Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki

PRACA MAGISTERSKA

Obliczanie pól i objętości metodą Cavalieriego

Autor: **Izabela Król**
Promotor: **dr Jacek Świątkowski**

WROCŁAW 2000

1. Wstęp

Celem tej pracy jest przedstawienie i praktyczne zastosowanie zasady, którą nazwano nazwiskiem XVII wiecznego uczonego, mianowicie Zasadą Cavalieriego.

Przez kilka rozdziałów właśnie tą metodę będziemy obliczali a dokładnie, porównywali pola figur płaskich i objętości brył przestrzennych.

W rozdziale I dowiemy się jak narodziła się Zasada Cavalieriego, z którą praktycznie każdy z nas spotkał się już w szkole podstawowej.

Rozdział II to szereg dowodów, które pokażą nam dla jakich par figur płaskich i przy jakich założeniach zasada będzie spełniona.

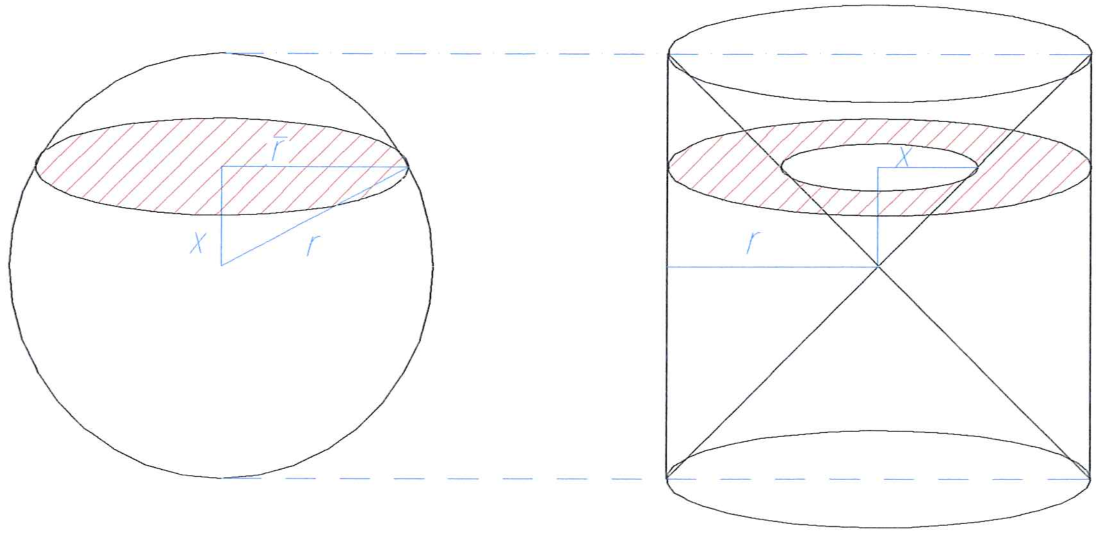
Figury możemy porównywać co do pola, ale także co do objętości. Dlatego rozdział III przybliży nam jak działa zasada na bryłach przestrzennych. Zobaczymy dla jakich par (i nie tylko par), może zachodzić zasada i jakie założenia w tym przypadku muszą być spełnione.

W powyższych rozdziałach pojawią się też obliczenia całkowe. Przy pomocy całki potwierdzimy czy rzeczywiście przy założeniach jakie weźmiemy pod uwagę objętości brył (pola figur) będą równe.

1.1. Objętość kuli - dowód Archimedesa

Metodą, która jest tematem pracy, posługiwano się już w Starożytności. Przedstawimy teraz sposób w jaki Archimedes obliczył objętość kuli posługując się właśnie tą metodą.

Aby obliczyć objętość kuli umieśćmy walec obok kuli, a dokładniej postawmy kulę i walec na jednej płaszczyźnie.



Rys. 1

Założenie: promień kuli jest równy promieniowi podstawy walca oraz wysokość walca jest równa średnicy kuli czyli: $h = 2r$.

W walcu wycinamy dwa stożki o wspólnym wierzchołku w jego środku symetrii i o wspólnych z walcem podstawach. Przecinając kulę i walec z wyciętymi stożkami płaszczyzną równoległą do tej, na której stoją obie bryły, w odległości x od środka walca otrzymujemy w przecięciu z kulą koło o promieniu: $\bar{r} = \sqrt{r^2 - x^2}$, a więc o polu równym $\left(r^2 - x^2\right)\pi$.

Natomiast w przecięciu z wyciętym walcem - pierścień kołowy o promieniach r i x a więc o polu równym $\pi\left(r^2 - x^2\right)$. Jak widzimy pola te są więc równe $\pi\left(r^2 - x^2\right) = \pi r^2 - \pi x^2$

Dalej Archimedes argumentuje tak: *nalewając do obu brył wody (czyli bryły traktujemy jak puste wewnątrz naczynia) w każdym momencie na każdym poziomie dolewamy jej do obu brył tyle samo*. Stąd objętość (= ilość wody, jaką pomieszczą) jest równa. Zatem objętość kuli jest taka sama, jak objętość walca z wyciętymi stożkami, a stąd już łatwo obliczyć:

$$V_W - 2V_S = V_K$$

$$\pi r^2 h - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = V_K$$

$$\pi r^2 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 r = V_K$$

$$2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = V_K$$

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$$

wzoru

Argument użyty w dowodzie na objętość kuli nosi nazwę *Zasady Cavalieriego* na cześć XVII - wiecznego uczonego, który sformułował ją w pełnej ogólności.

1.2. Jak kształtowała się zasada Cavalieriego

Bonaventura Cavalieri i Evangelista Torricelli, uczniowie Galileusza podjęli próbę obliczania pól i objętości metodą, którą później nazwano nazwiskiem pierwszego z nich, mianowicie zasadą Cavalieriego.

Cavalieri był autorem kilku prac między innymi o trygonometrii, logarytmach, optyce geometrycznej itd. Głównym dziełem jego życia była jednak „Geometria, przedstawiona pewnym nowym sposobem za pomocą niepodzielnych wielkości ciągłych", i stanowiące jego dalszy ciąg „Sześć ćwiczeń geometrycznych".

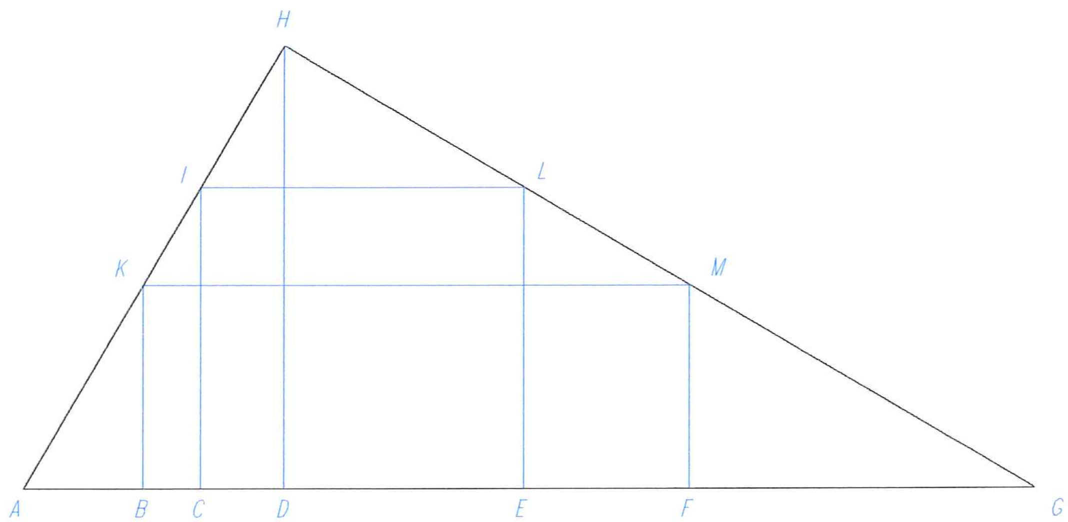
Porównywanie pól figur płaskich Cavalieri sprowadza do porównania ich *„wszystkich linii"*, które wyobraźmy sobie jako przekroje prostymi równoległymi. Na to, aby sprawdzić, czy dwie figury mają jednakowe pola, wystarczy sprawdzić długości linii obu figur.

Podobnie porównywane były objętości brył. Jednak tutaj Cavalieri wprowadza przekroje płaskie, więc aby sprawdzić, czy objętości obu brył są równe, wystarczy porównać ich pola przekrojów.

