Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Teresa Majcher

Aksjomat monotoniczności w teorii pola figur wielokątnych.

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2005

Oświadczam, że pracę magisterską wykonałam samodzielnie i zgłaszam ją do oceny.

Data .... Podpis autora pracy: ....

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data...Podpis opiekuna pracy: ....

Dziękuję serdecznie panu
prof. dr hab. Jackowi Świątkowskiemu,
za cenne wskazówki udzielone podczas
pisania tej pracy magisterskiej.

Spis treści

Wstęp

O czym jest moja praca magisterska? O tym później, teraz opowiem historię o geometrii i o aksjomacie równoległości.

Nie od razu Rzym zbudowano, mówi stare przysłowie. Nawet w jego dosłownym znaczeniu jest dużo prawdy. Ludzie pierwotni mieszkali w jaskiniach, z czasem musieli nauczyć się budować domy, wykonywać różne pomiary. W budownictwie i miernictwie potrzebne są narzędzia, nie tylko takie jak łopata, czy taśma miernicza. Niezbędnym narzędziem jest zbiór przepisów wykonywania pomiarów tak, by to co zbudowane się nie zawaliło.

W swoich początkach, geometria była właśnie takim zbiorem przepisów. Rozwijała się jednak szybko. W starożytnej Grecji w VI wieku p.n.e. podejmowano pierwsze próby formułowania twierdzeń geometrycznych, pojawiały się także ich pierwsze dowody. W III wieku p.n.e. Euklides napisał *Elementy* – wielkie dzieło, dające solidne podwaliny geometrii. *Elementy* są pierwszą próbą aksjomatycznego ujęcia geometrii tzn. wszystkie twierdzenia są wyprowadzane na podstawie pojęć pierwotnych i aksjomatów. (W rozdziale 0 pisze więcej o teorii aksjomatycznej.)

Jednym z mniej oczywistych aksjomatów sformułowanych przez Euklidesa był piąty postulat o równoległych, który w oryginalnej wersji brzmi następująco: "Jeśli linia prosta padając na dwie linie proste czyni kąty wewnętrzne, po tejże samej stronie położone, mniejsze od dwóch kątów prostych; dwie te linie w odległość nieskończoną przedłużone, zejdą się z tej samej strony, z której kąty są mniejsze od dwóch kątów prostych". (Równoważne stwierdzenie, a bardziej jasne znajduje się we wstępie do rozdziału 3.) Euklides ani razu nie odwołał się do V postulatu aż do 26 twierdzenia I księgi. W dalszych rozważaniach postulat ten używany jest jedynie w ostateczności. Wyodrębnił nawet wszystkie te twierdzenia udowodnione bez V postulatu i nazwał je wraz z wszystkimi aksjomatami potrzebnymi do ich dowodu – geometrią absolutną.

Badania postulatu o równoległych przedstawiają najciekawszy i najgłówniejszy rozdział w historii myśli matematycznej.

Przez wiele wieków próbowano wyprowadzić V postulat z pozostałych aksjomatów podanych przez Euklidesa.

Próbowano też zastąpić go prostszym zdaniem, co często prowadziło do faktów równoważnych V postulatowi.

Korzystano też z dowodu metodą nie wprost, zaprzeczając aksjomatowi równoległości i doszukując się sprzeczności. Niektórzy nawet znajdowali sprzeczność, ale sprzeczność z intuicją przestrzenną, co nie jest wystarczającym dowodem matematycznym. Sprzeczności logicznej jednak nie znaleziono.

Ostateczne rozwiązanie tego problemu było bardzo trudne i trwało to 2000 lat. Dopiero w XIX wieku Łobaczewski i Bolyai niezależnie od siebie stworzyli nową geometrię. Założone zaprzeczenie V postulatu doprowadziło do uzyskania zdumiewającej liczby twierdzeń i nigdzie po drodze nie było sprzeczności logicznej. Te twierdzenia oraz aksjomaty, z których zostały wyprowadzone nazwane zostały geometrią nieeuklidesową.

Okres tworzenia geometrii nieeuklidesowej możemy uznać za zakończony, dopiero gdy pojawi się model tej geometrii. Jednym z łatwiejszych modeli był model Kleina, którego istnienie dowodzi niesprzeczności geometrii nieeuklidesowej. W tym modelu rolę płaszczyzny grało wnętrze koła, a odcinki zawarte w tym kole pełnią rolę prostych. Model Kleina spełnia zaprzeczenie V postulatu i jednocześnie pozostałe aksjomaty geometrii euklidesowej, więc dowodzi on niezależności aksjomatu równoległości od pozostałych.

I tak wygląda historia z aksjomatem równoległości, która trwa do dziś, ponieważ dzięki niemu mamy teraz wiele geometrii nieeuklidesowych, które wciąż się rozwijają.

Niniejsza praca dotyczy teorii pola figur wielokątnych, opartej na czterech aksjomatach – aksjomacie sumy, przystawania, jedności i monotoniczności. Na przykładzie tej teorii, która jest dużo prostsza niż teoria geometrii euklidesowej wyprowadzimy przykładowy, systematyczny wywód teorii oparty na systemie aksjomatycznym. Spośród czterech aksjomatów teorii pola, szczególne miejsce w tej pracy zajmuje aksjomat monotoniczności i jego rola jaką pełni w teorii pola figur wielokątnych. Główne wytyczone cele to: wyprowadzenie tych własności, które można wyprowadzić z pozostałych aksjomatów oprócz aksjomatu monotoniczności, sformułowanie stwierdzeń równoważnych z aksjomatem monotoniczności, wyprowadzenie kilku własności z zaprzeczonego aksjomatu monotoniczności i pozostałych aksjomatów oraz udowodnienie niezależności aksjomatu monotoniczności.

W bardzo podobny sposób, w jaki przebiegały badania nad V postulatem, powstaną cztery kolejne rozdziały.

Przez analogie z absolutną geometrią Euklidesa w pierwszym rozdziale wyprowadzonych zostanie kilkanaście własności, które wynikają z wszystkich aksjomatów teorii pola bez aksjomatu monotoniczności.

W drugim rozdziale podana będzie nowa definicja równoważności stwierdzenia z aksjomatem w obecności pozostałych aksjomatów układu. Zamiast zastępować aksjomat monotoniczności prostszym zdaniem, zostaną podane dwa stwierdzenia równoważne aksjomatowi monotoniczności w obecności pozostałych aksjomatów teorii pola.

Następnym etapem w badaniu aksjomatu równoległości były próby dowodzenia go nie wprost. Podobnie w trzecim rozdziale zaprzeczając aksjomatowi monotoniczności w rezultacie otrzymamy stwierdzenia zaskakujące i sprzeczne z intuicją, ale nie logicznie sprzeczne.

Ostatni etap, to zbudowanie modelu – funkcji spełniającej zaprzeczony aksjomat równoległości i pozostałe aksjomaty geometrii euklidesowej. W przypadku aksjomatu równoległości takim modelem jest geometria hiperboliczna, a w rozdziale czwartym zastanie skonstruowana funkcja spełniająca zaprzeczenie aksjomatu monotoniczności i pozostałe aksjomaty teorii pola figur wielokątnych, czyli AJ, AP i AS.

Praca zawiera ponadto rozdział piąty z zadaniami i dodatek, w którym uzasadnione jest istnienie funkcji f potrzebnej w dowodzie niezależności aksjomatu monotoniczności oraz funkcji f_l, za pomocą której dowodzi się, że niektórych własności nie można wyprowadzić korzystając jedynie z aksjomatów sumy, przystawania i jedności.

Rozdział 0
Wprowadzenie – aksjomatyczna teoria pola figur wielokątnych

W tym rozdziale znajdziemy definicje figury wielokątnej, figur wielokątnych niezachodzących na siebie oraz różnicy figur wielokątnych. W kolejnych rozdziałach wielokrotnie będziemy korzystali z tych definicji.

Przedstawimy aksjomaty teorii pola dla figur wielokątnych, do których będziemy się odwoływali w każdym rozdziale i w każdym dowodzie.

Na zakończenie opowiemy krótko o teorii aksjomatycznej, ponieważ cała praca jest ściśle związana z aksjomatyczną teorią pola dla wielokątów, zwaną geometrią euklidesową.

Zacznijmy od definicji związanych z pojęciem figury wielokątnej.

Definicja 0.1. Figurą wielokątną nazwiemy każdą figurę na płaszczyźnie dającą się przedstawić jako suma skończonej liczby niezachodzących na siebie trójkątów.

Definicja 0.2. Dwie figury wielokątne nie zachodzą na siebie, jeśli nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.

Definicja 0.3. Różnica figur wielokątnych $P - F$ to figura wielokątna powstała przez wzięcie różnicy zbiorów $P \setminus F$ i dołączenie punktów brzegu.

0.4. Aksjomaty teorii pola figur wielokątnych.

<u>Aksjomat monotoniczności</u>, AM
Jeśli figura wielokątna F zawiera się w figurze wielokątnej G, to $P(F) \leq P(G)$.

<u>Aksjomat sumy</u>, AS
Jeśli figury wielokątne F i G nie zachodzą na siebie, to mamy zależność
$P(F \cup G) = P(F) + P(G)$.

<u>Aksjomat przystawania</u>, AP
Jeśli figury wielokątne F i G są przystające, to $P(F) = P(G)$.

<u>Aksjomat jedności</u>, AJ
Pole kwadratu o boku 1 wynosi 1.

0.5. Teoria aksjomatyczna.

Teoria aksjomatyczna jest to teoria, w której wszystkie twierdzenia wyprowadza się z aksjomatów tej teorii. Budowę teorii aksjomatycznej rozpoczyna się od wyboru pojęć pierwotnych teorii, tzn. pojęć, których się w niej nie definiuje. Następnie formułuje się zdania opisujące własności tych pojęć i uznaje się je bez dowodu za twierdzenia teorii. Zdania te nazywa się aksjomatami teorii.

Od układu oczekuje się niesprzeczności i niezależności. Układ aksjomatów jest niesprzeczny, jeśli z tych aksjomatów nie da się wyprowadzić dwóch stwierdzeń ze sobą sprzecznych. Układ aksjomatów jest niezależny, gdy każdy aksjomat jest niezależny od pozostałych. Niezależność aksjomatu od pozostałych aksjomatów układu polega na tym, że nie można go wyprowadzić logicznym rozumowaniem z tych aksjomatów.

Za pomocą logicznego wnioskowania, zwanego dowodem, z aksjomatów wyprowadza się wszystkie dalsze twierdzenia teorii.

Każda współczesna teoria matematyczna jest teorią aksjomatyczną. Pierwszy znany układ teorii aksjomatycznej jest zawarty w *Elementach* Euklidesa, którego uważa się za twórcę tzw. metody aksjomatycznej. Metodę tę zaakceptowano, a nawet uznano za obowiązujący kanon w matematyce dopiero w końcu XIX wieku.

Podstawową zaletą teorii aksjomatycznej jest wyraźne wymienienie jej założeń (aksjomatów). Konsekwencją uznania tych założeń za słuszne jest uznanie za słuszne wszystkich wniosków z nich wynikających, a więc wszystkich twierdzeń rozpatrywanej teorii. Jeśli twierdzenia te prowadzą do sprzeczności, to przyczyny tego tkwią w przyjętym układzie aksjomatów.

Rozdział 1
„Absolutna" teoria pola figur wielokątnych, czyli jakie własności pola można wyprowadzić bez korzystania z aksjomatu monotoniczności

Ważną własnością systemu aksjomatycznego jest niezależność aksjomatów. Budując teorię aksjomatyczną czasem zdarza się taki aksjomat, którego niezależność jest bardzo trudno udowodnić. Takim aksjomatem okazał się aksjomat równoległości (zwany też aksjomatem Euklidesa), którego niezależność badano bezowocnie aż 2000 lat.
Euklides nie udowodnił niezależności aksjomatu równoległości, dlatego najpierw zbudował teorię opartą na wszystkich aksjomatach bez aksjomatu równoległości i nazwał ją geometrią absolutną. Chciał pokazać, jaką część teorii opartej na wszystkich aksjomatach jest w stanie wyprowadzić bez odwoływania się do aksjomatu równoległości.

