut przekroju sfery z płaszczyzną zawierającą  $S, C$  i  $D$  jest elipsą o osi dużej równej

2 i osi małej równej  $2r$ . Równanie takiej elipsy to:  $x^2 + \frac{y^2}{r^2} = 1$ .

Punkty  $C$  i  $D$  leżą na przecięciu tej elipsy z okręgiem o środku

w punkcie  $S$  i promieniu  $r_z$ . Wiemy, że  $\angle CSD = \frac{2\pi}{k}$ .

Rozważmy półproste  $SE$  i  $SF$  zawierające odpowiednio punkty  $C$  i  $D$ . Punkty  $E$  i  $F$  leżą na okręgu o promieniu 1, obliczmy ich



Rys. 3.6

współrzędne:  $\frac{x_E}{1} = \sin \frac{2\pi}{k}$ , czyli  $x_E = \sin \frac{\pi}{k}$ . Ponieważ  $E$  i  $F$  umieściliśmy symetrycznie

względem osi OY, zatem  $x_F = -\sin \frac{\pi}{k}$ . Jak łatwo obliczyć  $y_E = \cos \frac{\pi}{k}$  a z kolei  $y_F = y_E$ .

Mamy stąd:  $E = (\sin \frac{\pi}{k}, \cos \frac{\pi}{k})$ ,  $F = (-\sin \frac{\pi}{k}, \cos \frac{\pi}{k})$ . Proste przechodzące przez SE i SF to

odpowiednio  $y_1 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k} \cdot x_1$  oraz  $y_2 = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{k} \cdot x_2$ . Punkty przecięcia tych prostych z „dolną”

częścią elipsy to:  $C = \left( \sqrt{\frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}}}, \sqrt{\frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k} \right)$  oraz

$$D = \left( -\sqrt{\frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}}}, \sqrt{\frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k} \right).$$

Aby ustalić współrzędne  $z_C$  i  $z_D$  obliczmy promień okręgu, na którym leżą, czyli  $r_z$ :

$$r_z = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}} + \frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}} (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k})}.$$

Do wyliczenia  $z_C$  i  $z_D$  rozważmy trójkąt  $SO_2C$  i z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy:

$$z_C = \sqrt{1 - \frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}\right)} = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k} (1 - r^2)}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}}}.$$

Mając już wszystkie współrzędne punktów  $C$  i  $D$  napiszmy równania  $Pl_{.SCO}$  i  $Pl_{.SCD}$  i obliczmy kąt między nimi. Po zastosowaniu wzoru (\*) otrzymamy równania:

$$Pl_{.SCO}: \sqrt{\frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k} \cdot x - \sqrt{\frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}}} \cdot y = 0,$$

$$Pl_{.SCD}: -2 \frac{r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k}}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}} \sqrt{1 - r^2} \cdot y + 2 \frac{r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k} \cdot z = 0.$$

Wektorami prostopadłymi do tych płaszczyzn są odpowiednio:

$$\vec{u} = \left[ \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k}, -\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}}}, 0 \right] \text{ oraz}$$

$$\vec{v} = \left[ 0, -2 \frac{r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k}}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}} \sqrt{1-r^2}, \frac{2r^2}{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k} \right].$$

Ze wzoru na kosinus kąta między dwoma wektorami (\*\*), po podstawieniu tych wektorów i

wykonaniu uproszczeń otrzymamy:  $\cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k} + 1}}$ . Czyli miara tego kąta to:

$\arccos \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k} + 1}}$ , natomiast  $\mathcal{V}$  to podwojony ten kąt. Pole naszego  $k$  – kąta wynosi:

$$P_z = 2k \cdot \arccos \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{k} + 1}} - (k-2)\pi.$$

### 3.1.3 Pole czasy sferycznej

Zauważmy, że zachodzi nierówność:  $P_w \leq P_c \leq P_z$ .

Policzmy teraz granicę  $P_w$  i  $P_z$  przy  $k$  dążącym do nieskończoności.

Zastosujmy do tego następujące podstawienie:  $x = \frac{2\pi}{k}$ , gdzie  $x$  dąży do zera, otrzymamy

stąd:  $P_w = \frac{4\pi \arccos \sqrt{\frac{(1-r^2)(1-\cos x)}{2-r^2(1-\cos x)}} - 2\pi^2 + 2\pi x}{x}$ . Aby policzyć  $\lim_{x \rightarrow 0} P_w$  zauważmy, że



$P_w = \frac{f(x)}{x}$ , gdzie  $f(0) = 0$ . Z definicji pochodnej w punkcie wiemy, że jeśli  $f(0) = 0$  to

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ . Po obliczeniu pochodnej funkcji  $f$  w zerze otrzymamy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} P_w = 2\pi(1 - \sqrt{1 - r^2}).$$

Obliczmy teraz granicę przy  $k$  dążący do nieskończoności  $P_z$ . Zastosujmy podstawienie

$x = \frac{\pi}{k}$  i policzmy  $\lim_{x \rightarrow 0} P_z$ . Mamy, że:  $P_z = \frac{2\pi \arccos \sqrt{\frac{1-r^2}{\text{ctg}^2 x + 1}} - \pi^2 + 2\pi x}{x}$ . Niech

$f(x) = 2\pi \arccos \sqrt{\frac{1-r^2}{\text{ctg}^2 x + 1}} - \pi^2 + 2\pi x$ , łatwo policzyć, że  $f(0) = 0$ . Podobnie jak dla  $P_w$

możemy skorzystać z definicji pochodnej w punkcie:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ , ponieważ  $f(0) = 0$ .

Po wykonaniu obliczeń otrzymamy, że  $\lim_{x \rightarrow 0} P_z = 2\pi(1 - \sqrt{1 - r^2})$ .

Korzystając teraz z twierdzenia o trzech ciągach, wnioskujemy, że skoro

$$\lim_{x \rightarrow 0} P_w = 2\pi(1 - \sqrt{1 - r^2}) \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow 0} P_z = 2\pi(1 - \sqrt{1 - r^2}) \text{ to } \lim_{x \rightarrow 0} P_c = 2\pi(1 - \sqrt{1 - r^2}).$$

### 3.1.4 WNIOSK

*Pole czaszy sferycznej wynosi  $P_c = 2\pi(1 - \sqrt{1 - r^2})$ , gdzie  $r$  to promień czaszy.*

Zauważmy, że  $1 - \sqrt{1 - r^2}$  to za razem wysokość czaszy  $h$ , można więc też określić pole czaszy jako  $P_c = 2\pi h$