Początkowa wersja *„zasady Cavalieriego"* była bardzo niestaranna. Cavalieri w pierwszej redakcji napisał, że:

„ figury (bryły) mają równe pola (objętości), gdy mają równe przekroje"

I tu można jednak zobaczyć, jak wielkie miało znaczenie, że w owych czasach pracowano zespołowo: przyjaciel Cavalieriego - Evangelista Torricelli publicznie wykpił go, twierdząc, iż udowodnił on, że dwa dowolne trójkąty prostokątne mają takie samo pole *(rys.2)*.



Rys.2

Istotnie, każdemu przekrojowi pionowemu trójkąta *ADH* odpowiada dokładnie jeden równy mu pionowy przekrój trójkąta *DGH.*

Paradoks, jak wskazywał później sam Cavalieri tłumaczy się tym, że odległości między liniami *KB* i *IC* nie są równe odległościom między liniami *MF* i *EL*. Zresztą jasnych, ogólnych wskazówek co do tego jak należy wybierać „linie" Cavalieri nie podał.

Zatem, aby dwa trójkąty prostokątne *HDA* i *HDG* *(rys.2)* miały jednakowe pola musiałby być spełniony warunek, że $|DG| = |DA|$, wtedy odległości między odcinkami *KB* i *IC* oraz *MF* i *EL* byłyby równe.

A zatem podsumowując powyższe rozważania, zasadę Cavalieriego dla figur płaskich możemy sformułować następująco:

Jeżeli figury płaskie zawarte między dwiema prostymi równoległymi mają tę własność, że ich odcinki powstałe z poszatkowania figury prostymi równoległymi do poprzednich są równe, to figury te będą miały równe pola.

Twierdzenie Cavalieriego stosuje się nie tylko dla figur płaskich, ale także do dowolnych brył.

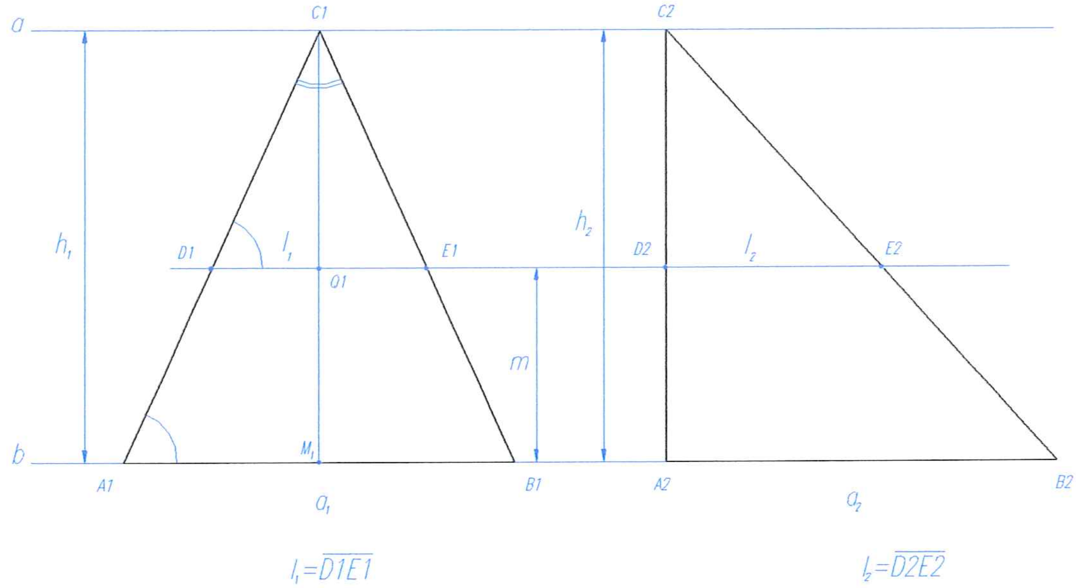
Jeżeli weźmiemy bryły, które będą zawarte między dwiema równoległymi płaszczyznami i jeśli będą miały tę własność, że ich przekroje dowolną płaszczyzną równoległą do poprzednich będą równe, to bryły te będą miały równe objętości.

Powracając jeszcze do Archimedesa i jego rozważań *(rozdz.1.1)* zauważmy, że pole przekroju kuli i na tej samej wysokości pole przekroju walca z wyciętymi stożkami były równe, a więc objętości tych brył były jednakowe.

2. Przykłady praktycznego zastosowania zasady Cavalieriego dla figur płaskich.

2.1. Dowolny trójkąt i trójkąt prostokątny.

Weźmy pod uwagę dowolny trójkąt i trójkąt prostokątny i umieśćmy je między dwiema prostymi a i b do siebie równoległymi, jak pokazuje rysunek



Rys.3

Przyjmijmy ponadto iż oba trójkąty mają podstawy tej samej długości:

Niech $A_1B_1 = a_1, A_2B_2 = a_2, C_1M_1 = h_1, C_2A_2 = h_2$

Przetnijmy oba trójkąty dowolną prostą równoległą do b odległą od niej o m. Otrzymane odcinki D_1E_1 i D_2E_2 oznaczmy odpowiednio jako l_1 i l_2 i obliczmy ich długości. Korzystając z podobieństwa trójkątów $A_1B_1C_1$ i $D_1E_1C_1$ (o czym zapewnia nas cecha „kąt, kąt") otrzymujemy:

$$\frac{C_1M_1}{A_1B_1} = \frac{C_1Q_1}{D_1E_1}$$

Wstawiając przyjęte oznaczenia, mamy:

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_1 - m}{l_1}$$

czyli

$$l_1 = \frac{a_1(h_1 - m)}{h_1}$$

Analogicznie, wykorzystując podobieństwo trójkątów $A_2B_2C_2$ i $D_2E_2C_2$ otrzymujemy:

$$\frac{C_2A_2}{A_2B_2} = \frac{C_2D_2}{D_2E_2}$$

$$\frac{h_2}{a_2} = \frac{h_2 - m}{l_2}$$

Zatem

$$l_2 = \frac{a_2(h_2 - m)}{h_2}$$

Ponieważ obie figury zawarte są między prostymi równoległymi, więc $h_1 = h_2$. Wobec założenia, iż podstawy mają tę samą długość, mamy $a_1 = a_2$. Pokazaliśmy więc, że otrzymane w przekroju odcinki l_1 i l_2 są sobie równe. Stąd, w myśl zasady Cavalieriego, pola tych trójkątów są równe.

Przyjmując, że pole trójkąta prostokątnego jest znane i równe połowie iloczynu przyprostokątnych, możemy stwierdzić, że pole dowolnego trójkąta jest równe połowie iloczynu podstawy i wysokości poprowadzonej do tej podstawy.

2.1. Deltoid i romb.

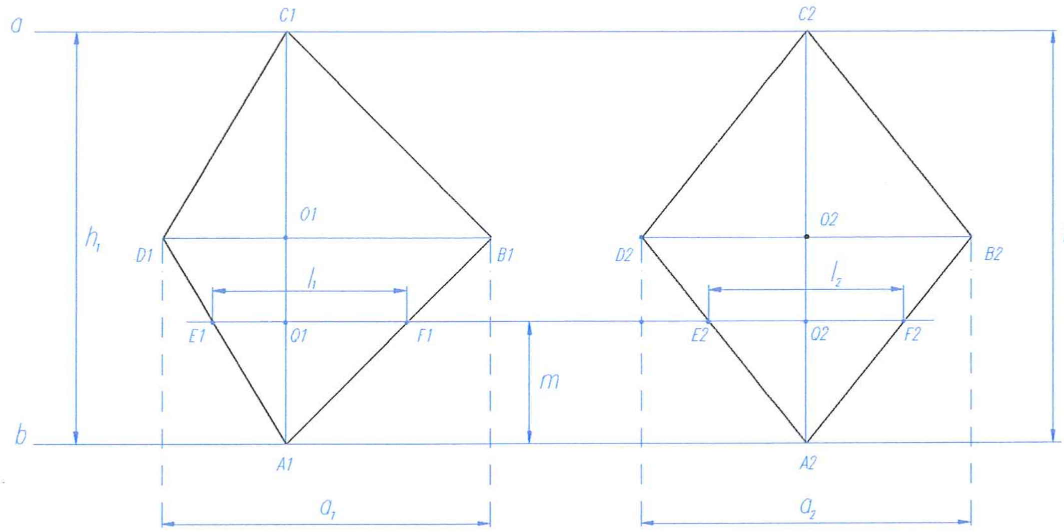
Jak wiemy, deltoid jest czworokątem, którego jedna przekątna jest jego osią symetrii *(a ściślej mówiąc, zawiera się w osi symetrii tego czworokąta)*. Opierając się na zasadzie Cavalieriego, pokażemy, że deltoid i romb o przekątnych jednakowej długości, mają równe pola.

