

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: nauczycielska

Marcin Kędzierski

Parkietaże półobrotowe na sferze

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2024

Spis treści

Wstęp	4
1 Wstęp teoretyczny	5
1.1 Geometria na sferze	5
1.2 Trochę o pokryciu sfery płytkami	9
2 Jakie kształty muszą mieć nasze płytki, aby za ich pomocą ułożyć parkietaż pólbrotnowy na sferze?	11
2.1 Parkietaż z dwukątów sferycznych	11
2.2 Jak to będzie dla innych wielokątów?	11
2.3 Parkietaż z trójkątów sferycznych	14
2.3.1 Trzy trójkąty wokół wierzchołka parkietażu	15
2.3.2 Cztery trójkąty wokół wierzchołka parkietażu	15
2.3.3 Pięć trójkątów wokół wierzchołka parkietażu	16
2.3.4 Dla sześciu trójkątów	17
2.3.5 Dla siedmiu trójkątów i więcej	17
2.4 Parkietaż z czworokątów sferycznych	18
2.4.1 Trzy czworokąty wokół wierzchołka parkietażu	18
2.4.2 Dla czterech czworokątów wokół wierzchołka parkietażu	19
2.4.3 Dla pięciu i więcej czworokątów	19
2.5 Parkietaż z pięciokątów sferycznych	20
2.5.1 Trzy pięciokąty wokół wierzchołka parkietażu	20
2.5.2 Dla czterech pięciokątów	21
2.5.3 Dla pięciu i więcej pięciokątów wokół wierzchołka parkietażu	21
2.6 Co z innymi wielokątami	22
3 Realizacja parkietaży pólbrotnowych na sferze	23
3.1 Istnienie płytki	23
3.2 Przekształcenie promieniste	23
3.2.1 Przekształcenie promieniste zachowuje przystawanie boków	25
3.2.2 Przekształcenie promieniste przekształca foremny wielokąt o wierzchołkach na sferze w wielokąt sferyczny o jednakowych kątach	25
3.2.3 Co dalej?	26
3.3 Bryły platońskie a szukane parkietaże	27
3.3.1 Konstrukcja trójkąta sferycznego $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ i odpowiadającego mu parkietażu pólbrotnowego	27
3.3.2 Konstrukcja trójkąta sferycznego $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$ i odpowiadającemu mu parkietażu pólbrotnowego.	28
3.3.3 Konstrukcja sferycznego czworokąta foremnego $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ i odpowiadającego mu parkietażu pólbrotnowego.	28
3.3.4 Konstrukcja sferycznego pięciokąta foremnego $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ i odpowiadającego mu parkietażu pólbrotnowego	29
4 Trójkąty sferyczne o sumie miar kątów równej 2π	30
4.1 Istnienie płytki	30
4.2 Konstrukcja parkietażu	32
4.3 Podsumowanie	35

5	Podsumowanie	36
5.1	Parkietaże pólóbrotowe z dwukątów sferycznych	36
5.2	Parkietaże pólóbrotowe skonstruowane za pomocą brył platońskich	36
5.2.1	Parkietaż utworzony z trójkątów sferycznych $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	37
5.2.2	Parkietaż utworzony z trójkątów sferycznych $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$	37
5.2.3	Parkietaż utworzony z czworokątów sferycznych $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	38
5.2.4	Parkietaż utworzony z foremnych pięciokątów sferycznych $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	38
5.3	Parkietaże pólóbrotowe z trójkątów sferycznych o kątach rozwartych, takich, że ich suma jest równa 2π	39
	Bibliografia	40

Wstęp

W mojej pracy magisterskiej chciałbym poruszyć problem parkietaży półobrotowych na sferze. Parkietaż półobrotowy na sferze, to takie pokrycie sfery płytkami, w której dowolne dwie sąsiadujące ze sobą płytki są swoimi obrazami, powstający przez obrót o 180° względem środka ich wspólnego boku.

Głównym celem niniejszej pracy jest sklasyfikowanie wszystkich możliwych parkietaży półobrotowych na sferze.

Aby to uczynić, w pierwszym rozdziale wprowadzimy podstawowe informacje na temat geometrii sferycznej oraz z podstawowe pojęcia na temat parkietażu półobrotowego, z których będziemy w dalszej części pracy korzystać.

Następnie w rozdziale drugim zajmiemy się ustaleniem jakie płytki potencjalnie nadają się na użycie ich do skonstruowania parkietażu półobrotowego na sferze.