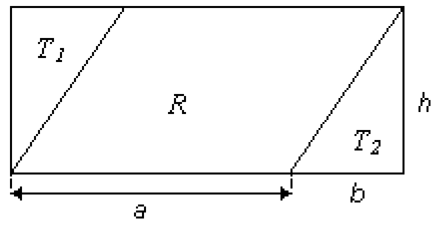
Podobnie jest w naszym przypadku, gdy rozpatrujemy aksjomaty teorii pola. O ile dowody niezależności aksjomatów sumy, jedności czy przystawania są w miarę łatwe, okazuje się, że bardzo trudno jest udowodnić niezależność aksjomatu monotoniczności, dlatego w tym rozdziale zajmiemy się tylko tymi własnościami pola, które dadzą się wyprowadzić, gdy korzystamy jedynie z aksjomatu sumy, przystawania i jednostki pola. Te trzy aksjomaty wraz ze wszystkimi własnościami z nich wynikającymi nazwijmy „absolutną" teorią pola figur wielokątnych. Jest ona pewnym odzwierciedleniem tej części teorii pola figur wielokątnych, jaką jesteśmy w stanie wyprowadzić bez korzystania z aksjomatu monotoniczności.
Własność 1.1. Jeśli figury $F_1, F_2, \ldots, F_m$ parami na siebie nie zachodzą, to

(1.1.1) $$P(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m) = P(F_1) + P(F_2) + \ldots + P(F_m).$$

Dowód: Ta własność jest uogólnieniem aksjomatu sumy i wyprowadza się ją z tego aksjomatu przy pomocy indukcji.

■

Własność 1.2. Pole równoległoboku R o podstawie a i wysokości h jest równe polu prostokąta P_1 o bokach a oraz h.



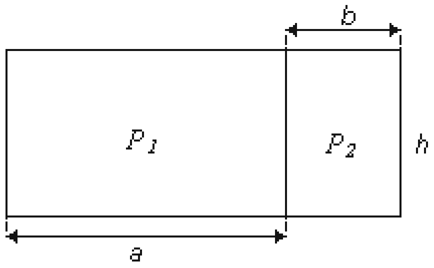
rys. 1

Dowód: Na rys. 1 możemy zauważyć prostokąt $P = R \cup T_1 \cup T_2$ o bokach $a + b$, h, równoległobok R o podstawie a i wysokości h oraz przystające trójkąty prostokątne T_1 i T_2.

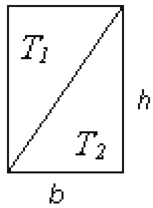
Równoległobok i oba trójkąty nie zachodzą na siebie, dlatego z własności 1.1 otrzymamy równość

(1.2.1) $$P(P) = P(R) + P(T_1) + P(T_2).$$

Z drugiej strony prostokąt P możemy przedstawić jako sumę dwóch niezachodzących na siebie prostokątów P_1 i $P_2 = T_1 \cup T_2$ (rys. 2 i 3).



rys. 2



rys. 3

Stosując aksjomat sumy – raz do prostokąta P_2, – drugi raz do prostokąta P otrzymamy

(1.2.2) $$P\,(P_2) = P\,(T_1) + P\,(T_2)$$

(1.2.3) $$P\,(P) = P\,(P_1) + P\,(P_2)$$

Z (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3) otrzymamy równość

(1.2.4) $$P\,(R) = P\,(P_1).$$

■

Własność 1.3. (uogólnienie własności 1.2). Jeśli dowolne dwa równoległoboki R_1 i R_2 mają jednakowe podstawy a i wysokości h, to mają równe pola.

Dowód: Z własności 1.2 otrzymamy, że pole równoległoboku R_1 jest równe polu prostokąta P o bokach a, h. Również z własności 1.2 wynika, że pole równoległoboku R_2 wynosi tyle samo co pole wspomnianego wcześniej prostokąta P. Zatem pola równoległoboków R_1 i R_2 są sobie równe.

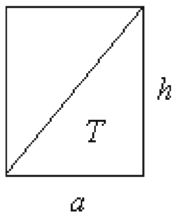
■

Wniosek 1.4. Równoległoboki o jednakowych podstawach i wysokościach mają równe pola.

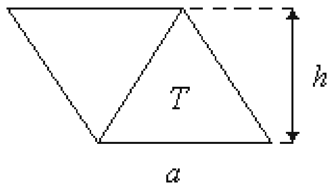
Dowód: Wynika bezpośrednio z własności 1.3 i jest jej uogólnieniem.

■

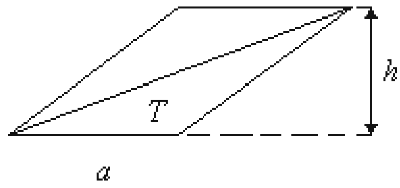
Własność 1.5. Pole trójkąta T o podstawie a i wysokości h jest 2 razy mniejsze od pola równoległoboku R o podstawie a i wysokości h.



rys.4



rys.5



rys.6

Dowód: Rysunki 4, 5, 6 przedstawiają równoległoboki *R* utworzone z różnych rodzajów trójkątów: prostokątnego, ostrokątnego oraz rozwartokątnego. Dla wszystkich tych przypadków zachodzi relacja przystawania: $T \equiv R - T$. Z aksjomatu przystawania wynika, że

(1.5.1) $$P(T) = P(R - T).$$

Powołując się na aksjomat sumy i równość (1.5.1) otrzymamy

(1.5.2) $$P(R) = P(T \cup (R - T)) = P(T) + P(R - T) = 2\,P(T).$$

■

Własność 1.6. (wynikająca z połączenia własności 1.2 i 1.5). Pole dowolnego trójkąta *T* o podstawie *a* i wysokości *h* jest 2 razy mniejsze od pola prostokąta *P* o bokach *a* i *h*.

Dowód: Najpierw skorzystamy z równości (1.2.4), która według naszych oznaczeń przedstawia się następująco:

(1.6.1) $$P(R) = P(P),$$

gdzie *R* oznacza równoległobok o podstawie *a* i wysokości *h*.
Z równości (1.5.2) i (1.6.1) otrzymamy żądaną własność.

■

Własność 1.7. Trójkąty o jednakowych podstawach i równych wysokościach mają równe pola.

Dowód: Niech jednakowe podstawy mają długość *a*, a jednakowe wysokości długość *h*. Wtedy pole każdego takiego trójkąta jest połową pola prostokąta *P* o bokach *a*, *h* (własność 1.6), zatem pola takich trójkątów są sobie równe.

■

Definicja 1.8. Dwie figury wielokątne nazywamy równoważnymi przez rozkład, gdy obie możemy podzielić na jednakową liczbę niezachodzących na siebie wielokątów w ten sposób, że każdy wielokąt jednej figury wielokątnej będzie przystający do odpowiedniego wielokąta drugiej figury wielokątnej (zapis „$Z \cong F$” oznacza, że Z jest równoważne przez rozkład F).

Fakt 1.9. Figury wielokątne równoważne przez rozkład mają równe pola.

Dowód: Niech F i B będą figurami wielokątnymi równoważnymi przez rozkład oraz niech figura wielokątna F składa się z n niezachodzących na siebie wielokątów $F_1, F_2, \ldots, F_n$, natomiast drugą figurę wielokątną B podzielmy w ten sposób na n niezachodzących na siebie wielokątów $B_1, B_2, \ldots, B_n$, by $B_1 \equiv F_1$, $B_2 \equiv F_2$, ..., $B_n \equiv F_n$ (znak „$\equiv$” oznacza przystawanie figur). Z aksjomatu przystawania mamy wtedy

(1.9.1) $$P(B_1) = P(F_1),\ P(B_2) = P(F_2),\ \ldots, P(B_n) = P(F_n).$$

Dzięki (1.9.1) otrzymamy równość

(1.9.2) $$P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = P(F_1) + P(F_2) + \ldots + P(F_n).$$

W ostatnim etapie skorzystamy z własności 1.1 w następujący sposób:

(1.9.3) $$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = \\ &= P(F_1) + P(F_2) + \ldots + P(F_n) = P(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n) = P(F). \end{aligned}$$

■

Własność 1.10. Jeśli $P(W_1) = P(W_2)$, to $P(W_1 - (W_1 \cap W_2)) = P(W_2 - (W_1 \cap W_2))$.

Dowód: Jeśli figury wielokątne W_1 i W_2 mają równe pola i ponadto $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, to figura wielokątna W_1 składa się z dwóch niezachodzących na siebie figur wielokątnych $W_1 \cap W_2$ i $W_1 - (W_1 \cap W_2) = N_1$. Dla ułatwienia wprowadziliśmy nowe oznaczenie N_1. Korzystamy z aksjomatu sumy

(1.10.1) $$P(W_1) = P((W_1 \cap W_2) \cup N_1) = P(W_1 \cap W_2) + P(N_1).$$

Tak samo niezachodzące na siebie figury wielokątne $W_1 \cap W_2$ i $W_2 - (W_1 \cap W_2) = N_2$ składają się w sumie na figurę wielokątną W_2. Również z AS mamy zależność:

(1.10.2) $$P(W_2) = \mathrm{P}((W_1 \cap W_2) \cup N_2) = P(W_1 \cap W_2) + P(N_2).$$

Z założenia tej własności wiemy, że pola W_1 i W_2 są takie same, więc

(1.10.3) $$P(W_1 \cap W_2) + P(N_2) = P(W_1 \cap W_2) + P(N_1).$$

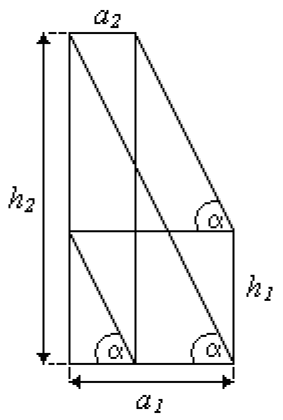
A ostatecznie

(1.10.4) $$P(N_1) = P(N_2).$$

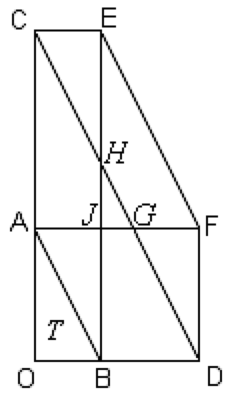
■

Własność 1.11. Prostokąty P_1 i P_2 o wymiarach odpowiednio $a_1 \times h_1$ i $a_2 \times h_2$, dla których zachodzi równość iloczynów $a_1 \cdot h_1 = a_2 \cdot h_2$ mają równe pola.

Dowód: Umieśćmy prostokąty P_1 i P_2 w ten sposób, by miały wspólny jeden kąt prosty, następnie oznaczmy ich boki jak na rys. 7.



rys. 7



rys. 8

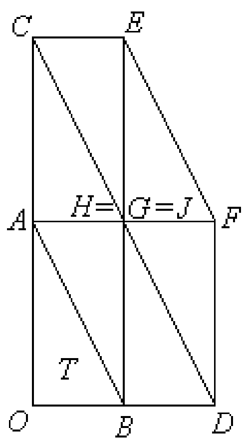
Dla prostokątów z rys. 7 możemy wyliczyć trzy różne ilorazy, które będą sobie równe, mianowicie:

(1.11.1)
$$\frac{h_2}{a_1} = \frac{h_1}{a_2} = \frac{h_2 - h_1}{a_1 - a_2}.$$

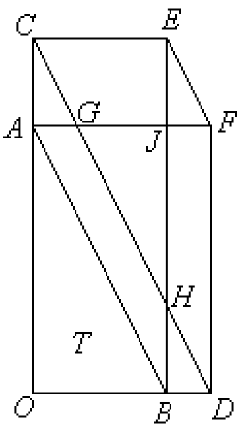
Z równości tych ilorazów wynika równość kątów α zaznaczonych na rys. 7.