Umieśćmy te czworokąty między prostymi *a* i *b* do siebie równoległymi, jak pokazuje rysunek 4.

Następnie przetnijmy te czworokąty na dowolnej wysokości *m* prostą równoległą do prostej *a*, otrzymując odcinki $l_1 = E_1F_1$ i $l_2 = E_2F_2$

Korzystając z podobieństwa trójkątów $A_1B_1D_1$ i $A_1F_1E_1$ mamy:

$$\frac{A_1O_1}{D_1B_1} = \frac{A_1Q_1}{E_1F_1}$$



Rys.4

Przyjmując oznaczenia: $A_1C_1 = h_1$ i $D_1B_1 = a_1$, oraz korzystając z własności deltoidu (przekątna B_1D_1 dzieli przekątną A_1C_1 na połowy) otrzymujemy:

$$\frac{1/2\, h_1}{a_1} = \frac{m}{l_1}$$

stąd

$$l_1 = \frac{2a_1 m}{h_1}$$

Analogicznie trójkąty $A_2B_2D_2$ i $A_2E_2F_2$ są podobne, więc:

$$\frac{A_2O_2}{D_2B_2} = \frac{A_2Q_2}{E_2F_2}$$

Przyjmując oznaczenia: $A_2C_2 = h_2$ i $D_2B_2 = a_2$, otrzymujemy:

$$\frac{1/2\, h_2}{a_2} = \frac{m}{l_2}$$

Stąd

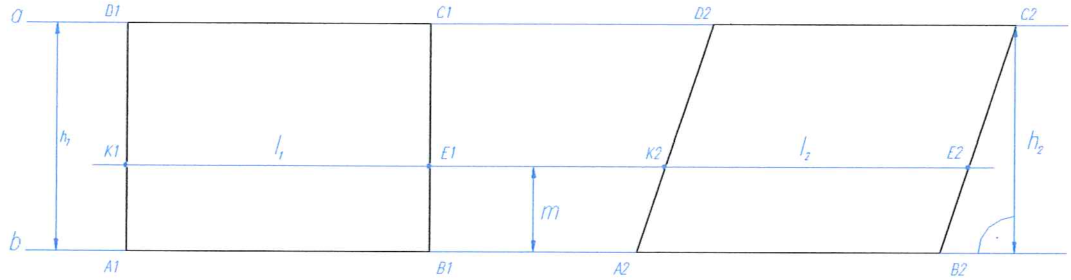
$$l_2 = \frac{2a_2 m}{h_2}$$

Korzystając z założenia, że przekątne tych czworokątów są równe, tzn. $h_1 = h_2$ i $a_1 = a_2$, pokazaliśmy że odcinki l_1 i l_2 są równe. W myśl więc zasady Cavalieriego, pola tych czworokątów są równe.

Przyjmując, że pole rombu jest znane i równe połowie iloczynu przekątnych, otrzymujemy pole deltoidu jako połowa iloczynu przekątnych.

2.3. Prostokąt i równoległobok.

Podobnie jak wyżej, umieśćmy prostokąt i równoległobok między prostymi równoległymi a i b jak pokazuje rysunek



Rys. 5

oraz przyjmijmy, że $A_1B_1 = A_2B_2$.

Przetnijmy te czworokąty na dowolnej wysokości m, prostą równoległą do a, otrzymując odcinki $l_1 = K_1E_1$ i $l_2 = K_2E_2$.

Oczywiście $l_1 = A_1B_1$ i $l_2 = A_2B_2$.

Ponieważ $A_1B_1 = A_2B_2$, więc $l_1 = l_2$.

Wobec tego, iż powyższe czworokąty umieściliśmy w ten sposób między prostymi a i b, mamy $h_1 = h_2$, ponadto $a_1 = A_1B_1 = A_2B_2 = a_2$, oraz wykazaliśmy, że $l_1 = l_2$, więc w myśl zasady Cavalieriego, pola tych czworokątów są równe.

Przyjmując jako znane pole prostokąta, otrzymaliśmy pole równoległoboku jako iloczyn długości boku i wysokości poprowadzonej do tego boku.

2.4. Deltoid i trójkąt równoramienny.

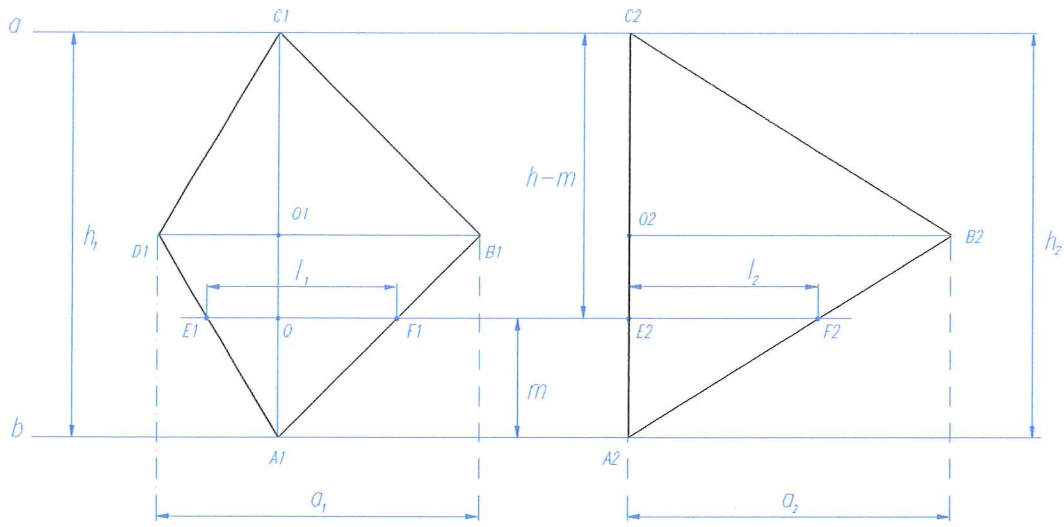
Rozważmy deltoid, którego jedna przekątna jest tej samej długości co wysokość trójkąta równoramiennego, a druga przekątna jest równa podstawie tego trójkąta.

Umieszczamy te figury między prostymi równoległymi a i b jak pokazuje rysunek 6.

Mamy więc: $D_1B_1 = a_1, O_2B_2 = a_2, a_1 = a_2$ oraz $A_1C_1 = h_1, A_2C_2 = h_2$ i $h_1 = h_2$

Przecinamy te dwie figury prostą równoległą do prostej a na dowolnej wysokości m i otrzymujemy odcinki $l_1 = E_1F_1$ i $l_2 = E_2F_2$.

Pokażemy, że $l_1 = l_2$.



Rys. 6

Korzystając z podobieństwa trójkątów $A_1F_1E_1$ i $A_1B_1D_1$ oraz $A_2E_2F_2$ i $A_2O_2B_2$ otrzymujemy:

$$\frac{E_1F_1}{A_1Q}=\frac{D_1B_1}{A_1O_1} \text{ i } \frac{E_2F_2}{A_2E_2}=\frac{O_2B_2}{O_2A_2}$$

Wobec przyjętych oznaczeń, mamy:

$$\frac{l_1}{m}=\frac{a_1}{\frac{1}{2}h_1} \text{ i } \frac{l_2}{m}=\frac{a_2}{\frac{1}{2}h_2}$$

czyli

$$l_1=\frac{2a_1m}{h_1} \text{ i } l_2=\frac{2a_2m}{h_2}$$

Ponieważ $h_1=h_2$ i $a_1=a_2$, więc $l_1=l_2$.

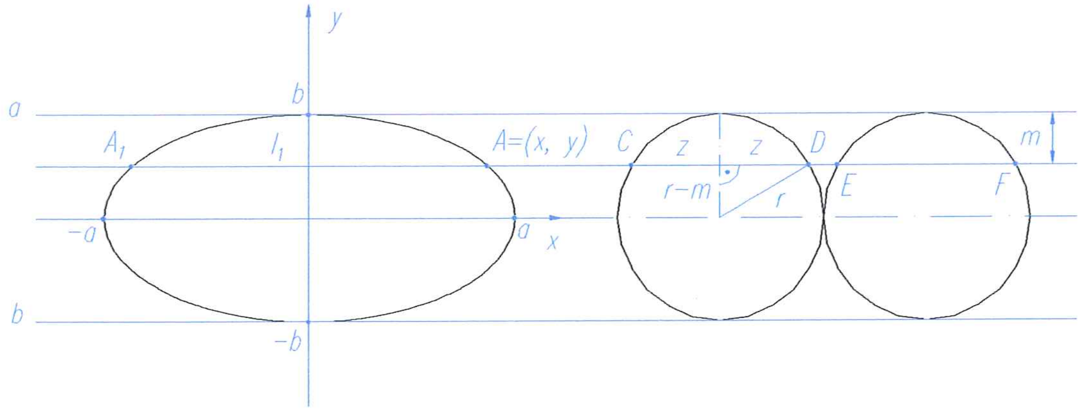
W myśl zatem zasady Cavalieriego, pola tych figur są równe.