W rozdziale trzecim i czwartym pokażemy, że znalezione w rozdziale drugim płytki możemy użyć do skonstruowania parkietażu półobrotowego na sferze.

Na koniec w rozdziale piątym raz jeszcze przedstawimy klasyfikację wszystkich parkietaży półobrotowych na sferze.

W tym miejscu chciałbym jeszcze serdecznie podziękować promotorowi niniejszej pracy, Panu Jackowi Świątkowskiemu, za wszelką pomoc, wskazówki, poświęcony czas, życzliwość i dużą dozę wyrozumiałości dla mnie.

1 Wstęp teoretyczny

Przed wyruszeniem w podróż, zazwyczaj poświęcamy chwilę czasu na spakowanie się. Pakujemy ubrania, bieliznę, jedzenie i różne inne rzeczy, które mogą się nam przydać, gdy dotrzemy do upragnionego miejsca.

Z podobnych przyczyn powstał ten oto rozdział. Aby się na chwilę zatrzymać i przygotować się do zbliżającej podróży. Będzie to podróż w głąb matematyki. W trakcie podróży będziemy szukać sposobów na pokrycie sfery (powierzchni kuli) płytkami w pewien specyficzny sposób.

1.1 Geometria na sferze

Podróż po sferze. Żeby się dobrze przygotować do takiej niecodziennej wycieczki warto się zapytać czy przypadkiem nie byliśmy wcześniej w podobnym miejscu.

Coś podobnego do sfery...Po chwili dochodzi do nas fakt, że nasz dom – Ziemia jest dobrym przykładem. Oczywiście znajdują się tacy, którzy zaczną krzyczeć, że Ziemia nie jest kulą, tylko geoidą, więc musimy szukać dalej. Na szczęście mają tylko po części rację. Ziemia nie jest kulą, ale ma kształt zbliżony do kuli i to nam w zupełności wystarczy.

Trudno nam jednak poczuć namacalnie kulistość naszej planety. Nie zauważamy jej, gdy budząc się patrzymy przez okno, lub gdy rano wychodzimy z psem na spacer. Jest dla nas po prostu zbyt ogromna. Niektórym się wręcz wydaje, że Ziemia jest płaska! Aby ominąć tą drobną niedogodność, spróbujmy zmniejszyć naszą Ziemię na przykład, aby była tak samo wielka jak asteroida na której mieszkał Mały Książę.



Rysunek 1: Mały Książę na swej asteroidzie
Obraz pobrany z [5]

Gdy wybraliśmy już swe miejsce docelowe, to pozostało nam jedynie tam się wybrać! W jaki sposób? Na te pytanie niech każdy odpowie sobie sam! Przejdźmy od razu do sytuacji, gdy postawiliśmy już pierwszy krok na nowym lądzie i co więcej spotkaliśmy już „władcę” tej planety. Mały Książę zaprowadza nas do swej oblubienicy Róży. Gospodarz planety dba o swojego gościa, wobec tego wybrał on najkrótszą drogę, czyli jaką? Jaką drogę wybrał? Pierwszą rzeczą która przychodzi nam na myśl, to użycie wzoru na odległość pomiędzy dwoma punktami w przestrzeni. Zakładamy, że znamy współrzędne gdzie

się oni teraz znajdują, podstawiamy do wzoru i już. Niestety nie jest tak łatwo. Po chwili możemy zauważyć, że ten pomysł zakłada, że nie jesteśmy ludźmi tylko kretami, gdyż całą drogę byśmy musieli przejść pod ziemią na co nie możemy się zgodzić (My chcemy kroczyć po sferze).

Może powinniśmy podejść do tego zadania z innej strony. Zastanówmy się, czy może jest coś co te punkty łączy. Tak jest jedna rzecz! Oba punkty leżą na jednej sferze, a więc są one równoodległe od środka sfery. Wówczas możemy poprowadzić przez te dwa punkty okrąg którego środek będzie środkiem sfery.

Takie okręgi będziemy nazywać **okręgami wielkimi**.

Definicja 1.1. *Okręgiem wielkim będziemy nazywać przekrój sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek.*

Przypomnijmy, że chcieliśmy dowiedzieć się w jakiej odległości znajduje się Mały Książę od róży. Wiemy, że przez te dwa punkty przechodzi okrąg wielki. Warto byłoby się zapytać, czy może istnieje więcej niż jeden taki okrąg i co jeszcze ważniejsze, czy istnieje inna krótsza droga.