Dla przejrzystości utworzyliśmy rysunek nr 8, który przedstawia tę samą sytuację, co rysunek nr 7. Na nowym rysunku zostały wyodrębnione potrzebne w dalszej części dowodu nowe oznaczenia.

Są jeszcze dwa przypadki innego położenia prostokątów przedstawione na rysunkach 9 i 10. Różnią się one położeniem odcinka CD względem punktu J.



rys. 9



rys. 10

Dowód będzie taki sam dla wszystkich trzech przypadków, tzn. przypadków z rys. 8, 9 i 10.

Z tego względu, że odpowiednie ramiona kątów α są do siebie równoległe, możemy stwierdzić, że odcinki AB, CD, EF też są do siebie równoległe.

W kolejnym etapie będziemy chcieli pokazać, że charakterystyczne kawałki jednego prostokąta P_1 o wierzchołkach O, D, F, A są przystające do odpowiednich kawałków prostokąta P_2 wyznaczonego przez wierzchołki O, B, E, C, albo mają równe pola.

Z pewnością trójkąt T o wierzchołkach O, B, A jest częścią wspólną prostokąta P_1 i P_2. Zauważmy dwa równoległoboki: pierwszy R_1 – $BDGA$, następnie drugi R_2 – $ABHC$. Równoległoboki R_1 i R_2 w myśl własności 1.3 mają równe pola (wspólna podstawa AB i wysokość, czyli odległość pomiędzy AB a CD).

Trójkąty T_1 – GDF i T_2 – CHE są przystające na podstawie cechy bkb przystawania trójkątów, bok CE oraz bok EH i kąt prosty pomiędzy nimi. Skorzystajmy z aksjomatu przystawania dla trójkątów T_1 i T_2. Otrzymamy równość pól trójkątów T_1 i T_2.

Trójkąty T i T_1 oraz równoległobok R_1 nie zachodzą na siebie parami i w sumie tworzą prostokąt P_1, z kolei prostokąt P_2 jest zbudowany z trójkątów T i T_2 oraz równoległoboku R_2 w ten sposób, że te trzy figury wielokątne nie zachodzą na siebie parami. Korzystając z uogólnionego aksjomatu sumy (własność 1.1) i wcześniejszych spostrzeżeń otrzymamy

(1.11.2) $$\begin{aligned} \mathrm{P}(P_1) &= P(T \cup T_1 \cup R_1) = P(T) + P(T_1) + P(R_1) = P(T) + P(T_2) + P(R_2) \\ &= P(T \cup T_2 \cup R_2) = P(P_2). \end{aligned}$$

■

Wniosek 1.12. Trójkąty T_1 i T_2 o wymiarach odpowiednio $a_1 \times h_1$ i $a_2 \times h_2$ (podstawa $\times$ wysokość), dla których zachodzi równość $a_1 \cdot h_1 = a_2 \cdot h_2$ mają równe pola.

Dowód: Rozważmy prostokąty P_1 o wymiarach $a_1 \times h_1$ i P_2 o wymiarach $a_2 \times h_2$. Z własności 1.6 mamy

(1.12.1) $$P(T_1) = \frac{1}{2} P(P_1) \quad \text{oraz} \quad P(T_2) = \frac{1}{2} P(P_2).$$

Ponieważ wiemy, że $a_1 \cdot h_1 = a_2 \cdot h_2$ możemy skorzystać z własności 1.11 dzięki której, pola takich prostokątów są równe, tym samym połowy pól też są równe zatem zachodzi

(1.12.2) $$P(T_1) = P(T_2).$$

■

Własność 1.13. Prostokąty P_1 i P_2 o wymiarach odpowiednio $a_1 \times h_1$ i $a_2 \times h_2$, dla których $\frac{a_1 h_1}{a_2 h_2} \in \boldsymbol{Q}$ spełniają $\frac{P(P_1)}{P(P_2)} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2}$.

Dowód: To, że $\frac{a_1 h_1}{a_2 h_2}$ jest liczbą wymierną jest równoważne równaniu $\frac{a_1 h_1}{a_2 h_2} = \frac{c}{d}$, gdzie c, d są liczbami naturalnymi. Załóżmy ponadto, że c i d są względnie pierwsze. Po przekształceniu tego równania uzyskujemy: $a_1 \cdot h_1 \cdot d = c \cdot a_2 \cdot h_2$ (to równanie może oznaczać iloczyn boków dwóch nowych prostokątów N_1 i N_2 podobnie jak we własności 1.11). Niech a_1, $h_1 \cdot d$ będą bokami jednego prostokąta N_1, zaś $c \cdot a_2$, h_2 to boki drugiego prostokąta N_2. Skoro d jest liczbą naturalną, podzielmy prostokąt N_1 na d mniejszych, przystających prostokątów o wymiarach a_1 na h_1, również drugi prostokąt N_2 podzielmy na c mniejszych, przystających prostokątów o wymiarach a_2 na h_2. Korzystając z aksjomatu przystawania i własności 1.1 otrzymujemy

(1.13.1) $$d\,P(P_1) = c\,P(P_2),$$

Zaś po przekształceniu

(1.13.2) $$\frac{P(P_1)}{P(P_2)} = \frac{c}{d} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2}.$$

■

Wniosek 1.14. Jeśli P jest prostokątem o bokach a, b oraz jeśli $a \cdot b \in \boldsymbol{Q}$, to $P(P) = a \cdot b$.

Dowód: Rozważmy prostokąt P i kwadrat jednostkowy K_0, którego boki wynoszą $a_0 = 1$ oraz $b_0 = 1$, dla tych dwóch „prostokątów" zastosujmy własność 1.13

(1.14.1) $$\frac{P(P)}{P(K_0)} = \frac{ab}{a_0 b_0}.$$

Z aksjomatu jedności i po podstawieniu w miejsce $a_0 \cdot b_0$ jedynki otrzymamy

(1.14.2) $$P(P) = a \cdot b.$$

■

Wniosek 1.15. Trójkąty T_1, T_2 o wymiarach odpowiednio $a_1 \times h_1$ i $a_2 \times h_2$ (podstawa × wysokość), dla których $\frac{a_1 h_1}{a_2 h_2} \in \boldsymbol{Q}$ spełniają $\frac{P(T_1)}{P(T_2)} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2}$.

Dowód: Rozważmy prostokąty P_1 o wymiarach $a_1 \times h_1$ i P_2 o wymiarach $a_2 \times h_2$. Z własności 1.13 i 1.6 otrzymamy równość:

(1.15.1) $$\frac{P(P_1)}{P(P_2)} = \frac{2P(T_1)}{2P(T_2)} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2},$$

a po przekształceniu

(1.15.2) $$\frac{P(T_1)}{P(T_2)} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2}.$$

■

Wniosek 1.16. Dla trójkąta T o podstawie a i wysokości h jeśli $a \cdot h \in \boldsymbol{Q}$, to $P(T) = \frac{ah}{2}$.

Dowód: Kwadrat jednostkowy K_0 przecięty przekątną dzieli go na dwa przystające trójkąty prostokątne. Nazwijmy jeden z tych trójkątów T_0, a jego podstawa i wysokość wynoszą odpowiednio $a_0 = 1$ oraz $h_0 = 1$.

Z własności 1.6 i z AJ pole trójkąta T_0 stanowi połowę pola kwadratu K_0 czyli $\frac{1}{2}$.

Z własności 1.15 mamy

(1.16.1)
$$\frac{P(T)}{P(T_0)} = \frac{ah}{a_0 h_0}.$$

Po podstawieniu $\frac{1}{2}$ za $P(T_0)$, zaś 1 za $a_0 \cdot h_0$ otrzymamy

(1.16.2)
$$P(T) = \frac{ah}{2}.$$

■

Wniosek 1.17. Dowolna dodatnia liczba wymierna jest polem pewnego wielokąta.

Dowód: Wynika bezpośrednio z wniosku 1.14. Dowolną dodatnią liczbę wymierną w przedstawmy za pomocą iloczynu liczb wymiernych np. $w = w \cdot 1$. Wtedy pole prostokąta o bokach w, 1 wynosi w.

Wniosek 1.16 również może posłużyć do udowodnienia powyższej własności. Zbudujmy trójkąt, którego długość podstawy jest dowolną liczbą wymierną w zaś wysokość h wynosi 2. Pole takiego trójkąta z własności 1.16 jest równe $\frac{w \cdot 2}{2} = w$.

■

Wniosek 1.18. Istnieją wielokąty o dowolnie dużych i dowolnie małych (tzn. większych od zera ale dowolnie bliskich zeru) polach.

Dowód: Mając już dany konkretny wzór na pole trójkąta (1.16.2), możemy wstawić do niego dowolnie duże, albo dowolnie małe (jednak większe od zera i dowolnie mu bliskie), liczby a, h (oczywiście tak, by $a \cdot h \in \boldsymbol{Q}$), uzyskując w ten sposób dowolnie duże, albo dowolnie małe pole trójkąta T.

Możemy też skorzystać ze wzoru na pole prostokąta o bokach a, b z wniosku 1.14 i dla dowolnych dodatnich a, b takich, że $a \cdot b \in \boldsymbol{Q}$ zbudujemy prostokąt o dowolnie dużych, albo dowolnie małych polach.

■

Definicja 1.19. Figura wielokątna m x Z, to suma m figur przystających do Z parami nie zachodzących na siebie.

Definicja 1.20. Gdy dla dwóch figur wielokątnych F_1 i F_2 znajdziemy taki wielokąt Z, że dla $m, n \in \mathbf{N}$ figura wielokątna m x Z jest równoważna przez rozkład F_1 (ozn. m x $Z \cong F_1$) oraz n x Z jest równoważna przez rozkład F_2 (ozn. n x $Z \cong F_2$), to te figury wielokątne nazwiemy współmiernymi przez rozkład .

Własność 1.21. Wielokąty współmierne przez rozkład mają tak samo współmierne pola, tzn.jeśli $F_1 \cong m$ x Z i $F_2 \cong n$ x Z, to $\dfrac{P(F_1)}{P(F_2)} = \dfrac{m}{n}$.

Dowód: Niech figury wielokątne F_1 i F_2 będą współmierne przez rozkład. W oparciu o definicję 1.20 zapiszmy to w następujący sposób: m x $Z \cong F_1$ i n x $Z \cong F_2$, czyli $P\,(m$ x $Z) = P\,(F_1)$ oraz $P\,(n$ x $Z) = P\,(F_2)$ z faktu 1.9.

Z własności 1.1 definicji 1.19 i 1.20 możemy rozpisać następujące dwie równości.

(1.21.1) $P\,(F_1) = P\,(m \text{ x } Z) = P\,(\underbrace{Z + Z + \dots + Z}_{m}) = \underbrace{P\,(Z) + P\,(Z) + \dots + P\,(Z)}_{m} = m \cdot P\,(Z)$

(1.21.2) $P\,(F_2) = P\,(n \text{ x } Z) = P\,(\underbrace{Z + Z + \dots + Z}_{n}) = \underbrace{P\,(Z) + P\,(Z) + \dots + P\,(Z)}_{n} = n \cdot P\,(Z)$

Z (1.21.1) i (1.21.2) wyliczmy $P\,(Z)$ i przyrównajmy oba wyniki.