2.5. Elipsa i dwa okręgi.

Rozważmy elipsę o długości osi $2a$ i $2b$ oraz parę kół o tym samym promieniu, stycznych zewnętrznie. Załóżmy ponadto: $a=2r$ i $b=r$ gdzie r jest promieniem tych kół. Umieśćmy te figury między prostymi równoległymi a i b jak na rysunku 7.

Jeżeli osie symetrii tej elipsy pokrywają się z osiami układu współrzędnych, to tę elipsę można zapisać równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Rys. 7

Przetnijmy te dwie figury prostą równoległą do a na dowolnej wysokości m. Otrzymaliśmy odcinki $l_1 = A_1A$ i $l_2 = CD + EF$.

Ponieważ promienie tych kół są równe, więc $CD = EF = 2z$.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$z = \sqrt{r^2 - (r-m)^2} = \sqrt{2rm - m^2}$$

zatem

$$l_2 = 4z = 4\sqrt{2rm - m^2}$$

Niech $A = (x, y)$, wtedy $l_1 = 2x$ i $x > 0, y = b - m$.

Ponieważ punkt A leży na elipsie, więc jego współrzędne spełniają równanie tej elipsy. Otrzymujemy więc:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(b-m)^2}{b^2} = 1$$

Korzystając z przyjętych warunków, że $a = 2r$ i $b = r$, mamy:

$$\frac{x^2}{4r^2} + \frac{(r-m)^2}{r^2} = 1$$

czyli

$$x^2 = 4r^2 - 4(r-m)^2$$
$$x^2 = 8rm - 4m^2$$
$$x^2 = 4(2mr - m^2)$$
$$x = 2\sqrt{2mr - m^2}$$

Zatem

$$l_1 = 4\sqrt{2mr - m^2}$$

Widzimy, że $l_1 = l_2$.

Stwierdzamy więc, w myśl zasady Cavalieriego, że pole elipsy jest równe sumie pól tak dobranych kół. Obliczmy zatem pole P_e elipsy o długościach osi $2a$ i 2b

$$P_e = 2\pi r^2 \text{, ale } r = b = \frac{1}{2}a$$

więc

$$P_{e=} = 2\pi rr$$

$$P_e = 2\pi \frac{1}{2}ab$$

$$P_e = \pi ab$$

Tak więc w bardzo prosty sposób, korzystając jedynie ze wzoru na pole koła, mogliśmy obliczyć pole elipsy. Oczywiście pewna trudność polega na dobraniu do jednej figury drugiej tak, aby spełnione były warunki Cavalieriego. Tym bardziej więc można podziwiać geniusz uczonych, którzy do takich wzorów dochodzili.

Poprawność otrzymanego wzoru możemy potwierdzić na przykład wykorzystując rachunek całkowy.

Weźmy jak wyżej elipsę o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wyznaczmy z tego równania y:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \lor y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

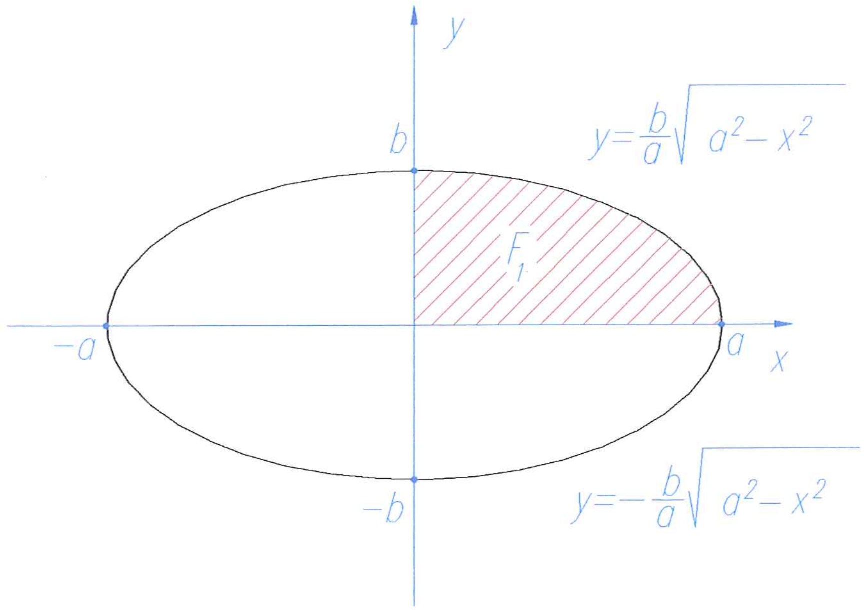
Wobec symetrii elipsy względem osi x i y zauważmy, że pole P_e elipsy jest 4 razy większe od pola figury zakreskowanej F_1.

Figura F_1 jest trapezem krzywoliniowym ograniczonym liniami:

$$x = 0, y = 0 \text{ i } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

czyli jej pole jest całką oznaczoną.

$$P_{F_1}=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$



Rys. 7a

Obliczam całkę nieoznaczoną:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

Wyznaczmy poszczególne całki nieoznaczone:

1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\left|\begin{array}{l}x=at\\ dx=adt\end{array}\right|=\int\frac{adt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}=\int\frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=arc\sin t=arc\sin\frac{x}{a}$$

2.

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\left|\begin{array}{l|l}u=x & u'=1\\ v'=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v=-\sqrt{a^2-x^2}\end{array}\right|=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Wracamy do naszej całki

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2arc\sin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Mamy więc:

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2arc\sin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}$$

czyli:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} arc\sin\frac{x}{a} + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2}$$

Zatem

$$P_{F_1} = \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2} arc\sin\frac{x}{a} + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a$$

$$P_{F_1} = \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2} arc\sin 1\right] = \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$P_{F_1} = \frac{\pi\, ab}{4}$$

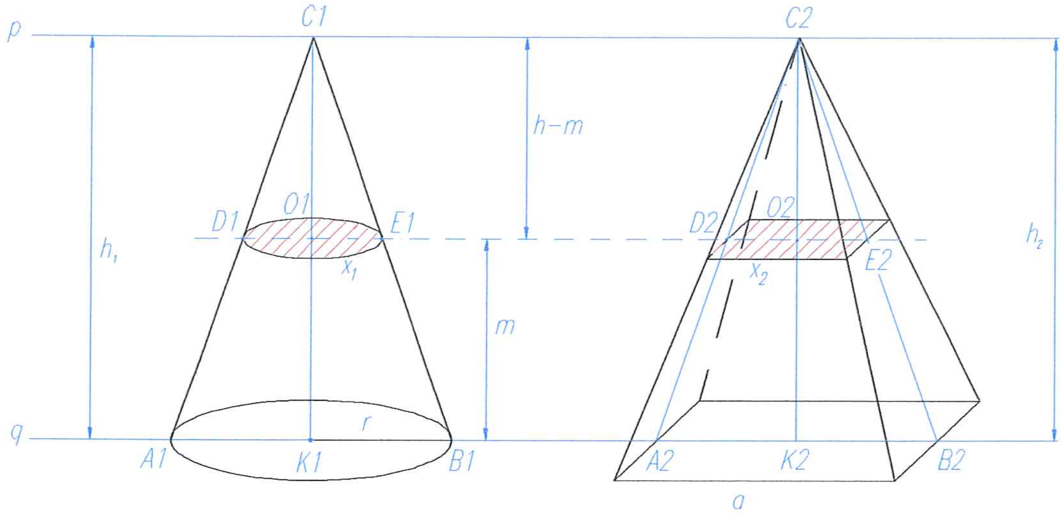
Ponieważ $P_e = 4P_{F_1}$, więc $P_e = \pi\, ab$

Jak widać wzór jest słuszny, jednak znalezienie go tym sposobem wymagało dokładnej znajomości rachunku całkowego, sposobów obliczania całek nieoznaczonych. Tutaj wykorzystaliśmy twierdzenie o całkowaniu przez podstawianie oraz twierdzenie o całkowaniu przez części. Można więc stwierdzić, że metoda Cavalieriego jest o tyle lepsza iż wymaga jedynie pewnej wiedzy elementarnej z matematyki.

3. Przykłady praktycznego zastosowania zasady Cavalieriego dla figur przestrzennych.

3.1. Stożek i ostrosłup prawidłowy czworokątny.

Weźmy pod uwagę stożek i ostrosłup prawidłowy czworokątny i umieśćmy je między płaszczyznami p i q do siebie równoległymi.