Na początek spróbujmy odpowiedzieć na pierwsze pytanie. Wyobraźmy sobie, że Książę znajduje się na jednym biegunie planety, a róża na drugim. Wówczas istnieje nieskończenie wiele okręgów wielkich przechodzących przez te dwa punkty (południki tej planety). Takie punkty będziemy nazywać **punktami antypodycznymi**.

Definicja 1.2. *Punktami antypodycznymi nazywamy taką parę punktów, dla których łączący je odcinek przechodzi przez środek sfery.*

A jak będzie w przeciwnym przypadku, gdy punkty nie będą położone antypodycznie? Okazuje się, że istnieje tylko jeden taki okrąg.

Lemat 1.3. *Dla dowolnych dwóch punktów leżących na sferze, niebędącymi punktami antypodycznymi istnieje tylko jeden okrąg wielki który zawiera te punkty.*

Dowód. Ustalmy dowolne dwa punkty A i B niebędące punktami antypodycznymi leżące na pewnej sferze o środku w punkcie S . Punkty A i B nie są punktami antypodycznymi, a więc odcinek je łączący nie przechodzi przez środek sfery S , a zatem punkty A , B i S są punktami niewspółliniowymi. Jak wiemy trzy punkty niewspółliniowe wyznaczają nam dokładnie jedną płaszczyznę, a zatem możemy skonstruować płaszczyznę ABS . Wówczas przekrój tej płaszczyzny ze sferą wyznacza nam szukany okrąg. $\square$

Definicja 1.4. *Niech A , B będą dowolnymi punktami leżącymi na sferze. Odległość pomiędzy tymi punktami będziemy oznaczać jako $d(A, B)$ i jest ona równa długości krótszego łuku okręgu wielkiego zawierającego te dwa punkty.*

Uwaga 1.5. *W przypadku, gdy A i B są punktami antypodycznymi, wówczas odległość pomiędzy tymi dwoma punktami jest równa połowie długości dowolnego okręgu wielkiego przechodzącego przez te dwa punkty.*

Udało się nam powiedzieć jak wyznaczyć odległość pomiędzy dwoma punktami na sferze. Tym się jednak nie będziemy zajmować. My będziemy zajmować się pokryciem sfery poprzez specjalne płytki. Będziemy dosyć wybredni, gdyż interesować nas będą jedynie płytki w kształcie wielokątów sferycznych.

Definicja 1.6. *Dwukątem sferycznym nazywamy część sfery ograniczoną dwoma różnymi łukami okręgów wielkich, łączącymi pewne dwa punkty antypodyczne sfery.*

W dalszym części, przyda nam się jedna własność dwukątów sferycznych. Jest nią wzór na pole dwukąta sferycznego.

Definicja 1.7. *Trójkątem sferycznym nazywamy część sfery ograniczoną trzema łukami okręgów wielkich.*

Definicja 1.8. *Wielkątem sferycznym nazywamy część sfery ograniczoną łamaną zamkniętą składającą się z łuków okręgów wielkich.*

To nie wszystko. Zanim przejdziemy do ostatniego założenia, wprowadźmy jeszcze dwa pojęcia.

Definicja 1.9. *Bokiem wielokąta sferycznego nazywamy łuk okręgu wielkiego należący do łamanej zamkniętej na której zbudowany jest wielokąt sferyczny.*

Definicja 1.10. *Niech A, B, C będą punktami na sferze, które nie leżą na jednym okręgu wielkim. Niech S będzie środkiem tej sfery. Kątem sferycznym ABC nazywamy kąt dwuścienny między półplaszczyną ABS a półplaszczyną CBS .*

Wiemy już co to jest bok wielokąta sferycznego i jego kąt. Dzięki temu jesteśmy nareszcie w stanie poznać ostatnie założenie odnośnie naszych płytek.

Definicja 1.11. *Wielkątem sferycznym wypukłym nazywamy taki wielokąt sferyczny, którego wszystkie kąty wewnętrzne mają miarę mniejszą niż π .*

Definicja 1.12. *Sferycznym wielkątem foremnym nazywamy taki wypukły wielokąt sferyczny, którego wszystkie boki są tej samej miary oraz wszystkie kąty są tej samej miary.*