(1.21.3) $$P\,(Z) = \frac{1}{m} \cdot P\,(F_1) = \frac{1}{n} \cdot P\,(F_2).$$

Ostatecznie stosunek pól F_1 do F_2 wynosi

(1.21.4) $$\frac{P(F_1)}{P(F_2)} = \frac{m}{n}.$$

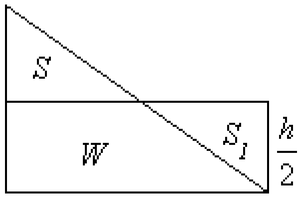
Otrzymany iloraz $\dfrac{m}{n}$ nazwa się czasem współczynnikiem współmierności wielokątów F_1 i F_2 .

■

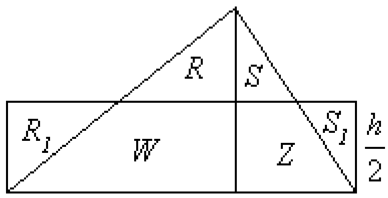
Następne dwie własności mają charakter pomocniczy i są przygotowaniem do dowodu ostatniej ważnej i ciekawej własności dającej się wyprowadzić bez użycia aksjomatu monotoniczności – własności 1.24.

Własność 1.22 Trójkąt T o podstawie a i wysokości h jest równoważny przez rozkład prostokątowi P o wymiarach $a \times \dfrac{h}{2}$.

Dowód:

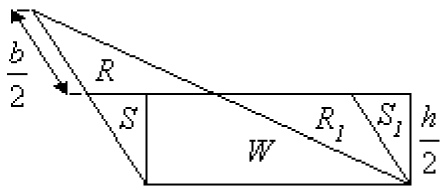


rys. 11



rys. 12

Rys. 11 przedstawiają prostokąt $P = W \cup S_1$ oraz trójkąt prostokątny $T_1 = S \cup W$ z kolei rys. 12 to trójkąt ostrokątny $T_2 = R \cup S \cup W \cup Z$ i prostokąt $P = R_1 \cup W \cup Z \cup S_1$.



rys. 13

Na rys.13 narysowany jest trójkąt rozwartokątny $T_3 = R \cup S \cup W$, równoległobok $K = S \cup W \cup R_1$ i prostokąt $P = W \cup R_1 \cup S_1$.

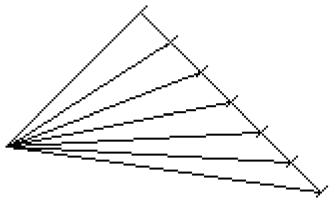
Na powyższych trzech rysunkach wszystkie trójkąty S są przystające do trójkątów S_1 oraz wszystkie trójkąty R są przystające do trójkątów R_1 z cechy kbk przystawania trójkątów (dla boku $\frac{h}{2}$ sąsiadującego z odpowiednimi kątami, we wszystkich przypadkach oprócz trójkątów R i R_1 na rys. 13, dla których zmienimy tylko bok $\frac{h}{2}$ sąsiadujący z odpowiednimi kątami, na bok o długości $\frac{b}{2}$, by i tutaj własność działała). Z twierdzenia Talesa otrzymamy, że odpowiedni bok trójkąta R wynosi $\frac{b}{2}$ o ile zawiera się w boku b trójkąta T_3.

Bezpośrednie odwołanie się do definicji 1.8 i uogólnienie wcześniejszych rozważań prowadzi do stwierdzenia równoważności przez rozkład trójkąta T o podstawie a i wysokości h z prostokątem P o wymiarach $a \times \frac{h}{2}$.

■

Własność 1.23. Dowolny trójkąt T składa się z m trójkątów o jednakowych polach.

Dowolny bok trójkąta T podzielmy na m równych części, następnie połączmy punkty podziału z przeciwległym wierzchołkiem trójkąta T (jak na rys. 14). W ten sposób powstanie m trójkątów parami na siebie niezachodządzących o jednakowych polach (własność 1.7). Ich suma utworzy trójkąt T.



rys. 14

■

Własność 1.24. Jeśli dla pewnej figury wielokątnej W mamy $P(W) = x$, to dla dowolnej dodatniej wymiernej liczby q istnieje taka figura wielokątna W', że $P(W') = q \cdot x$.

Dowód: Podzielmy wielokąt W na parami niezachodzące na siebie trójkąty T_i, w ten sposób, by liczba trójkątów była jak najmniejsza. Rozważmy 2 przypadki.

Pierwszy przypadek

Gdy $q = \frac{n}{m}$ i $n < m$, wtedy każdy z trójkątów T_i dzielimy na m trójkątów T_{i1}, T_{i2}, …, T_{im}, o równych polach (tak jak we własności 1.23), dla których z własności 1.1 zachodzi

(1.24.1) $$m \cdot P(T_{im}) = P(T_i).$$

Następnie spośród trójkątów podziału każdego trójkąta T_i wybieramy T_{i1}, T_{i2}, …, T_{in}, czyli n pojedynczych trójkątów, których pola są równe polu trójkąta T_{im}. Sumę $T_{i1} \cup T_{i2} \cup \ldots \cup T_{in}$ oznaczmy przez T_{ik}. Spełniona jest równość

(1.24.2) $$n \cdot P(T_{im}) = P(T_{ik}).$$

Wybrane w ten sposób wszystkie trójkąty od razu tworzą szukaną figurę wielokątną W', czyli $W' = \bigcup_i T_{ik}$.

Gdy z (1.24.1) wyliczymy $P(T_{im})$ i wstawimy do (1.24.2), to otrzymamy

(1.24.3) $$\frac{n}{m} P(T_i) = P(T_{ik}).$$

Obliczmy pole figury wielokątnej W', dodatkowo korzystając z własności 1.1.

(1.24.4) $P(W') = P(\bigcup_i T_{ik}) = \sum_i P(T_{ik}) = \sum_i \frac{n}{m} P(T_i) = \frac{n}{m} \sum_i P(T_i) = \frac{n}{m} P(\bigcup_i T_i)$ =

$= \frac{n}{m} P(W)$

Drugi przypadek

Gdy $q = \frac{n}{m}$ i $n > m$, wtedy podzielmy każdy trójkąt T_i na m równych części T_{im} (tak jak we własności 1.23), dla których zachodzi

(1.24.5) $$m \cdot P(T_{im}) = P(T_i).$$

Trójkąt T_{im} jest równoważny przez rozkład prostokątowi P_i (zgodnie z własnością 1.22), czyli

(1.24.6) $$P(T_{im}) = P(P_i).$$

Teraz wystarczy wziąć n razy każdy prostokąt P_i i układać jeden na drugim. Dla ułatwienia sumę n prostokątów P_i oznaczmy jako P_{in}. Z własności 1.1 otrzymamy

(1.24.7) $$n \cdot P(P_i) = P(P_{in}).$$

Suma wszystkich prostokątów P_{in} tworzy figurę wielokątną W', czyli $W' = \bigcup_i P_{in}$.

Rozwiązując trzy równania: (1.24.5), (1.24.6) i (1.24.7) otrzymamy zależność

(1.24.8) $$P(P_{in}) = \frac{n}{m} P(T_i).$$

Korzystając z własności 1.1 i wcześniejszej równości (1.24.8), obliczmy pole figury wielokątnej W'.

(1.24.9) $P(W') = P(\bigcup_i P_{in}) = \sum_i P(P_{in}) = \sum_i \frac{n}{m} P(T_i) = \frac{n}{m} \sum_i P(T_i) = \frac{n}{m} P($

$\bigcup_i T_i) = \quad = \frac{n}{m} P(W)$

■

Podsumowanie rozdziału 1

Kończąc pierwszy rozdział wypiszmy jakich własności pola nie wyprowadziliśmy korzystając jedynie z trzech aksjomatów: sumy, przystawania i jedności.

Własność 1A. Pole dowolnego prostokąta o bokach a, b wynosi $a \cdot b$.

Własność 1B. Pole dowolnej figury wielokątnej jest liczbą dodatnią.

Własność 1C. Istnieje taka figura wielokątna, że jej pole jest liczbą niewymierną.

Własność 1D. Dowolna liczba rzeczywista dodatnia jest polem pewnej figury wielokątnej.

Nasuwa się pytanie, czy nie potrafimy odkryć dowodu dla powyższych własności, czy też trzy aksjomaty AJ, AS, AP nie wystarczą by dowieść tych czterech własności. Nad odpowiedzią zastanowimy się w rozdziale 4.

Rozdział 2
Stwierdzenia równoważne z aksjomatem monotoniczności w obecności pozostałych aksjomatów teorii pola.

Do momentu odkrycia geometrii nieeuklidesowej podejmowano wiele prób dowodu V postulatu Euklidesa korzystając z pozostałych aksjomatów teorii. Aby taki dowód był poprawny można korzystać jedynie z pozostałych aksjomatów i z własności z nich wynikających. Dowody, które przeprowadzono zawierały bardzo podobne błędy. Korzystano w nich z tych własności, których nie da się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów. Te niefortunne własności charakteryzują się następującą cechą – wynikają z całego układu aksjomatów i z pozostałych aksjomatów uzupełnionych o tę własność wynika aksjomat równoległości.

Taką zależność stwierdzenia i układu aksjomatów z wyszczególnionym jednym aksjomatem jak wyżej, zdefiniujemy jako równoważność stwierdzenia z danym aksjomatem w obecności pozostałych aksjomatów układu (definicja 2.3).

Warto zobaczyć, jakie stwierdzenia są równoważne z aksjomatem monotoniczności w obecności aksjomatu sumy, przystawania i jedności.

Definicja 2.1. Dwa układy aksjomatów U i W są równoważne wtedy, gdy każdy aksjomat z układu U można wyprowadzić z układu aksjomatów W i na odwrót.

Spostrzeżenie 2.2. Gdy dwa układy aksjomatów A, F_1, F_2, …, F_n i B, F_1, F_2, …, F_n różnią się tylko jednym aksjomatem, a pozostałe mają wspólne, wystarczy udowodnić, że A można wyprowadzić z układu aksjomatów B, F_1, F_2, …, F_n i jednocześnie B wynika z układu aksjomatów A, F_1, F_2, …, F_n, by dwa układy aksjomatów były równoważne.

Definicja 2.3. Niech A_0, A_1, A_2, …, A_n będzie układem aksjomatów pewnej teorii. Stwierdzenie S tej teorii jest równoważne aksjomatowi A_0 w obecności pozostałych aksjomatów A_1, A_2, …, A_n, gdy układy aksjomatów A_0, A_1, A_2, …, A_n oraz S, A_1, A_2, …, A_n są równoważne.

W następnej części tego rozdziału sformułujemy stwierdzenia, o których dowiemy się, że są równoważne aksjomatowi monotoniczności w obecności pozostałych aksjomatów teorii pola. Pierwszym z nich jest poniższe stwierdzenie 2.A.

Stwierdzenie 2.A. Dla każdej figury wielokątnej W, pole $P\,(W)$ jest liczbą nieujemną: $P\,(W) \geq 0$.

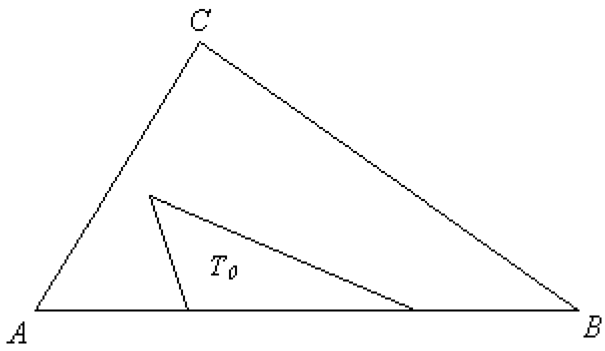
Twierdzenie 2.4. Stwierdzenie 2.A jest równoważne aksjomatowi monotoniczności w obecności pozostałych aksjomatów teorii pola.