Rys. 8

Będzie wtedy spełniony warunek, że $h_1 = h_2$. Ponadto załóżmy, że pola podstaw P_1 i P_2 odpowiednio stożka i ostrosłupa są sobie równe.

Przetnijmy te dwie bryły płaszczyzną q odległą od podstaw o m. Obliczmy pola powstałych przekrojów $P_1^{'}$ i $P_2^{'}$. Niech promień przekroju stożka wynosi x_1, a bok przekroju ostrosłupa x_2.

Korzystając z podobieństwa trójkątów $C_1O_1E_1$ i $C_1K_1B_1$ oraz $C_2O_2E_2$ i $C_2K_2B_2$ otrzymujemy:

$$\frac{h_1 - m}{x_1} = \frac{h_1}{r} \quad \text{i} \quad \frac{h_2 - m}{\frac{1}{2}x_2} = \frac{h_2}{\frac{1}{2}a}$$

$$x_1 = \frac{r(h_1 - m)}{h_1} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{a(h_2 - m)}{h_2}$$

Wiemy, że $h_1 = h_2$; znajdziemy związek między r i h wiedząc, że $P_1 = \pi r^2$ i $P_2 = a^2$ są równe.

$$\pi r^2 = a^2$$
$$a = r\sqrt{\pi}$$

Mamy więc:

$$x_2 = \frac{r\sqrt{\pi}(h_1 - m)}{h_1}$$

stąd

$$P_1' = \pi x_1^2 = \pi \cdot \frac{r^2(h_1 - m)^2}{h_1^2}$$

natomiast

$$P_2' = x_2^2 = \frac{\pi r^2(h_1 - m)^2}{h_1^2}$$

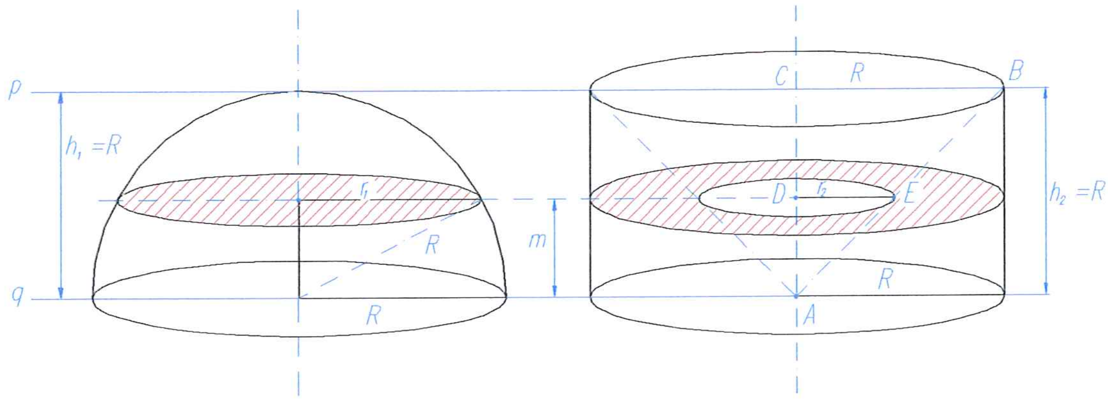
Widzimy więc, że $P_1' = P_2'$.

Ponieważ $h_1 = h_2$ i $P_1 = P_2$ oraz pola przekrojów tych figur są sobie równe, więc ich objętości, w myśl zasady Cavalieriego, są sobie równe.

Przyjmując, że objętość jednej z tych figur jest znana, można obliczyć objętość drugiej. Ponieważ jednak objętość tych brył są powszechnie znane, pomijamy te obliczenia.

3.2. Półkula i walec z wyciętym stożkiem.

Rozpatrzmy półkulę o promieniu R oraz walec o promieniu podstawy R i wysokości $h=R$.



Rys. 9

Umieszczając te dwie figury między płaszczyznami p i q do siebie równoległymi będzie spełniony warunek, że $h_1 = h_2 = R$ oraz $P_1 = P_2$, gdzie P_1 i P_2 są odpowiednio polami podstaw półkuli i walca. W walcu wycinamy stożek jak pokazuje rysunek 9.

Przetnijmy obie bryły, tzn. półkulę i walec z wyciętym stożkiem, płaszczyzną równoległą do płaszczyzny p na dowolnej wysokości m. Otrzymujemy w przekroju odpowiednio koło o promieniu r_1 oraz pierścień o promieniach r_2 i R. Pokażemy, że pola tych przekrojów są sobie równe. Niech pole koła o promieniu r_1 wynosi $P_1^{'}$, a pole pierścienia o promieniach r_2 i R wynosi $P_2^{'}$.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczymy r_1:

$$r_1^2 = R^2 - m^2$$

wtedy

$$P_1^{'} = \pi\, r_1^2 = \pi \left(R^2 - m^2\right).$$

Korzystając z podobieństwa trójkątów ADE i ACB obliczamy r_2:

$$\frac{r_2}{m} = \frac{R}{R}$$

więc

$$r_2 = m$$

zatem

$$P_2^{'} = \pi\, R^2 - \pi\, r_2^2 = \pi \left(R^2 - m^2\right)$$

Widzimy więc, że $P_1^{'} = P_2^{'}$.

W myśl zasady Cavalieriego, objętości tych brył są równe.

Obliczmy zatem objętość półkuli, zakładając, że znane są objętości walca i stożka.

Niech V_p oznacza objętość półkuli, V_w - objętość walca, V_s - objętość stożka.

$$V_p = V_w - V_s$$

$$V_p = \pi\, R^2 R - \tfrac{1}{3}\pi\, R^2 R = \pi\, R^3 - \tfrac{1}{3}\pi\, R^3 = \tfrac{2}{3}\pi\, R^3$$

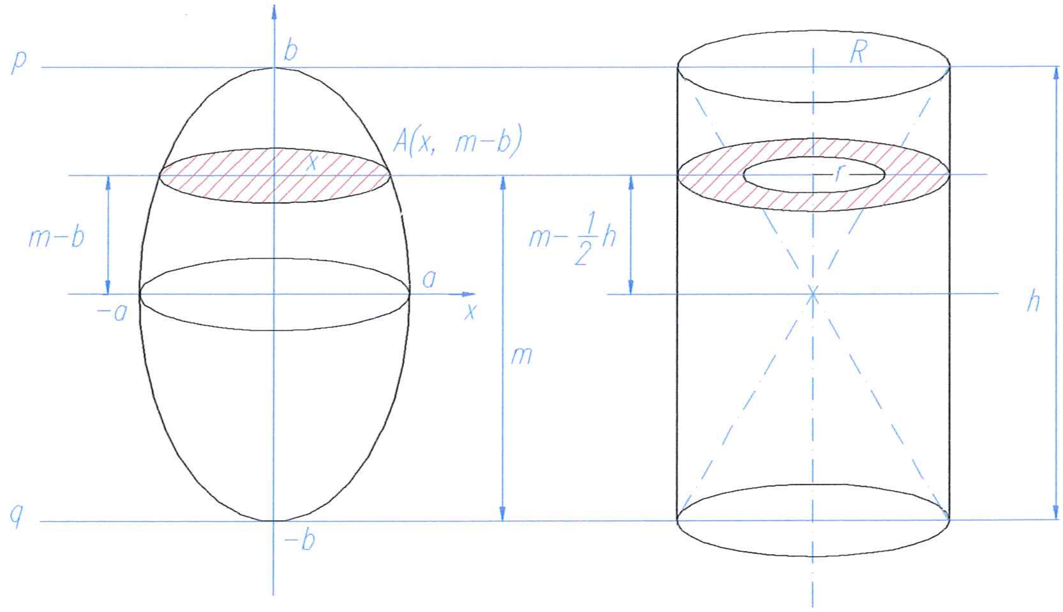
Tak więc w bardzo prosty sposób można obliczyć objętość półkuli, a co za tym idzie, objętość kuli.

3.3. Elipsoida i walec z wyciętymi stożkami.

Elipsoida jest bryłą powstałą w wyniku obrotu elipsy wokół jej symetrii. Rozpatrzmy więc elipsę o długościach osi *2a* i *2b*, czyli elipsę o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

i obróćmy ją wokół osi rzędnych otrzymując elipsoidę



Rys. 10

Do tej elipsoidy dobierzmy walec z wyciętymi stożkami tak, by spełnione były warunki Cavalieriego. Oznacza to, że obie bryły zawarte są między płaszczyznami p i q do siebie równoległymi oraz, że wysokość h walca jest równa $2b$ a promień R podstawy walca jest równy a.