Wiemy już co nieco na temat wielokątów sferycznych, tylko jak dowiedzieć się kiedy dwa takie wielokąty są przystające (i co to wogóle znaczy)? Innymi słowy jak sprawdzić kiedy dwie płytki są do siebie przystające? Matematycy używają do tego izometrii. Izometrię będziemy rozumieć jako przekształcenie geometryczne, które zachowuje odległość pomiędzy dowolnymi dwoma punktami. Tylko jak to będzie wyglądać dla geometrii na sferze? Jedną z izometrii w przestrzeni jest symetria osiowa. Zauważmy, że dane przekształcenie będzie również izometrią sferyczną. Dlaczego? Powodem tego jest to, że możemy obciąć całą przestrzeń do interesującej nas sfery. Co więcej możemy zauważyć, że dowolną izometrię na sferze możemy rozszerzyć do izometrii na całej przestrzeni! Do tego potrzebujemy. Do Izometrii będziemy potrzebować punktów stałych, czyli takich, które pozostają, pomimo przekształcenia na swoim miejscu. Takim punktem będzie środek sfery. Izometrie które mają jeden punkt stały, to **obroty i odbicia**.

Definicja 1.13. *Izometria sfery, to izometria przestrzeni, która zachowuje sferę.*

Wówczas możemy powiedzieć co to znaczy, że dwie figury leżące na sferze są do siebie przystające.

Definicja 1.14. *Mówimy, że dwie figury na sferze są przystające, gdy istnieje izometria sfery przekształcająca jedną figurę na drugą.*

Wiemy już co to znaczy, że dwie figury leżące na sferze są do siebie przystające. W trakcie naszej podróży będziemy sprawdzać, czy dwa trójkąty sferyczne są do siebie przystające. Pomogą nam w tym cechy przystawania trójkątów sferycznych. Co ciekawe cechy przystawania trójkątów znane z geometrii euklidesowej obowiązują również tutaj! Co więcej, cechą przystawania trójkątów sferycznych jest również cecha kąt, kąt, kat, która w geometrii euklidesowej była jedynie cechą podobieństwa.

Fakt 1.15. *W geometrii na sferze, dla trójkątów sferycznych zachodzą następujące cechy przystawania:*

- *bok, bok, bok;*
- *kąt, kat, kąt;*
- *kąt, bok, kąt;*
- *bok, kąt, bok.*

Fakt 1.16. *Suma miar kątów wewnętrznych w n -kącie sferycznym jest większa niż $(n - 2) \cdot \pi$ i*

Oba powyższe fakty zostały zaczerpnięte z [4].

1.2 Trochę o pokryciu sfery płytkami

Udało dowiedzieć się nam co nieco na temat geometrii sferycznej. Pora teraz przejść do tego, co będziemy rozumieć przez pokrycie sfery płytkami. Można to zrobić na wiele różnych sposobów. My jak wcześniej wspominaliśmy ograniczymy się do następującego sposobu.

Definicja 1.17. *Parkietaż na sferze to takie pokrycie sfery płytkami, w którym:*

- (i) *wszystkie płytki są wypukłymi wielokątami sferycznymi;*
- (ii) *nie ma pustych miejsc (pokrycie jest bez dziur);*
- (iii) *płytki na siebie nie nachodzą;*
- (iv) *jeśli dwie płytki mają część wspólną, to jest to albo jeden wspólny wierzchołek, albo wspólny cały bok w każdej z tych płytek.*

Jeśli płytkami u nas są wielokąty sferyczne, to warto wyróżnić pewien rodzaj obiektu

Definicja 1.18. *Wierzchołkiem parkietażu na sferze, którego płytkami są wielokąty sferyczne, nazywamy wspólny wierzchołek wielokątów, tworzących dany parkietaż.*

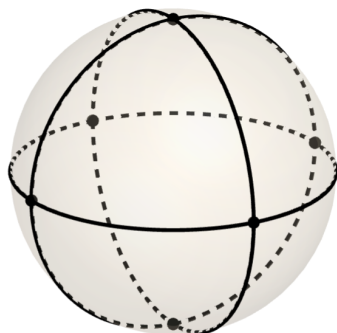
A to jeszcze nie wszystko! W naszej podróży nie będziemy badać wszystkich parkietaży na sferze (jest ich za dużo!), tylko pewien szczególny rodzaj takich parkietaży. Interesować nas będą takie pokrycia w których dowolnie wybrane dwie płytki są przystającymi wielokątami. To nie wszystko. Jest jeszcze druga własność. Do opisu drugiej własności będzie nam potrzebne dowiedzenie się co to jest obrót sfery wokół ustalonego punktu.