Dowód: Dowodzimy równoważności stwierdzenia 2.A z aksjomatem monotoniczności w obecności aksjomatów AJ, AP, AS. Zgodnie z definicją 2.3 i spostrzeżeniem 2.2 pokażemy, że zachodzą dwie implikacje:

<u>1. AJ, AP, AS, AM $\Rightarrow$ stwierdzenie 2.A</u>

Dowolną figurę wielokątną W można podzielić na skończoną sumę parami niezachodzących na siebie trójkątów. Z tej sumy wybierzmy dowolny trójkąt T, którego wierzchołki nazwijmy A, B, C, w nim tak jak na rysunku 15 zawiera się trójkąt T_0 o podstawie i wysokości, które są dodatnimi liczbami wymiernymi.

Aby uzasadnić istnienie trójkąta T_0 zawartego w dowolnym trójkącie T skorzystamy z twierdzenia, że pomiędzy dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi leży liczba wymierna, w szczególności pomiędzy 0 a dowolną liczbą rzeczywistą (długość boku AB, długość wysokości trójkąta T) leży liczba wymierna (odpowiednio podstawa, wysokość trójkąta T_0).



rys. 15

Trójkąt T jest zawarty w figurze wielokątnej W, dlatego z aksjomatu monotoniczności otrzymamy

(2.4.1) $$P(W) \geq P(T).$$

Ponownie skorzystamy z aksjomatu monotoniczności, tym razem dla trójkąta T i T_0 otrzymując

(2.4.2) $$P(T) \geq P(T_0).$$

Z wniosku 1.16 pole trójkąta T_0 wynosi $\frac{ah}{2}$, zatem

(2.4.3) $$P(T_0) \geq 0.$$

Z powyższych trzech nierówności otrzymamy, że dla dowolnej figury wielokątnej W zachodzi nierówność $P(W) \geq 0$.

<u>2. AJ, AP, AS, stwierdzenie 2.A $\Rightarrow$ AM</u>

Na początku załóżmy, że mamy dowolne dwie figury wielokątne W i F takie, że W zawiera się w F. Przedstawmy F jako sumę niezachodzących na siebie dwóch figur wielokątnych W i Y, czyli $F = W \cup Y$.

Następnie skorzystamy z aksjomatu sumy dla wcześniej wspomnianych figur wielokątnych W i Y.

(2.4.4) $$P(F) = P(W \cup Y) = P(W) + P(Y)$$

Teraz potrzebne jest stwierdzenie 2.A, które pozwala nam stwierdzić, że $P\,(Y) \geq 0$. Gdy do $P\,(W)$ dodamy $P\,(Y)$ – liczbę nieujemną, okaże się, że otrzymaliśmy $P\,(W)$ albo coś więcej niż $P\,(W)$. Zapiszmy tę nierówność

(2.4.5) $$P\,(W) + P\,(Y) \;\geq\; P\,(W).$$

Łącząc równość (2.4.4) z nierównością (2.4.5) otrzymamy zależność $P\,(\mathrm{F}) \geq P\,(W)$. Ostatecznie doszliśmy do końcowego wniosku: jeśli dowolne dwie figury wielokątne W i F są takie, że W zawiera się w F, to $P\,(W) \leq P\,(\mathrm{F})$, a jest to dokładnie treść aksjomatu monotoniczności.

■

Sformułujmy jeszcze drugie stwierdzenie, z którego wynika aksjomat monotoniczności, i które ostatecznie okazuje się równoważnym aksjomatowi monotoniczności w obecności pozostałych aksjomatów teorii pola.

Stwierdzenie 2.B. Istnieje figura wielokątna W_0 taka, że jeśli W jest figurą wielokątną i $W_0 \subset W$, to $P\,(W) \geq P\,(W_0)$.

Stwierdzenie to jest słabszą wersją aksjomatu monotoniczności, ponieważ założenie jest słabsze, (nie dotyczy dowolnych figur wielokątnych, z których jedna zawiera się w drugiej, ale mówi o figurach zawierających ustaloną, jedną figurę wielokątną).

Twierdzenie 2.5. Stwierdzenie 2.B jest równoważne aksjomatowi monotoniczności w obecności pozostałych aksjomatów teorii pola.

Dowód: Dowodzimy równoważności stwierdzenia 2.B z aksjomatem monotoniczności w obecności aksjomatów AJ, AP, AS. Pokażemy, że zachodzą dwie implikacje:

<u>1. AJ, AP, AS, AM $\Rightarrow$ stwierdzenie 2.B</u>

Załóżmy, że istnieje figura wielokątna W_0 taka, że $W_0 \subset W$. Dla W_0 zawartego w figurze wielokątnej W możemy skorzystać z aksjomatu monotoniczności i otrzymamy następującą nierówność

(2.5.1) $$P\,(W_0) \;\leq\; P\,(W).$$

<u>2. AJ, AP, AS, stwierdzenie 2.B $\Rightarrow$ AM</u>

Rozważmy dowolne figury wielokątne W_1 i W_2 takie, że $W_1 \subset W_2$. Niech F będzie taką figurą wielokątną, że F i W_1 nie mają wspólnych punktów wewnętrznych i $F \cup W_1 = W_2$. Skorzystamy z aksjomatu sumy

(2.5.2) $$P\,(W_2) = P\,(F \cup W_1) = P\,(F) + P\,(W_1).$$

Dla przejrzystości dowodu utwórzmy jedną „kopie” F' figury wielokątnej F taką, by $F' \equiv F$. Weźmy figurę wielokątną W_0 taką, o której mówi stwierdzenie 2.B. Dołączmy W_0 do figury wielokątnej F' tak, by nie zachodziły na siebie i by ich suma stworzyła nową figurę wielokątną W, (stwierdzenie 2.B. też wspomina m. in. o takiej figurze wielokątnej W), stąd $W_0 \subset W$ i ze stwierdzenia 2.B zachodzi zależność:

$$P(W) \geq P(W_0). \tag{2.5.3}$$

Z drugiej strony $W = F' \cup W_0$. Zapiszmy więc aksjomat sumy dla figur wielokątnych F' i W_0.

$$P(W) = P(F' \cup W_0) = P(F') + P(W_0). \tag{2.5.4}$$

Z równości (2.5.4), nierówności (2.5.3) i aksjomatu przystawania dla F' mamy

$$P(F) \geq 0. \tag{2.5.5}$$

Teza aksjomatu monotoniczności, czyli nierówność $P(W_2) \geq P(W_1)$ powstanie z połączenia nierówności (2.5.5) i równości (2.5.2).

■

Rozdział 3
Teoria pola z zaprzeczonym aksjomatem monotoniczności

Niezależność aksjomatu od pozostałych aksjomatów układu polega na tym, że nie można go wyprowadzić logicznym rozumowaniem z tych aksjomatów, jest to ważna własność teorii aksjomatycznej. W przeciwnym razie, gdy aksjomat jest zależny od pozostałych nie powinien występować w układzie aksjomatów teorii.

W przeciągu wielu stuleci po ogłoszeniu *Elementów* podejmowano niezliczoną ilość prób dowiedzenia niezależności V postulatu Euklidesa od aksjomatów teorii absolutnej. Dowody opierały się również na metodzie nie wprost, polegającej na zaprzeczeniu samego V postulatu albo któregoś ze stwierdzeń, z którego on wynika. W takim wypadku otrzymanie sprzeczności logicznej gwarantuje zależność V postulatu Euklidesa od pozostałych aksjomatów.

Mikołaj Łobaczewski zaprzeczając aksjomatowi równoległości Playfaira (przez punkt nieleżący na danej prostej przechodzi dokładnie jedna prosta jej nieprzecinająca), wyprowadził tak wiele stwierdzeń nie uzyskując sprzeczności logicznej, że ich liczba przerosła liczbę twierdzeń geometrii euklidesowej. W ten sposób powstała nowa geometria zwana geometrią hiperboliczną albo geometrią Łobaczewskiego.

Przez analogie ze sposobem powstawania nowej geometrii, odniesiemy się do zagadnienia niezależności aksjomatu monotoniczności od pozostałych aksjomatów teorii pola i w tym rozdziale wyprowadzimy kilka stwierdzeń będących konsekwencjami zaprzeczenia stwierdzenia 2.A równoważnego aksjomatowi monotoniczności w obecności pozostałych aksjomatów. W dowodach tych nowych stwierdzeń można dodatkowo korzystać z aksjomatu sumy, przystawania i jedności.

Wprowadźmy ogólne oznaczenie $\Pi(a, b)$ na prostokąt o bokach a, b, które będzie obowiązywało tylko w tym rozdziale.

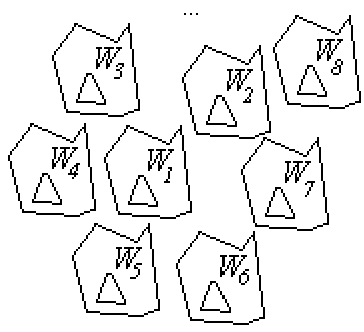
Poniższe stwierdzenie jest zaprzeczeniem stwierdzenia 2.A.

Stwierdzenie 3.A. Istnieje figura wielokątna W taka, że jej pole jest ujemne: $P(W) < 0$.

Kolejne stwierdzenie 3.1 wyprowadzimy z AJ, AS, AP i stwierdzenia 3.A. Dodatkowo możemy korzystać ze wszystkich własności wyprowadzonych w rozdziale 1, ponieważ we wszystkich dowodach w rozdziale pierwszym korzystaliśmy tylko i wyłącznie z trzech aksjomatów AJ, AS, AP.

Stwierdzenie 3.1. Istnieje figura wielokątna U, której pole $P(U) \to -\infty$.

Dowód: Możemy skorzystać z AJ, AP, AS i stwierdzenia 3.A, z którego wiemy, że istnieje jakaś figura wielokątna W, która ma ujemne pole. Utwórzmy n figur wielokątnych przystających do W, niech to będą $W_1, W_2, \ldots W_n$ takie, że żadna para W_i, W_j nie zachodzi na siebie. Szukaną figurą wielokątną jest $U_n = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$. Na rys. 16 przedstawiono przykładowy sposób tworzenia figury wielokątnej U. Figura wielokątna W została narysowana symbolicznie, ponieważ nic nie wiemy o niej oprócz tego, że istnieje.



rys. 16

Z własności 1.1 i aksjomatu przystawania mamy

(3.1.1) $$P(U_n) = P(W_1) + P(W_2) + \ldots + P(W_n) = n\, P(W).$$

Ponieważ $P\ (W)$ jest ujemne, wtedy przy przejściu granicznym, gdy n dąży do nieskończoności, (ciąg pól figur wielokątnych) $P\ (U_n)$ jest rozbieżny do minus nieskończoności.

■

Zanim przystąpimy do dowodu kolejnych stwierdzeń (3.4 oraz 3.5) sformułujemy i udowodnimy następujące dwie własności (3.2 i 3.3), bez korzystania z aksjomatu monotoniczności, a jedynie z pozostałych aksjomatów teorii pola.

Własność 3.2. Istnieje prostokąt o bokach 1 i a, który ma ujemne pole.