Przetnijmy obie bryły płaszczyzną równoległą do płaszczyzny p na dowolnej wysokości m. Wtedy przekrojem elipsoidy będzie koło o promieniu x , a przekrojem drugiej bryły będzie pierścień o promieniach r i R. Umieszczając elipsę w układzie współrzędnych otrzymujemy w przecięciu z płaszczyzną punkt $A=(x, m\text{-}b)$. Skoro punkt A leży na elipsie, więc jego współrzędne spełniają równanie tej elipsy.

Mamy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(m-b)^2}{b^2}=1$$

Z tego równania obliczmy x

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{m^2-2mb+b^2}{b^2}$$

$$x^2=\frac{b^2a^2-a^2\left(m^2-2mb+b^2\right)}{b^2}$$

$$x^2 = \frac{a^2\left(2mb - m^2\right)}{b^2}$$

Mając x, możemy obliczyć pole P_k przekroju elipsoidy

$$P_k = \pi x^2 = \frac{\pi a^2}{b^2}\left(2mb - m^2\right)$$

$$P_k = \frac{\pi ma^2(2b - m)}{b^2}$$

Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów obliczamy r:

$$\frac{r}{m - \frac{1}{2}h} = \frac{R}{\frac{1}{2}h}$$

$$r = \frac{R\left(m - \frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h}$$

$$r = \frac{R(2m - h)}{h}$$

Wiedząc, że $R = a$ i $h = 2b$, otrzymujemy:

$$r = \frac{a(2m - 2b)}{2b}$$

$$r = \frac{a(m - b)}{b}$$

Mając obliczone r, możemy już obliczyć pole P_p przekroju drugiej bryły, czyli pole pierścienia.

$$P_p = \pi R^2 - \pi r^2 \quad \wedge \quad R = a$$

$$P_p = \pi\left(a^2 - \frac{a^2(m - b)^2}{b^2}\right)$$

$$P_p = \pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - \left(m^2 - 2mb + b^2\right)\right)$$

$$P_p = \pi\frac{a^2}{b^2}\left(2mb - m^2\right)$$

$$P_p = \frac{\pi ma^2(2b - m)}{b^2}$$

Ponieważ pola przekrojów P_k i P_p są równe więc w myśl zasady Cavalieriego, objętości tych brył są równe. Obliczmy zatem objętość V_e elipsoidy powstałej z obrotu elipsy o długościach osi $2a$ i $2b$ przyjmując, że objętości V_w i V_s walca i stożka są znane.

$$V_e = V_w - 2V_s, \text{ oraz } R = a,\ h = 2b$$

$$V_w = \pi R^2 h = \pi a^2 2b = 2\pi a^2 b$$

$$V_s = \tfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{6}\pi a^2 \cdot 2b = \tfrac{1}{3}\pi a^2 b$$

$$V_e = 2\pi a^2 b - \tfrac{2}{3}\pi a^2 b$$

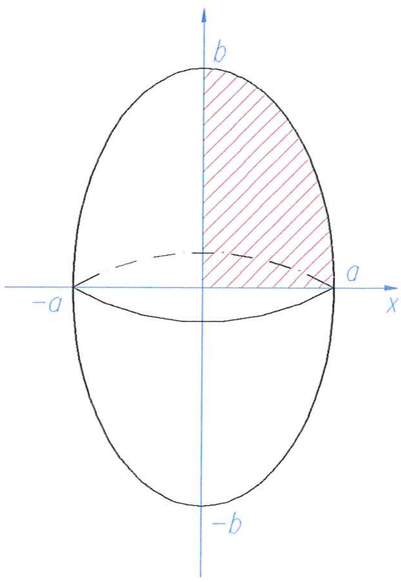
$$V_e = \tfrac{4}{3}\pi a^2 b$$

Jako, że elipsoida jest mniej znaną bryłą, jej objętość nie jest tak znana jak na przykład objętość walca, sprawdźmy więc w oparciu o rachunek całkowy słuszność otrzymanego wzoru.

Rozpatrzmy elipsę jak wyżej, o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i obróćmy ją wokół osi OY.



Rys. 10a

Wtedy objętość otrzymanej elipsoidy jest dwa razy większa od $\pi \int_0^b x^2 dy$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right)$$

$$V_e = 2\pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right)dy = \frac{2\pi\, a^2}{b^2}\int_0^b \left(b^2 - y^2\right)dy = \frac{2\pi\, a^2}{b^2}\left[b^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\right]_0^b =$$

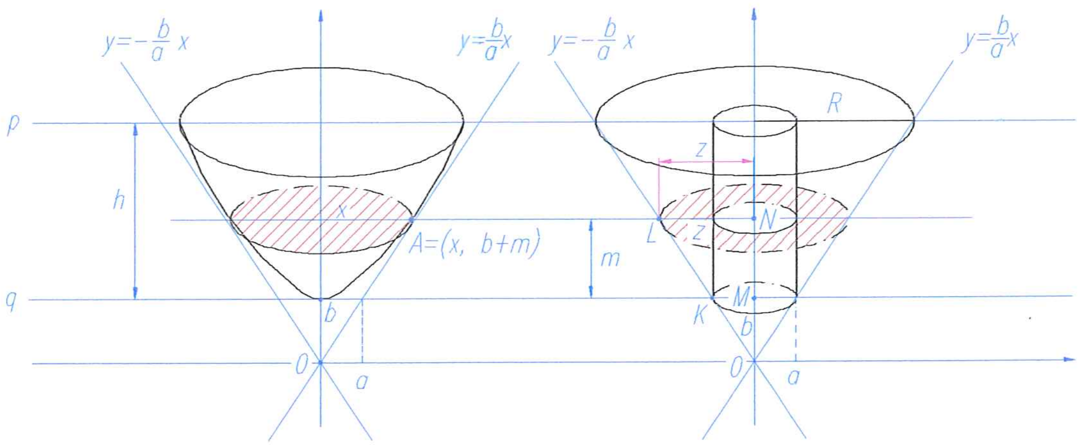
$$= \frac{2\pi\, a^2}{b^2}\left(b^3 - \tfrac{1}{3} b^3\right) = \tfrac{4}{3}\pi \frac{a^2}{b^2}\cdot b^3 = \tfrac{4}{3}\pi\, a^2 b$$

Jak widać, otrzymany wcześniej wzór na objętość elipsoidy jest słuszny.

3.4. Hiperboloida i stożek ścięty z wydrążonym walcem.

Hiperboloida powstaje przez obrót hiperboli dokoła jej „wewnętrznej" osi symetrii. Rozpatrzmy zatem hiperbolę o długościach osi $2a$ i $2b$ czyli hiperbolę o równaniu:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



Rys. 11

Asymptotami tej hiperboli są proste o równaniach $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$. Jej wierzchołki znajdują się w punktach $(0, b)$ i $(0, -b)$. Weźmy pod uwagę jedną gałąź hiperboli o wysokości h leżącą powyżej osi odciętych i obróćmy ją wokół osi y otrzymując hiperboloidę. Do tej hiperboloidy dobieramy stożek ścięty z wydrążonym walcem tak, by spełnione były warunki Cavalieriego.

Hiperboloida, stożek ścięty i walec mają taką samą wysokość h. Promień podstawy walca jest równy promieniowi b jednej (mniejszej) podstawy stożka.

Obie bryły przecinamy płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy stożka na dowolnej wysokości m otrzymując przekroje P_k i P_p odpowiednio hiperboloidy i stożka ściętego z wydrążonym walcem. P_k jest polem koła o promieniu x a P_p polem pierścienia o promieniach a i z.

Obliczamy kolejno x i z.

Otrzymany w przecięciu płaszczyzny z hiperbolą punkt A ma współrzędne: x i $m+b$.

Mamy:

$$\frac{(m+b)^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{(m+b)^2}{b^2}-1$$

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}\left(m^2+2mb\right)$$

Zatem

$$P_k=\pi x^2, \text{czyli}$$

$$P_k=\frac{\pi a^2}{b^2}\left(m^2+2mb\right).$$

Ponieważ trójkąty LNO i LZK są podobne, oraz $LN=z, NO=m+b, LZ=z-a$ i $ZK=m$, mamy:

$$\frac{z}{m+b}=\frac{z-a}{m}$$

$$zm=mz-ma+zb-ab$$

$$zb=ma+ab$$

$$z=\frac{a(m+b)}{b}$$

Obliczamy pole P_p przekroju stożka ściętego z wyciętym walcem:

$$P_p=\pi z^2-\pi a^2$$

$$P_p=\pi\left(\frac{a^2}{b^2}\left(m^2+2mb+b^2\right)-a^2\right)$$

$$P_p=\pi\frac{a^2}{b^2}\left(m^2+2mb+b^2-b^2\right)$$

$$P_p=\pi\frac{a^2}{b^2}\left(m^2+2mb\right).$$

Ponieważ pola przekrojów P_k i P_p są równe, więc w myśl zasady Cavalieriego, objętości rozpatrywanych brył są równe. Możemy zatem znaleźć wzór na objętość V_h hiperboloidy o wysokości h, zakładając, że objętości stożka ściętego i walca są znane.