Definicja 1.19. *Obrotem sfery S o środku w punkcie O wokół punktu P o kąt α nazywamy takie przekształcenie geometryczne, w którym dowolnemu punktowi A należącemu do sfery S przyporządkowujemy punkt A' , który jest obrazem punktu A względem obrotu przestrzeni wokół osi OP o kąt α .*

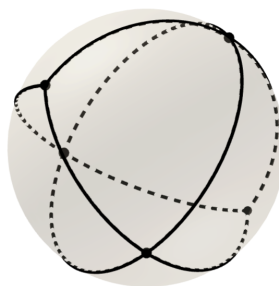
Wracając do parkietaży, interesować nas będzie taki przypadek, w którym dla dowolnych dwóch sąsiadujących ze sobą płytek (tzn. mających wspólny cały bok), każda z nich jest obrazem drugiej w obrocie o π względem środka wspólnego boku. Takie pokrycie sfery będziemy nazywać **parkietażem półobrotowym na sferze**,

Definicja 1.20. *Parkietaż półobrotowy na sferze, to parkietaż na sferze, w którym płytki są przystającymi wielokątami sferycznymi, ułożonymi w ten sposób, że dla dowolnych dwóch płytek parkietażu mających wspólny bok, każda z nich jest obrazem drugiej w obrocie o π względem środka tego wspólnego boku.*

Aby zrozumieć przytoczoną powyżej definicję, zobaczmy na przykładach co jest parkietażem półobrotowym na sferze, a co takim parkietażem nie jest,



(a) Przykład parkietaża półobrotowego



(b) Przykład parkietaża, który nie jest półobrotowy

Rysunek 2

Przykładem parkietażu półobrotowego na sferze jest parkietaż przedstawiony na Rysunku 2a. Jest to parkietaż zbudowany z foremnych trójkątów sferycznych $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Jest to parkietaż półobrotowy, gdyż każda para płytek, która ma ze sobą wspólny bok, jest obrazem drugiej płytki w obrocie o π względem środka wspólnego boku (w płytce wszystkie kąty są do siebie przystające).

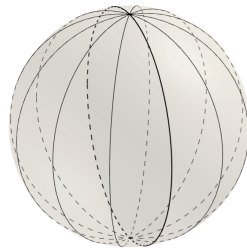
Natomiast przykładem parkietażu na sferze, który nie jest parkietażem półobrotowym przedstawiony na Rysunku 2b. Jest to parkietaż zbudowany z przystających trójkątów sferycznych $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$. Wybierzmy dwie płytki, które mają wspólny bok. Zauważmy, że druga płytka jest obrazem pierwszej płytki w obrocie o 2π względem środka wspólnego boku. Korzystając z tego, że płytki w parkietażu nie są foremnymi trójkątami sferycznymi, otrzymujemy że druga płytka nie jest obrazem pierwszej płytki w obrocie o π względem środka wspólnego boku.

2 Jakie kształty muszą mieć nasze płytki, aby za ich pomocą ułożyć parkietaże półobrotowe na sferze?

Naszym celem jest znalezienie wszystkich możliwych parkietaży półobrotowych na sferze. Dosyć ambitne zadanie. Nie da się wszystkiego zrobić naraz, więc zaczniemy pomalutku, od najmniejszego wielokąta sferycznego – dwukąta.

2.1 Parkietaże z dwukątów sferycznych

Ustalmy dowolny dwukąt sferyczny A o mierze kąta równej α . Załóżmy optymistycznie, że da się skonstruować parkietaż z dwukątów sferycznych. (patrz Rysunek 3).



Rysunek 3

Wówczas wierzchołkiem parkietażu będzie jeden z punktów antypodycznych dwukąta A . Załóżmy, że wokół wierzchołka spotyka się n płytek. Z definicji parkietażu półobrotowego na sferze, wiemy że dowolne dwie płytki są przystającymi wielokątami sferycznymi, czyli wszystkie płytki sąsiadujące wokół wierzchołka są przystające do dwukąta A . Dodatkowo wiemy, że każdy dwukąt ma parę przystających kątów. Z tego otrzymujemy, że:

$$n \cdot \alpha = 2\pi$$

Wobec tego możemy sformułować wniosek, że dana sytuacja się pojawi jedynie wtedy, gdy danym dwukątem sferycznym będzie dwukąt o kątach $\frac{2\pi}{n}$, gdzie $n \geq 3$. Nietrudno też zauważyć, że dla dowolnego $n \geq 3$ parkietaż sfery jednakowymi dwukątami sferycznymi o kątach $\frac{2\pi}{n}$ przedstawiony na Rysunku 3 jest parkietażem półobrotowym.