Dowód: Figurę wielokątną W taką, że jej pole jest ujemne (ze stwierdzenia 3.A) podzielmy na skończoną liczbę m parami na siebie niezachodzących trójkątów T_i, a więc $W = \bigcup_{i=1}^{m} T_i$. Z własności 1.22 dowolny trójkąt T_i o wymiarach $a_i \times h_i$ jest równoważny przez rozkład prostokątowi $\Pi(a_i, \frac{h_i}{2})$. Kiedy wszystkie trójkąty T_i tworzące W zamienimy na równoważne im przez rozkład prostokąty $\Pi(a_i, \frac{h_i}{2})$ i utworzymy z nich sumę tak, by żadne dwa nie miały wspólnych punktów wewnętrznych, to powstała w ten sposób nowa figura wielokątna N będzie równoważna przez rozkład figurze wielokątnej W. Powołując się na fakt 1.9 (wyprowadzony tylko z aksjomatów AS, AP, AJ) uzyskamy równość pól dla N i W, skorzystajmy jeszcze przy tym z własności 1.1 i otrzymamy

(3.2.1) $$P(W) = P(N) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{m} \Pi(a_i, \frac{h_i}{2})\Big) = \sum_{i=1}^{m} P\Big(\Pi(a_i, \frac{h_i}{2})\Big).$$

Niech zapis $\Pi(a_i, b_i)$ oznacza i- ty prostokąt o bokach a_i, $b_i = \frac{h_i}{2}$. Iloczyn boków Dla prostokąta $\Pi(a_i, b_i)$ wynosi $a_i \cdot b_i$, tak samo jak iloczyn boków innego prostokąta $\Pi(1,$

a_ib_i), dlatego z własności 1.11 prostokąty $\Pi(a_i, b_i)$ i $\Pi(1, a_ib_i)$ mają równe pola. Poukładajmy prostokąty $\Pi(1, a_ib_i)$, (jest ich m) tak, by nie zachodziły na siebie parami i by tworzyły nowy prostokąt o boku 1, którego drugi bok wynosi

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_mb_m = \sum_{i=1}^{m} a_ib_i = a. \tag{3.2.2}$$

O a możemy powiedzieć, że jest dodatnią liczbą rzeczywistą.

Z własności 1.1 mamy

$$\sum_{i=1}^{m} P\,(\Pi(a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{m} P\,(\Pi(1, a_ib_i)) = P\,(\bigcup_{i=1}^{m} \Pi(1, a_ib_i)) = P\,(\Pi(1, a)). \tag{3.2.3}$$

Przypomnijmy, że prostokąt $\Pi(a_i, \frac{h_i}{2})$ to ten sam prostokąt co $\Pi(a_i, b_i)$, zatem z równości (3.2.1) i (3.2.3) uzyskamy równość pól figury wielokątnej W i prostokąta $\Pi(1, a)$, a ponadto również i ujemność pól:

$$P\,(\Pi(1, a)) = P\,(W) < 0. \tag{3.2.4}$$

■

Własność 3.3. Pole prostokąta $\Pi(p, qa)$ dla p i q – dowolnych, dodatnich liczb wymiernych oraz liczby rzeczywistej a, wynosi $p \cdot qP\,(\Pi(1, a))$.

Dowód: Niech $p = \frac{c}{d}$, $q = \frac{n}{m}$. Pole prostokąta $\Pi(\frac{c}{d}, \frac{n}{m}a)$ z własności 1.11 jest równe polu innego prostokąta $\Pi(1, \frac{c}{d} \cdot \frac{n}{m}a)$, zapiszmy zatem

$$P\,(\Pi(\frac{c}{d}, \frac{n}{m}a)) = P\,(\Pi(1, \frac{c}{d} \cdot \frac{n}{m}a)) \tag{3.3.1}$$

Obliczmy ile wynosi pole $\Pi(1, \frac{c}{d} \cdot \frac{n}{m}a)$. Prostokąt $\Pi\,(1, cna)$ to suma $d \cdot m$ przystających prostokątów $\Pi(1, \frac{c}{d} \cdot \frac{n}{m}a)$ takich, że żadne dwa nie mają wspólnych punktów wewnętrznych, (składowe prostokąty należy układać wzdłuż boku $c \cdot n \cdot a$), czyli z aksjomatu przystawania i własności 1.1 otrzymamy

$$P\,(\Pi(1, cna)) = d \cdot mP\,(\Pi(1, \frac{c}{d} \cdot \frac{n}{m}a)). \tag{3.3.2}$$

Prostokąt $\Pi\,(1, cna)$ składa się z $c \cdot n$ przystających do siebie prostokątów $\Pi\,(1, a)$, gdy skorzystamy z aksjomatu przystawania i własności 1.1 zachodzić będzie zależność

$$P\,(\Pi(1, cna)) = c \cdot nP\,(\Pi(1, a)). \tag{3.3.3}$$

Przyrównując (3.3.3) do (3.3.2) otrzymamy

(3.3.4) $$\frac{c}{d} \cdot \frac{n}{m}\ P\,(\Pi\,(1, a)) \ = \ P\,(\Pi(1, \frac{c}{d} \cdot \frac{n}{m}\ a)).$$

Następnie z połączenia (3.3.1) z (3.3.4) i po podstawieniu p zamiast $\frac{c}{d}$ oraz q zamiast $\frac{n}{m}$ otrzymamy

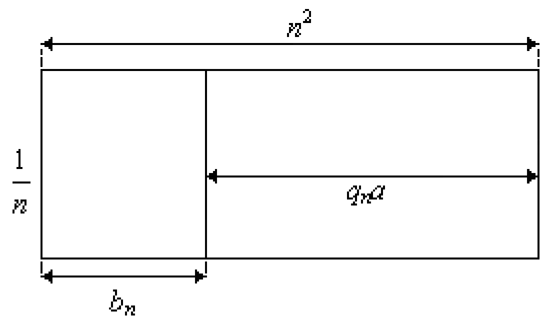
(3.3.5) $$P\,(\Pi(p, qa)) = \ p \cdot qP\,(\Pi(1, a)).$$

■

Stwierdzenie 3.4. Istnieje nieskończony ciąg wielokątów W_1, W_2, W_3, … taki, że $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \ldots$ i przekrój wszystkich wielokątów jest zbiorem jednopunktowym, a $P\,(W_n) \ \to \ \infty$.

Dowód: Niech elementami takiego ciągu będą prostokąty $\Pi(\frac{1}{n}, b_n)$, gdzie $b_n = n^2 \ - \ q_n \cdot a$ i $0 < b_n \ < \frac{1}{n}$, (z twierdzenia o trzech ciągach $b_n \ \to \ 0$).

Rys. 17 przedstawia n – ty prostokąt $\Pi(\frac{1}{n}, b_n)$.



rys. 17

Z aksjomatu sumy mamy zależność

(3.4.1) $$P\,(\Pi(\frac{1}{n}, b_n)) \ = P\,(\Pi(\frac{1}{n}, n^2)) \ - \ P\,(\Pi(\frac{1}{n}, q_n a)) \ = \ n \ - \ \frac{1}{n}\ q_n\, P\,(\Pi(1, a)).$$

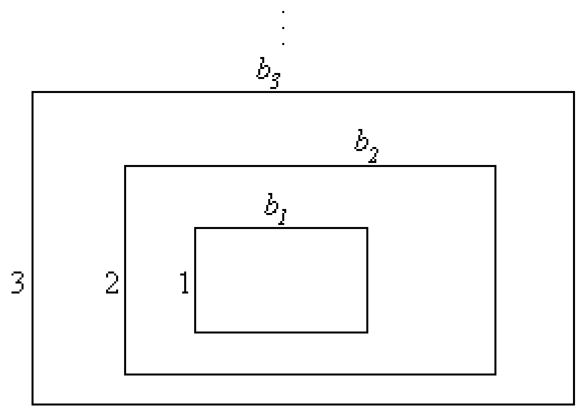
Ostatnią równość otrzymaliśmy z własności 3.3 oraz z własności 1.14.

Wielkość: $-\dfrac{1}{n}q_n\, P\,(\Pi(1,\ a))$, jest liczbą dodatnią, ponieważ $P\,(\Pi(1,\ a)) < 0$, dlatego $n - \dfrac{1}{n}q_n\, P\,(\Pi(1,\ a)) > n$, zatem $P\,(\Pi(\dfrac{1}{n},\ b_n)) > n$. A z definicji ciągu rozbieżnego do plus nieskończoności, która mówi, że dla każdej liczby $M \in \boldsymbol{R}$ prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od M, otrzymamy rozbieżność ciągu pól prostokątów $\Pi(\dfrac{1}{n},\ b_n)$ do nieskończoności, gdy $n \to \infty$.

■

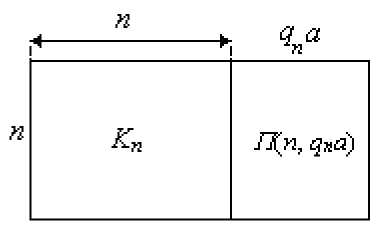
Stwierdzenie 3.5. Dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych c_1 i c_2 takich, że $c_1 < c_2$ istnieje nieskończony ciąg wielokątów $W_1,\ W_2,\ W_3,\ \ldots$, który spełnia warunki: $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \ldots$ oraz $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = \boldsymbol{R}^2$ taki, że pole każdego takiego prostokąta mieści się pomiędzy c_1 a c_2.

Dowód: Zbudujmy prostokąty Π_i, dla i = 1, 2, 3, … o wymiarach $i \times b_i$, spełniające zależności $\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \Pi_3 \subset \ldots$ i $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Pi_i = \boldsymbol{R}^2$, niech prostokąty będą umieszczone tak jak na rys. 18.



rys. 18

Pojedyńczy prostokąt $\Pi(n,\ b_n)$ o bokach n, $b_n = n + q_n a$, składa się z kwadratu K_n o boku n i prostokąta $\Pi(n,\ q_n a)$, rys. 18, q_n – to dowolna, dodatnia liczba wymierna, zaś a jest bokiem prostokąta $\Pi(1,\ a)$ o ujemnym polu.



rys.19

Korzystając z aksjomatu sumy obliczmy pole prostokąta $\Pi(n,\ b_n)$

(3.5.1) $$P\,(\Pi(n,\ b_n)) = P\,(K_n) + P\,(\Pi(n,\ q_n a)).$$

Z własności 1.14 pole kwadratu K_n wynosi

(3.5.2) $$P(K_n) = n^2.$$

Pole prostokąta $\Pi(n, q_n a)$ z własności 3.3 wynosi

(3.5.3) $$P(\Pi(n, q_n a)) = n \cdot q_n P(\Pi(1, a)).$$

Z powyższych trzech równości otrzymamy

(3.5.4) $$P(\Pi(n, b_n)) = n^2 + n \cdot q_n P(\Pi(1, a)).$$

Dobierzmy liczbę wymierną q_n tak, by pola wszystkich prostokątów $\Pi(n, b_n)$ zawierały się pomiędzy c_1 a c_2.

(3.5.5) $$c_1 < n^2 + n \cdot q_n P(\Pi(1, a)) < c_2$$
(3.5.6) $$c_1 - n^2 < n \cdot q_n P(\Pi(1, a)) < c_2 - n^2$$

Zanim podzielimy przez $n\,P(\Pi(1, a))$ nierówności (3.5.6) pamiętajmy, że należy zmienić znak nierówności na przeciwny, ponieważ pole $P(\Pi(1, a))$ jest ujemne.

(3.5.7) $$\frac{c_2 - n^2}{nP(\Pi(1,a))} < q_n < \frac{c_1 - n^2}{nP(\Pi(1,a))}$$

Korzystając z twierdzenia o gęstości zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych, z pewnością znajdziemy liczbę wymierną q_n pomiędzy dwoma liczbami rzeczywistymi wyznaczonymi przez nierówności (3.5.7), dla której w sposób podany na rys. 18 i 19 zbudujemy szukany ciąg wielokątów.

■

Rozdział 4
Niezależność aksjomatu monotoniczności

Budując system aksjomatyczny warto zwrócić uwagę na to, aby aksjomaty były niezależne, tzn. ażeby żaden z nich nie dał się wyprowadzić logicznym rozumowaniem z pozostałych. Ten wymóg ma raczej charakter estetyczny, a poza tym chodzi nam o to, by system aksjomatów był jak najmniej liczny, ażeby wszystkie twierdzenia, które dadzą się z pewnej grupy aksjomatów wywieść, umieścić już w „nadbudowie” w postaci twierdzeń z dowodami.