Przypomnijmy, że objętość stożka ściętego o promieniach podstawy r i R i wysokości h, wyraża się wzorem:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\, h\left(R^2 + rR + h^2\right).$$

U nas $r = a$, natomiast R znajdziemy wykorzystując podobieństwo trójkątów:

$$\frac{R}{h+b} = \frac{a}{b}$$

$$R = \frac{a}{b}(h+b).$$

Zatem

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left[\frac{a^2}{b^2}\left(h^2 + 2hb + b^2\right) + \frac{a^2}{b}(h+b) + a^2\right]$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\frac{a^2}{b^2}\left(h^2 + 2hb + b^2 + hb + b^2 + b^2\right)$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\frac{a^2}{b^2}\left(3b^2 + 3hb + h^2\right).$$

Objętość walca zgodnie z przyjętymi oznaczeniami wynosi:

$$V_w = \pi\, a^2 h.$$

Obliczamy więc objętość V_h hiperboloidy:

$$V_h = V - V_w$$

$$V_h = \tfrac{1}{3}\pi h\frac{a^2}{b^2}\left(3b^2 + 3hb + h^2\right) - \pi\, a^2 h$$

$$V_h = \tfrac{1}{3}\pi h\frac{a^2}{b^2}\left(3b^2 + 3hb + h^2 - 3b^2\right)$$

$$V_h = \tfrac{1}{3}\pi h\frac{a^2}{b^2}\left(3hb + h^2\right)$$

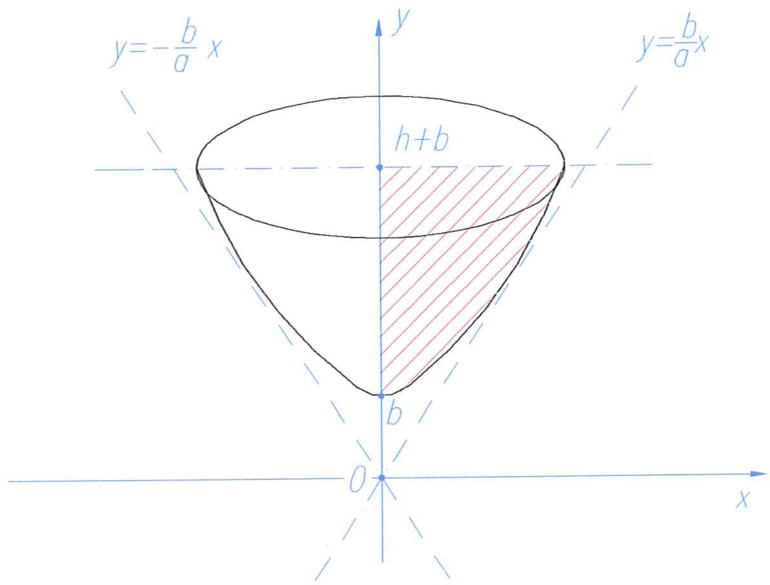
$$V_h = \tfrac{1}{3}\pi h^2\frac{a^2}{b^2}(3b + h)$$

W szczególności, jeśli hiperbola jest równoosiowa, tzn. $a = b$, to:

$$V_h = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3b + h).$$

Sprawdźmy, w oparciu o rachunek całkowy, czy otrzymany wzór jest prawdziwy.

Weźmy więc hiperbolę o równaniu $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ i obróćmy ją wokół osi OY jak pokazuje rysunek.



Rys. 11a

Wtedy objętość V_h hiperboloidy jest równa $\pi\int\limits_b^{h+b} x^2 dy$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

$$x^2=\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)a^2$$

$$V_h=\pi\int\limits_b^{h+b} a^2\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)dy$$

$$V_h=\pi\, a^2\left[\frac{1}{3b^2}y^3-y\right]_b^{h+b}$$

$$V_h=\pi\, a^2\left[\frac{(h+b)^3}{3b^2}-h-b-\frac{b^3}{3b^2}+b\right]$$

$$V_h=\pi\, a^2\frac{h^3+3h^2b+3hb^2+b^3-3hb^2-b^3}{3b^2}$$

$$V_h=\frac{\pi\, ha^2}{3b^2}\left(h^2+3hb\right)$$

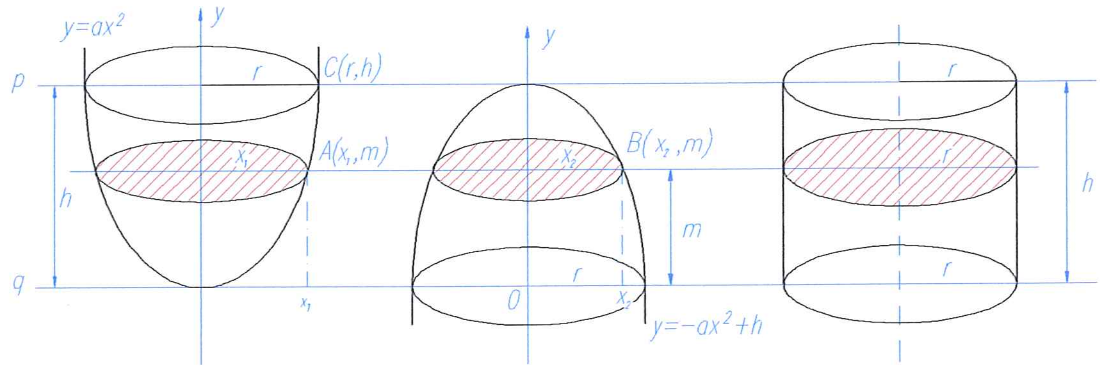
$$V_h = \frac{\pi h^2 a^2}{3b^2}(h + 3b).$$

Widzimy, że istotnie, otrzymany wcześniej wzór na objętość hiperboloidy jest słuszny.

3.5. Paraboloidy i walec.

Paraboloida powstaje w wyniku obrotu paraboli wokół jej osi symetrii.

Rozpatrzmy dwie figury. Jedną, będącą sumą dwóch paraboloid do siebie przystających, drugą walcem.



Rys. 12

Wymiary tych figur muszą być tak dobrane, by spełnione były warunki Cavalieriego. Weźmy zatem jedną parabolę o równaniu $y = ax^2$, a drugą o równaniu $y = -ax^2$. Umieśćmy te paraboloidy między płaszczyznami *p* i *q* do siebie równoległymi, odległymi od siebie o *h*. Między płaszczyznami *p* i *q* umieszczamy również walec o promieniu podstawy *r* i wysokości *h*, jak pokazuje *rysunek 12*.

Przetnijmy te figury (paraboloidy i walec) płaszczyzną równoległą do płaszczyzny *p* na dowolnej wysokości *m* otrzymując przekroje P_1 i P_2.

P_1 jest sumą pól dwóch kół o promieniach odpowiednio x_1 i x_2, natomiast P_2 jest polem koła o promieniu *r*.

$$P_2 = \pi r^2.$$

Do obliczenia pola P_1 potrzebne są nam x_1 i x_2. Ponieważ punkt *A* leży na paraboli $y = ax^2$, więc

$$m = ax_1^2$$

czyli

$$x_1^2 = \frac{m}{a}$$

Punkt B leży na paraboli $y = -ax^2 + h$, więc

$$m = -ax_2^2 + h$$

$$x_2^2 = \frac{h-m}{a}$$

Obliczamy P_1:

$$P_1 = \pi\, x_1^2 + \pi\, x_2^2$$

$$P_1 = \pi\left(\frac{m}{a} + \frac{h-m}{a}\right)$$

$$P_1 = \pi\frac{h}{a}$$

Znajdujmy ponadto związek między promieniem r podstawy walca (jak i paraboloidy) oraz a i h. Ponieważ punkt $C = (r, h)$ leży na paraboli $y = ax^2$, więc

$$h = ar^2$$

czyli

$$r^2 = \frac{h}{a}.$$

Wobec tego pole przekroju walca jest równe

$$P_2 = \pi\frac{h}{a}.$$

Widzimy więc, że $P_1 = P_2$. Stąd, w myśl zasady Cavalieriego, objętości rozpatrywanych brył są równe.

Niech V_p oznacza objętość jednej paraboloidy o wysokości h, powstałej w wyniku obrotu paraboli $y = ax^2$ wokół osi y.