Podsumowanie 2.1. *Istnieje nieskończona seria parkietaży sferycznych półobrotowych za pomocą płytek dwukątnych. Dokładniej, dla każdego $n \geq 3$ istnieje taki parkietaż w którym kąt przy wierzchołku dwukątnej płytki wynosi $\frac{2\pi}{n}$, zaś parkietaż składa się z dokładnie n płytek. Są to wszystkie możliwe parkietaże półobrotowe za pomocą dwukątnych płytek.*

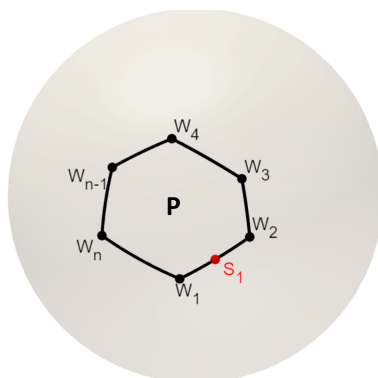
2.2 Jak to będzie dla innych wielokątów?

Pierwsze pytanie, które nam się nasuwa brzmi następująco. Czy istnieje pewna analogia w sposobie szukania płytek pomiędzy dwukątami, a innymi wielokątami sferycznymi? Po krótkiej chwili widzimy, że nie. Jednak po dłuższej chwili niektórzy mogą zauważyć, że pewne idee pojawiające się przy dwukącie sferycznym możemy zastosować dla innych wielokątów.

Podobnie jak poprzednio założymy z góry, że dla pewnego wielokąta sferycznego istnieje parkietaż półobrotowy o płytkach takiego kształtu. Będziemy sprawdzać jakie warunki

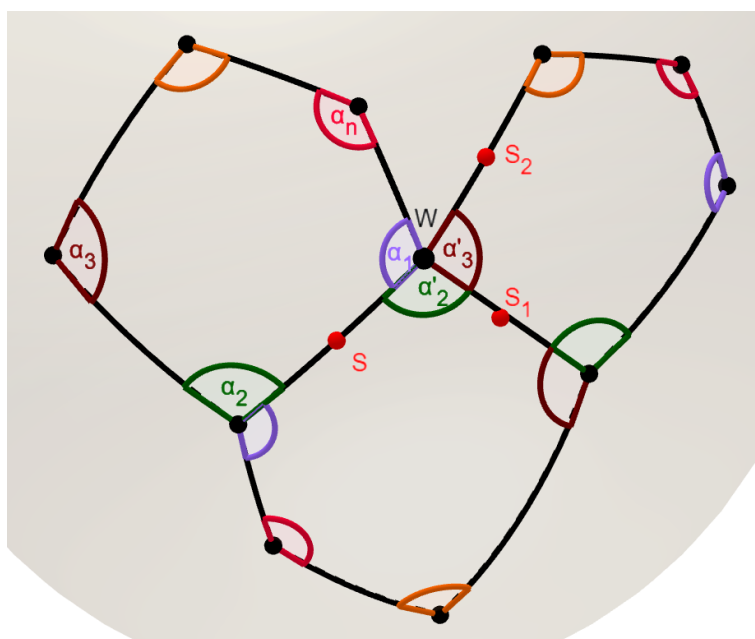
musi spełniać nasza płytką, aby wokół wierzchołka parkietażu spotkała się pewna liczba płytek.

W przeciwieństwie do dwukątów, inne wielokąty sferyczne mogą nie mieć przystających kątów. Nie zrażając się pojawiającą trudnością, spróbujmy ją pokonać! Ustalmy dowolny wielokąt sferyczny P . Niech $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ będą kolejnymi wierzchołkami wielokąta sferycznego P , natomiast $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ niech oznaczają jego kolejne kąty wewnętrzne odpowiednio przy wierzchołkach $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$. Przez S oznaczmy środek boku wielokąta P , łączącego w_1 z w_2 . Sytuację ilustruje Rysunek 4.



Rysunek 4

Następnie obracamy płytkę P , o π względem punktu S . Dzięki temu powstaje nowa płytką, którą będziemy oznaczać jako P_1 . Wówczas dla wielokąta sferycznego P_1 wybieramy odcinek sąsiadujący z odcinkiem w_1w_2 . Następnie wyznaczamy jego środek, który będziemy oznaczać jako S_1 . Teraz obracamy płytkę P_1 wokół punktu S_1 . W wyniku tego obrotu powstaje obraz płytki P_1 . Oznaczmy go przez P_2 . Efekt tych czynności ilustruje Rysunek 5.