W tym rozdziale znajdziemy funkcję H przyporządkowującą figurom wielokątnym liczby rzeczywiste – taką, która spełnia aksjomat sumy, przystawania, jedności i nie spełnia aksjomatu monotoniczności. Istnienie takiej funkcji dowodzi niezależności aksjomatu monotoniczności od pozostałych aksjomatów teorii pola.

4.1. Funkcja *H*. Do zbudowania funkcji H posłuży nam pomocnicza funkcja $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o następujących własnościach:

(i) $\forall_{x \in \boldsymbol{R}} \ \forall_{q \in \boldsymbol{Q}} \quad f(qx) = q\, f(x),$

(ii) $\forall_{x, y \in \boldsymbol{R}} \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$

(iii) $\forall_{q \in \boldsymbol{Q}} \quad f(q) = q,$

(iv) f nie jest tożsamościowa.

Istnienie takiej funkcji uzasadnimy w dodatku. Teraz przy pomocy funkcji f o powyższych własnościach zdefiniujmy funkcje H jako złożenie funkcji pola P_0 i funkcji f, czyli $H(W) = f(P_0(W))$, gdzie W jest dowolną figurą wielokątną.

4.2. Uzasadnimy, że funkcja H spełnia trzy aksjomaty: AJ, AS, AP.

I. Aksjomat jedności.

Mamy kwadrat jednostkowy K_0, dla którego zachodzi aksjomat jedności, czyli $P_0(K_0) = 1$. Z definicji funkcji H i własności (iii) otrzymamy

$$H(K_0) = f(P_0(K_0)) = f(1) = 1. \tag{4.2.1}$$

II. Aksjomat sumy.

Niech figury wielokątne W_1 i W_2 niezachodzą na siebie. Skorzystamy z tego, że funkcja pola P_0 spełnia aksjomat sumy, czyli $P_0(W_1 \cup W_2) = P_0(W_1) + P_0(W_2)$ oraz z własności (ii) dla funkcji f.

$$H(W_1 \cup W_2) = f(P_0(W_1 \cup W_2)) = f(P_0(W_1) + P_0(W_2)) = f(P_0(W_1)) + f(P_0(W_2)) = H(W_1) + H(W_2). \tag{4.2.2}$$

III. Aksjomat przystawania.

Funkcja P_0 spełnia aksjomat przystawania, dlatego gdy $W_1 \equiv W_2$ możemy stwierdzić, że $P_0(W_1) = P_0(W_2)$. Zatem

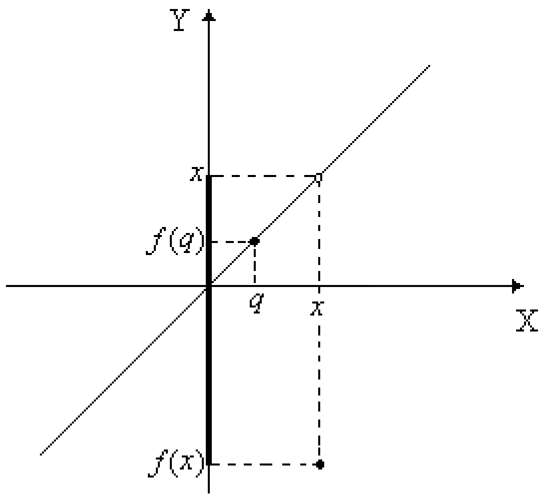
$$H(W_1) = f(P_0(W_1)) = f(P_0(W_2)) = H(W_2). \tag{4.2.3}$$

Zanim udowodnimy, że funkcja H nie spełnia aksjomatu monotoniczności wyprowadźmy charakterystyczną własność funkcji f.

Lemat 4.A. Istnieją liczby rzeczywiste dodatnie x, y takie, że $x < y$, dla których zachodzi nierówność $f(x) > f(y)$.

Dowód: Własność (iv) innymi słowy możemy sformułować, tak – istnieje dodatnia liczba rzeczywista x taka, że $f(x) \neq x$, dodajmy jeszcze, że z własności (iii) nie może ona być liczbą wymierną. A skoro $f(x) \neq x$, to $f(x) < x$ lub $f(x) > x$. Rozważmy następujące dwa przypadki.

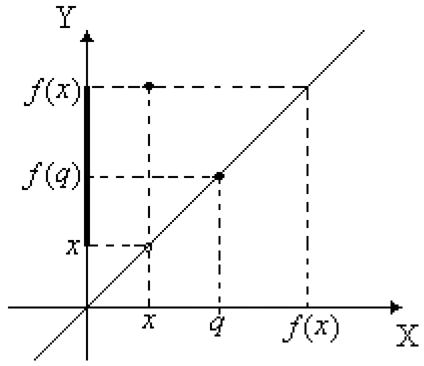
1. Rozważmy pierwszy przypadek, gdy $\underline{f(x) < x}$. Dla ułatwienia utwórzmy pomocniczy rys. nr 20.



rys. 20

Prosta na tym rysunku to funkcja $f(x) = x$. Na osi OY zaznaczmy odcinek pomiędzy $f(x)$ a x. Skorzystamy z pewnej własność, że pomiędzy dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi leży liczba wymierna (zwana inaczej gęstością zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych). W naszym przypadku na odcinku $(0, x)$, na osi OX leży liczba wymierna q. Z własności (iii) wiemy jaka jest wartość funkcji f, dla wymiernego argumentu q. Na zbiorze liczb wymiernych funkcja f jest tożsamościowa, czyli $q = f(q)$. Zaznaczmy na rys. nr 20 punkt $(q, f(q))$ i uporządkujmy argumenty i wartości funkcji f dla x i dla q. Dla $q < x$ zachodzi $f(q) > f(x)$.

2. W drugim przypadku, gdy $\underline{f(x) > x}$ postępujemy w podobny sposób. Zaznaczmy przedział od x do $f(x)$ na osi OY, rysunek nr 21, na odcinku $(x, f(x))$, na osi OX znajdziemy liczbę wymierną q, dzięki gęstości zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych.



rys. 21

Funkcja f jest identycznością na zbiorze liczb wymiernych, więc wartości funkcji dla dowolnej liczby wymiernej q wynoszą $f(q) = q$. Punkt $(q, f(q))$ jest zaznaczony na rys. 21, zachodzą dla niego i dla punktu $(x, f(x))$ następujące zależności $q > x$ i $f(q) < f(x)$.

■

4.3. Funkcja H nie spełnia aksjomatu monotoniczności.

Niech x, y będą liczbami takimi jak w lemacie 4.A. Niech będzie dany trójkąt T_1 o podstawie x i wysokości 2 oraz trójkąt T_2 o podstawie y i wysokości 2. Ponieważ $x < y$, można tak wybrać trójkąty, by $T_1 \subset T_2$. Obliczmy ich pola $P_0(T_1) = x$, zaś $P_0(T_2) = y$, wtedy z lematu 4.A otrzymamy $f(P_0(T_1)) > f(P_0(T_2))$, czyli $H(T_1) > H(T_2)$. W ten sposób pokazaliśmy, że istnieją takie figury wielokątne T_1 i T_2, że $T_1 \subset T_2$, a $H(T_1) > H(T_2)$ jest to sprzeczne z aksjomatem monotoniczności, który mówi, że dla dowolnych figur wielokątnych T_1 i T_2 takich, że $T_1 \subset T_2$ zachodzi $H(T_1) < H(T_2)$.

■

W 4.2 pokazaliśmy, że funkcja H spełnia aksjomaty sumy, jedności i przystawania, a w 4.3, że ta sama funkcja H nie spełnia aksjomatu monotoniczności, zatem aksjomat monotoniczności jest niezależny od pozostałych aksjomatów.

4.4. Własności, których nie da się wyprowadzić z układu aksjomatów AJ, AS, AP (nie rozszerzonego o aksjomat monotoniczności).

Posiadamy już więcej wiadomości, a co ważniejsze dysponujemy silnym narzędziem – funkcją H, za pomocą której udowodnimy, że własności sformułowane na końcu pierwszego rozdziału nie wynikają z aksjomatu monotoniczności a jedynie z trzech pozostałych aksjomatów AJ, AS i AP.

Twierdzenie 4.4.1. Jedynie z aksjomatów AJ, AS, AP nie wywnioskujemy, że pole dowolnego prostokąta o bokach a, b wynosi $a \cdot b$ (własność 1A).

Dowód: Do dowodu posłuży nam funkcja H, ponieważ pokażemy, że nie spełnia własności 1.A, (znajdziemy taki prostokąt P o bokach a, b, dla którego $H(P)$ nie będzie równe $a \cdot b$). Prostokąt P o boku 1 i z, gdzie z jest tym wektorem bazowym, którego wartość funkcji jest różna od niego samego, jest najlepszym kontrprzykładem, gdyż zachodzi

$$H(P) = f(P_0(P)) = f(1 \cdot z) = 1 f(z) = f(z) \neq z. \tag{4.4.1}$$

■

Twierdzenie 4.4.2. Korzystając tylko z aksjomatów AJ, AS, AP nie wywnioskujemy, że pole dowolnej figury wielokątnej jest liczbą dodatnią (własność 1B).

Dowód: Skorzystajmy z tego samego przykładu, co w 4.3. Niech będzie dany trójkąt T_1 o podstawie x i wysokości 2 oraz trójkąt T_2 o podstawie y i wysokości 2, wtedy $T_1 \subset T_2$. Zauważmy, że $x < y$. Obliczmy pola trójkątów: $P_0(T_1) = x$ i $P_0(T_2) = y$ oraz pole figury wielokątnej $T_2 - T_1$, (dla ułatwienia nazwijmy ją F) z aksjomatu sumy mamy

$$P_0(F) + P_0(T_1) = P_0(T_2), \tag{4.4.2}$$

czyli $P_0(F) = y - x$.

Korzystając z własności funkcji f obliczmy wartość funkcji H dla figury wielokątnej F

$$H(F) = f(P_0(F)) = f(y-x) = f(y) - f(x). \tag{4.4.3}$$

wtedy z lematu 4.A otrzymamy $f(x) > f(y)$, i w połączeniu z równością (4.4.3) mamy, że $H(F) < 0$.

Pokazaliśmy, więc istnieje figura wielokątna F, która ma ujemne pole, tzn. że własności 1B nie spełnia funkcja H, tym samym własność 1B nie wynika z AS, AP, AJ.

■

By dowieść, że ostatnie dwie własności nie wynikają z aksjomatów AS, AJ, AP wykorzystamy nową funkcję rzeczywistą f_1, która posiada wszystkie własności funkcji f i jeszcze dodatkową własność

$$\text{(v)} \quad \forall_{x \in \mathbf{R}} \qquad f_1(x) \in \mathbf{Q}.$$

I tym razem H_1 zdefiniujemy jako złożenie funkcji f_1 i P_0, $H_1 = f_1 \circ P_0$. Więcej na temat funkcji H_1 i f_1 w dodatku w podrozdziale 6.5.

Twierdzenie 4.4.3. Jedynie z aksjomatów AJ, AS, AP nie wywnioskujemy, że istnieje taka figura wielokątna, której pole jest liczbą niewymierną (własność 1C).