Na podstawie powyższych rozważań mamy:

$$2V_p = V_w$$

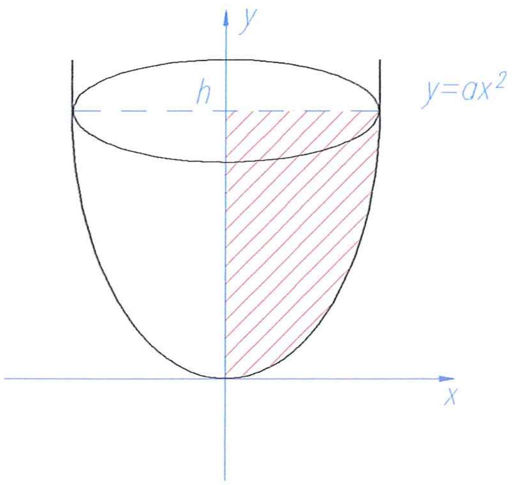
$$2V_p = \pi\, r^2 h$$

Wiedząc, że $r^2 = \frac{h}{a}$, otrzymujemy:

$$2V_p = \pi\frac{h}{a}h$$

$$V_p = \frac{\pi\, h^2}{2a}$$

Słuszność otrzymanego wzoru łatwo można potwierdzić w oparciu o rachunek całkowy. Mianowicie obracamy zakreskowaną figurę wokół osi rzędnych.



Rys. 12a

Wtedy objętość V_b jest równa;

$$V_b = \pi \int_0^h x^2 dy$$

$$V_b = \pi \int_0^h \left(\frac{y}{a}\right) dy$$

$$V_b = \pi \frac{1}{a}\left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^h$$

$$V_b = \frac{\pi}{a}\frac{h^2}{2}$$

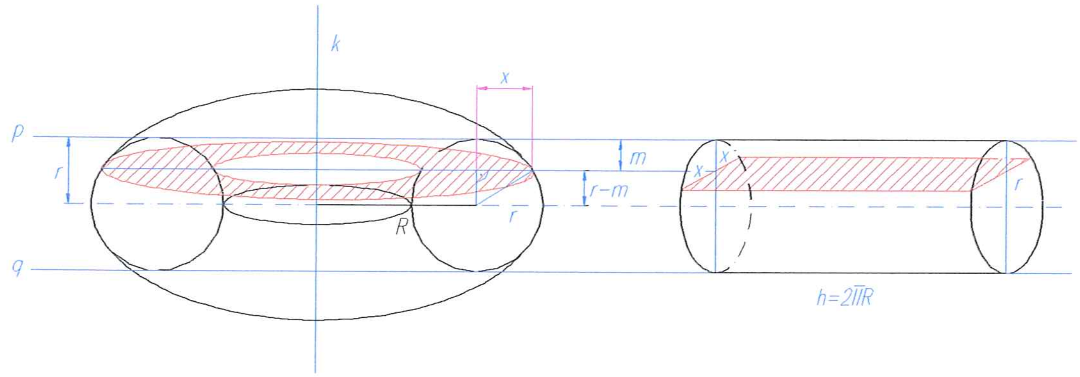
$$V_b = \frac{\pi\, h^2}{2a}.$$

3.6. Torus i walec.

Torus jest bryłą powstałą w wyniku obrotu koła wokół prostej zewnętrznej z tym kołem. Modelem totusa jest dętka samochodowa.

Weźmy koło o promieniu r oraz prostą, odległą od środka tego koła o R $(R > r)$. Obracając to koło wokół prostej otrzymamy właśnie torus. Następnie rozpatrzmy walec o promieniu podstawy r i wysokości $h = 2\pi\, R$.

Wymienione figury umieszczamy między dwiema równoległymi płaszczyznami p i q odległymi od siebie o $2r$ jak na rysunku 13.



Rys. 13

Przetnijmy torus i walec płaszczyzną równoległą do płaszczyzny p na dowolnej wysokości m. Przekrojem walca będzie prostokąt o wymiarach $2x$ i h, natomiast przekrojem torusa będzie pierścień o promieniach $R+x$ i $R-x$.

Niech P_1 oznacza pole przekroju torusa, a P_2 pole przekroju walca, wtedy:

$$P_1 = \pi\,(R+x)^2 - \pi\,(R-x)^2$$

$$P_1 = \pi\,[(R+x)-(R-x)]\cdot[(R+x)+(R-x)]$$

$$P_1 = \pi\,2x2R$$

$$P_1 = 4\pi\,Rx$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczymy x:

$$x^2 = r^2 - (r-m)^2$$

$$x^2 = 2mr - m^2$$

$$x = \sqrt{2mr - m^2}$$

Zatem

$$P_1 = 4\pi\,R\sqrt{2mr - m^2}$$

Pole przekroju walca P_2 wynosi:

$$P_2 = 2xh$$

$$P_2 = 2\sqrt{2mr - m^2}\cdot 2\pi\,R$$

$$P_2 = 4\pi\,R\sqrt{2mr - m^2}$$

Widzimy więc, że $P_1 = P_2$.

Wobec tego, iż spełnione są warunki Cavalieriego, objętości obu brył są równe. Obliczmy więc objętość torusa powstałego w wyniku obrotu koła o promieniu r wokół prostej odległej od środka tego koła o R, gdzie $R > r$.

Niech V_t oznacza objętość torusa. Wtedy:

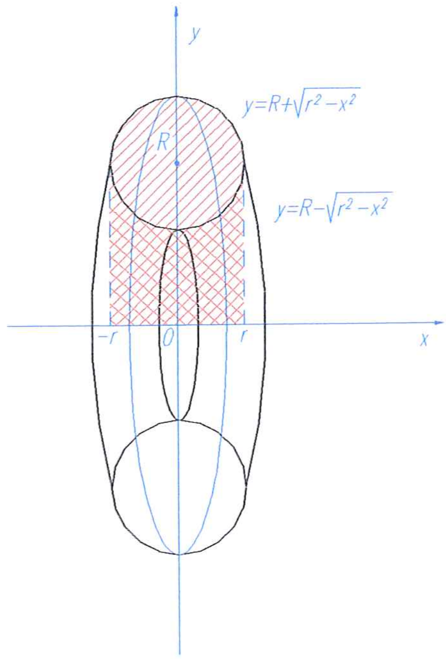
$$V_t = V_w$$

$$V_t = \pi r^2 h, \quad h = 2\pi R$$

$$V_t = 2\pi^2 r^2 R.$$

Prawdziwość otrzymanego wzoru możemy potwierdzić w oparciu o rachunek całkowy.

Weźmy pod uwagę koło ograniczone okręgiem o równaniu $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ albo też dwoma półokręgami o równaniach $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ i $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$. Objętość torusa będzie różnicą objętości brył powstałych w wyniku obrotu trapezów krzywoliniowych.



Rys. 13a

Jeden z trapezów jest ograniczony liniami:

$$y = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \; x = -r, \; x = r \text{ i } y = 0$$

a drugi liniami:

$$y = R - \sqrt{r^2 - x^2}, \; x = -r, \; x = r \text{ i } y = 0$$

Zatem

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 arc\sin\frac{x}{r} + \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Możemy więc obliczyć całkę oznaczoną:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 arc\sin\frac{x}{r} + \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2}\right]_0^r = \frac{1}{2}r^2 arc\sin 1 = \frac{1}{2}r^2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4}$$

Zatem

$$V_t = 8\pi R\frac{\pi r^2}{4}$$

$$V_t = 2\pi^2 Rr^2.$$

Widzimy więc, że w oparciu o rachunek całkowy otrzymaliśmy taki sam wzór na objętość torusa.

4. Podsumowanie.

W pracy tej pokazano w jaki sposób można obliczyć pola niektórych, mniej znanych, figur płaskich oraz w jaki sposób obliczyć objętości niektórych brył.
Chodzi o umiejętne wykorzystanie matematyki elementarnej jak podobieństwo trójkątów, twierdzenie Pitagorasa, ewentualnie twierdzenie Talesa. Takie metody dochodzenia do wzorów np. na pole elipsy, pole deltoidu, czy też do wzorów na objętości niektórych brył obrotowych, można stosować nawet w szkole podstawowej. Z tego też względu metoda Cavalieriego powinna być częściej stosowana, a to oznacza, że z tą metodą można zapoznawać uczniów klas starszych szkoły podstawowej, a w szkole średniej metoda ta powinna być znana dobrze.

5. Bibliografia.

1. Bolesław Iwaszkiewicz „Geometria elementarna".
2. Marek Kordos „Wykłady z historii matematyki".
3. Historia matematyki cz. II.

Spis treści