Rysunek 5

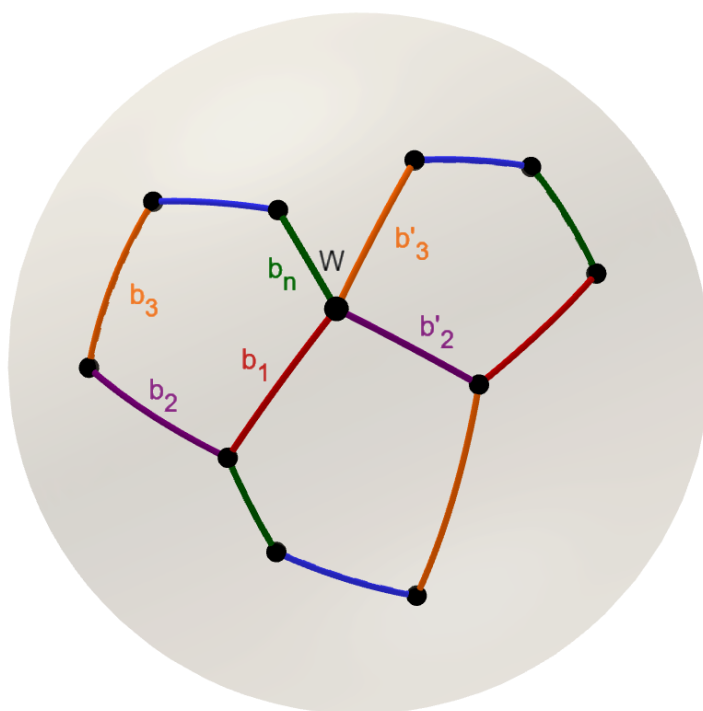
Daną czynność powtarzamy. Zauważmy, co dzieje się wokół wierzchołka w_1 . Przy pojedynczym wybranym wierzchołku kąty w kolejnych obrazach wielokąta P tworzą sekwencję taką, jak w danym wielokącie, czyli kolejno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$, gdzie k oznacza liczbę płytek parkietu rozważanego wierzchołka parkietu. Chcemy, aby płytki utworzyły fragment parkietu. Wobec tego suma miar kątów znajdujących się wokół wierzchołka parkietu musi być równa 360° . otrzymujemy że $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k = 2\pi$.

Obserwacja 2.1. *Wokół wierzchołka parkietu kąty w kolejnych obrazach wielokąta P tworzą sekwencję $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$, gdzie k oznacza liczbę płytek, które sąsiadują z wierzchołkiem parkietu.*

To nie koniec cennego kruszca, które możemy z Obserwacji 2.21 wywnioskować (wykuć)! Zauważmy, że procedurę opisaną wcześniej można dalej kontynuować. Wówczas $k + 1$ płytka znajdzie się w miejscu płytki wyjściowej, kolejna płytka na miejscu drugiej i tak dalej. Możemy wobec tego powiedzieć, że $\alpha_{k+1} = \alpha_1$, $\alpha_{k+2} = \alpha_2$, itd. Niech $n = ak + b$, dla $a, b \in \mathbb{N}$ i $b < k$, wówczas $\alpha_n = \alpha_{ak+b} = \alpha_b$.

Obserwacja 2.2. *Wokół wierzchołka parkietu kąty w kolejnych obrazach wielokąta P tworzą sekwencję $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$, gdzie k oznacza liczbę płytek, które sąsiadują z wierzchołkiem parkietu. Wówczas dowolny kąt wewnętrzny wielokąta P α_w , gdzie $w = ak + b$, dla $a, b \in \mathbb{N}$ i $b < k$, jest równy α_b .*

Zdobyliśmy, już pełen garnuszek pożytecznych własności, ale to jeszcze nie wszystko! Możemy jeszcze zauważyć jedną przydatną rzecz. Poprzednio całą naszą uwagę skupiliśmy na kątach wokół wierzchołka parkietu. Skupmy się teraz na czymś innym, na bokach wielokąta wychodzących z tego wierzchołka (patrz Rysunek 6).



Rysunek 6

Na początek zauważmy, że wokół wierzchołka parkietażu boki wielokąta P w kolejnych obrazach, tworzą sekwencję $b_1, b_2, \dots, b_k$, gdzie k oznacza liczbę płytek, które sąsiadują z wierzchołkiem parkietażu. Następnie podobnie jak poprzednio, kontynuujemy naszą procedurę. Otrzymujemy, że

$$b_{k+1} \equiv b_1, \quad b_{k+2} \equiv b_2, \text{ itd.}$$

Niech $n = ak + c$, dla $a, b \in \mathbb{N}$ i $b < k$, wówczas $b_n = b_{ak+c} = b_c$.