Dowód: Pokażemy, że funkcja H_1 nie spełnia własności 1C oraz spełnia AJ, AS i AP. Funkcja H ze względu na trzy własności (i), (ii), (iii) funkcji f, spełnia aksjomat sumy, przystawania i jedności. Funkcja H_1 ze względu na spełnianie także własności (i), (ii), (iii) przez swoją funkcję składową f_1 również spełnia te trzy aksjomaty. Mając daną funkcje $H_1 = f_1 \circ P_0$ spełniającą aksjomaty AJ, AP i AS wystarczy tylko pokazać, że H_1 nie spełnia własności 1C. Dla dowolnej figury wielokątnej W zachodzi

$$H_1(W) = f_1(P_0(W)) = f_1(y) \tag{4.4.4}$$

Liczba y jest dowolna, więc w myśl warunku nr (v) mamy, że $f_1(y) \in \mathbb{Q}$. Funkcja H_1 nie spełnia zatem własności 1C, ponieważ dla dowolnej figury wielokątnej W, $H_1(W) \in \mathbb{Q}$.

■

Twierdzenie 4.4.4. Nie wywnioskujemy, że dowolna liczba rzeczywista dodatnia jest polem pewnej figury wielokątnej (własność 1D), korzystając jedynie z aksjomatów AJ, AS, AP

Dowód: Funkcja H_1 spełnia aksjomaty AJ, AS, AP (uzasadnienie znajduje się w pierwszych czterech linijkach dowodu tw. 4.4.3). Pokażmy więc, że H_1 nie spełnia własności 1D. W twierdzeniu 4.4.3 pokazaliśmy, że dla dowolnej figury wielokątnej W, $H_1(W)$ może być tylko liczbą wymierną, zatem dodatnia liczba niewymierna nie może być wartością funkcji H.

■

Rozdział 5
Zadania

Rozdział piąty zawiera przykładowe zadania, które polecam czytelnikowi do samodzielnego rozwiązania. Zadania te dotyczą różnych aksjomatów, nie tylko aksjomatu monotoniczności, ale charakter ich jest bardzo podobny do aspektów poruszanych w tej pracy, co ma na celu ułatwienie zadania i przećwiczenie wiadomości i umiejętności zdobytych podczas czytania niniejszej pracy magisterskiej.

1. Uzasadnij, że następujących stwierdzeń nie da się udowodnić bez odwołania się do aksjomatu przystawania (a więc wyłącznie na podstawie trzech pozostałych aksjomatów teorii pola):
(a) każdy kwadrat jednostkowy ma pole 1;
(b) pole trójkąta powstałego z podziału dowolnego prostokąta przekątną jest równe połowie pola prostokąta;
(c) istnieją wielokąty o dowolnie dużych polach;
(d) równoległoboki o równych podstawach i równych wysokościach mają równe pola;
(e) $P(W) \geq 0$ dla dowolnego wielokąta W.

2. Uzasadnij, że stwierdzeń (b), (c), (d) i (e) z zadania 1 nie da się udowodnić bez korzystania z aksjomatu sumy.

3. Znajdź po trzy takie funkcje, które nie spełniają aksjomatu
(a) jedności;
(b) przystawania;
(c) sumy;
a spełniają wszystkie pozostałe aksjomaty teorii pola.

4. Czy bez aksjomatu sumy można dowieść, że istnieją wielokąty o dowolnie dużych, (dowolnie małych) polach? A bez aksjomatu przystawania?

5. Czy aksjomat przystawania można zastąpić słabszym aksjomatem translacji?

6. Czy aksjomat jednostki AJ można zastąpić aksjomatem AE: pole trójkąta równobocznego T_0 o boku 1 wynosi $P(T_0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

7. Skonstruuj model dla AP oparty na umiejętnym zliczaniu kropek.

8. Jakich aksjomatów nie spełnia funkcja P (W) = diam (W), gdzie diam (W) jest najdłuższą odległością pomiędzy dwoma punktami wielokąta W.

Dodatek

To już ostatni etap tej pracy, w którym zajmiemy się uzasadnieniem istnienia funkcji f i f_1 z rozdziału 4. Zagadnienie istnienia tych funkcji nie jest bezpośrednio związane z aksjomatem monotoniczności, dlatego wyodrębnione z całości pracy zostało umieszczone na samym końcu w charakterze dodatkowego uzupełnienia.

Na początku zapoznamy się z kilkoma definicjami, bardziej związanymi z algebrą niż z geometrią, ale potrzebnych do uzasadnienia istnienia funkcji f oraz f_1.

Definicja 6.1. Zbiór V z dodawaniem i mnożeniem przez skalary z ciała K oraz wyróżnionym elementem θ (zwanym wektorem zerowym w V), nazywamy *przestrzenią liniową* (zamiennie *wektorową*) *nad ciałem* K, jeśli spełnione są następujące warunki (aksjomaty przestrzeni liniowej), dla dowolnych wektorów u, v, $w \in V$ i dowolnych skalarów a, $b \in K$:

(1) $u + v = v + u$,

(2) $u + (v + w) = (v + u) + w$,

(3) $u + \theta = \theta + u = u$,

(4) dla każdego wektora u istnieje taki wektor v, że $u + v = \theta$,

(5) $a\,(u + v) = a\,u + a\,v$,

(6) $(a + b)\,u = a\,u + b\,u$,

(7) $(a\,b)\,u = a\,(b\,u)$,

(8) $1 \cdot u = u$.

Definicja 6.2. Niech V i W będą dowolnymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem F, odwzorowanie φ: $V \rightarrow W$ przestrzeni V w przestrzeń W nazywamy liniowym jeżeli dla dowolnych wektorów u, v przestrzeni V i dowolnego elementu a z ciała F zachodzą związki:

(6.2.1) $\varphi\,(u + v) = \varphi\,(u) + \varphi\,(v)$ $\leftarrow$ (addytywność),

(6.2.2) $\varphi\,(a\,v) = a\,\varphi\,(\mathrm{v})$ $\leftarrow$ (jednorodność).

Definicja 6.3. Funkcję liniową φ przekształcającą przestrzeń wektorową $\boldsymbol{R}$ nad ciałem $\boldsymbol{Q}$ w siebie nazwijmy $\boldsymbol{Q}$ - liniowym odwzorowaniem.

6.4. Uzasadnienie istnienia funkcji f spełniającej własności (i) – (iv) z 4.1.

Zbiór wartości $\boldsymbol{R}$ i dziedzinę $\boldsymbol{R}$ funkcji f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ potraktujmy jako przestrzeń wektorową $\boldsymbol{R}$ względem zbioru skalarów $\boldsymbol{Q}$, (zbiór skalarów $\mathbf{Q}$ z działaniami mnożenia i dodawania tworzy ciało liczbowe), innymi słowy w zamian za zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$ weźmy przestrzeń wektorową $\boldsymbol{R}$ nad ciałem $\boldsymbol{Q}$.

Lemat 6.4.1. Jeśli f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ jest odwzorowaniem $\boldsymbol{Q}$ – liniowym, to spełnia warunki (i) oraz (ii) z 4.1.

Dowód: Własności (i), (ii) to podstawowe warunki (addytywność i jednorodność) na to, by funkcja przekształcająca przestrzeń wektorową $\boldsymbol{R}$ nad ciałem $\boldsymbol{Q}$ w siebie była odwzorowaniem liniowym, więc są natychmiast spełnione.

■

Zdefiniujmy odwzorowanie liniowe f zadając je na elementach bazy. Jako bazę weźmy układ wektorów liniowo niezależny nad $\boldsymbol{Q}$, generujący całą przestrzeń $\boldsymbol{R}$ składający się z elementów 1, z, z_1, z_2, z_3, **…**. Funkcją f określamy wtedy przepisem takim, że $f(1) = 1$, $f(z) \neq z$, a pozostałe wektory bazowe są przekształcane przez funkcję f w zupełnie dowolny sposób.

Funkcja f spełnia własność (iv), nie jest tożsamościowa ponieważ dla liczby z wartość funkcji $f(z) \neq z$.

Lemat 6.4.2. Jeśli f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ jest odwzorowaniem $\boldsymbol{Q}$ – liniowym oraz $f(1) = 1$, to spełnia warunek (iii).

Dowód: Pokażemy, że dla tak zdefiniowanej funkcji f zachodzi własność (iii). Jeżeli $f(1) = 1$, to z własności (i) dla dowolnej liczby wymiernej q będzie zachodziła własność

$$(6.4.1) \qquad \forall_{q \in \boldsymbol{Q}} \qquad f(q) = f(q \cdot 1) = q\ f(1) = q \cdot 1 = q,$$

a jest to dokładnie treść własności (iii) funkcji f.

■

W 6.4 pokazaliśmy, że taka funkcja jak f istnieje. Jednak ze względu na niemożliwość wypisania wszystkich elementów bazy, nie uda się funkcji f zapisać jednym wzorem. Aby zaprezentować funkcję f możemy jedynie wypisać jej charakterystyczne własności, czyli własności (i) – (iv) oraz zbiór wartości funkcji f dla wektorów bazowych przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{R}$ nad ciałem $\boldsymbol{Q}$.

6.5. Uzasadnienie istnienia funkcji f_l spełniającej własności (i)– (v) z 4.1.

Przypomnijmy własności nowej funkcji f_l z rozdziału 4. Funkcja f_l posiada wszystkie własności funkcji f i jeszcze dodatkową własność

$$\text{(v)} \quad \forall_{x \in \boldsymbol{R}} \qquad f_l\ (x) \in \mathbf{Q}.$$

Bardzo podobnie jak w przypadku funkcji f, zdefiniujemy f_l zadając je w następujący sposób na wektorach bazowych 1, w, w_i: $i \in \mathcal{I}$, f_l (1) = 1, f_l (w) $\neq$ w, a pozostałe wektory bazowe są przekształcane przez funkcję f zawsze w taki sposób, że spełniony jest warunek f_l (w) $\in \mathbf{Q}$, f_l (w_i) $\in \mathbf{Q}$, dla $i \in \mathcal{I}$.

Funkcją f_l jest w inny sposób zadana na układzie wektorów bazowych niż funkcją f, jedynie na tym polega różnica pomiędzy tymi funkcjami. Z tego względu w bardzo podobny sposób jak to było z funkcją f możemy uzasadnić, że funkcja f_l spełnia własności (i) – (iv) z rozdziału 4. Natomiast dodatkowa własność (v) wynika ze szczególnego sposobu zdefiniowania funkcji f_l przez odpowiednie zadanie jej na wektorach bazowych, które sprawiło, że f_l jest odwzorowaniem przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{R}$ nad ciałem $\boldsymbol{Q}$ w ciało $\boldsymbol{Q}$, co pokażemy w poniższym lemacie.

Lemat 6.5.1. Obrazem powyżej zdefiniowana funkcji f_l jest zbiór liczb wymiernych – $\boldsymbol{Q}$.

Dowód: Niech $x \in \boldsymbol{R}$ będzie dowolne, (a q i p będą liczbami wymiernymi), w takim razie x możemy przedstawić jako sumę kombinacji liniowej wektorów bazowych

$$x = q \cdot 1 + p \cdot w + \sum_{k=1}^{n} q_k w_{ik} \ . \tag{6.5.1}$$

Mamy pokazać, że f_l (x) $\in \boldsymbol{Q}$. Z jednorodności i addytywności funkcji f_l, warunku (iii) oraz równości (6.5.1) otrzymamy

$$f_l\,(x) = q\ + p \cdot f_l\,(w)\ + \sum_{k=1}^{n} q_k f_1(w_{ik})\,, \tag{6.5.2}$$

czyli f_l (x), jest sumą liczb wymiernych, a więc liczbą wymierną.

■

Literatura

1.*Szkoła geometrii*. *Odczyty kaliskie*. WSiP 1993.

2. *Encyklopedia Szkolna*. *Matematyka*. WSiP 1989.

3. S. Gołąb. *Dlaczego możliwe są różne geometrie*? Kraków 1972.

4. A. Białynicki – Birula. *Algebra liniowa z geometrią*. Warszawa 1976.