Obserwacja 2.3. Wokół wierzchołka parkietażu boki w kolejnych obrazach wielokąta P tworzą sekwencję $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$, gdzie k oznacza liczbę płytek, które sąsiadują z wierzchołkiem parkietażu. Wówczas dowolny bok wewnętrzny wielokąta P b_w , gdzie $w = ak + c$, dla $a, c \in \mathbb{N}$ i $c < k$, jest przystający do boku b_c .

Mamy już narzędzie, pora je wykorzystać. Naszą analizę zaczniemy od trójkąta sferycznego. Później na warsztat weźmiemy czworokąty sferyczne itd. Zanim jednak zaczniemy naszą analizę zauważmy jeszcze jedną przydatną rzecz.

Obserwacja 2.4. W każdym wierzchołku dowolnego parkietażu półobrotowego na sferze spotykają się przynajmniej trzy płytki tego parkietażu.

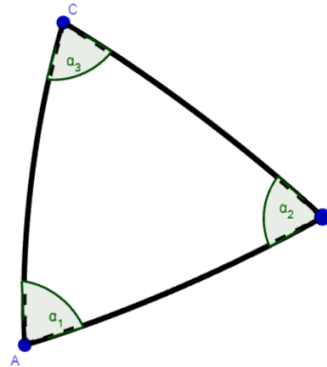
Dowód. Ustalmy dowolny parkietaż półobrotowy na sferze. Następnie wybierzmy dowolny wierzchołek W tego parkietażu. Załóżmy, że wokół wierzchołka W sąsiaduje pewna liczba n płytek. Dla każdej z sąsiadujących płytek P_i wierzchołek W jest wierzchołkiem pewnego kąta α_i . A zatem możemy napisać następującą równość:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi.$$

Pamiętamy że nasz wielokąt sferyczny jest wielokątem wypukłym. A zatem każdy z kątów α_i jest mniejszy od π . A zatem potrzebujemy przynajmniej trzy płytki. $\square$

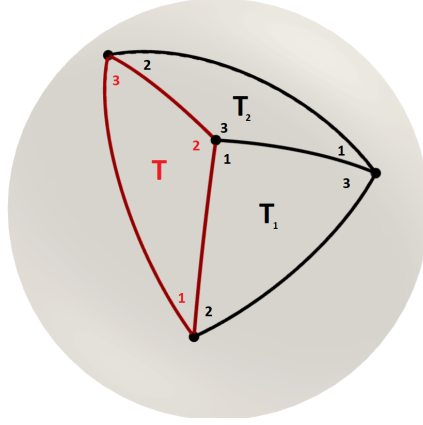
2.3 Parkietaż z trójkątów sferycznych

Założmy, że $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są kolejnymi kątami trójkąta sferycznego (patrz Rysunek 7).



Rysunek 7

Sprawdźmy które trójkąty sferyczne wypełniają część sfery, ze względu na liczbę takich trójkątów wokół ustalonego wierzchołka w sposób półobrotowy.



Rysunek 8

2.3.1 Trzy trójkąty wokół wierzchołka parkietażu

Sytuację z trzema trójkątnymi płytkami wokół wierzchołka półobrotowego parkietażu ilustruje Rysunek 8.

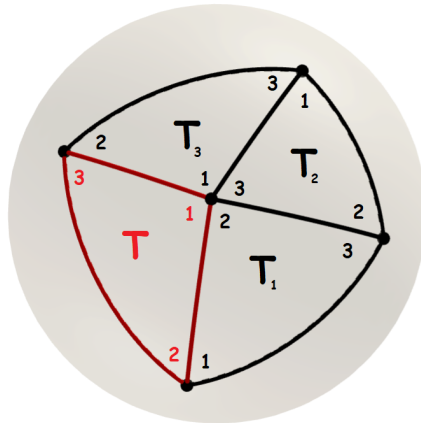
Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi.$$

Suma miar kątów w wypukłym trójkącie sferycznym musi być większa niż π i jednocześnie mniejsza niż 3π , więc trójkąty sferyczne o sumie miar kątów równej 2π potencjalnie istnieją. Ich dokładniejszym opisem zajmiemy się w Rozdziale 4. Również w tamtym rozdziale przekonamy się które spośród takich trójkątów prowadzą do rzeczywistych parkietaży półobrotowych na sferze.

2.3.2 Cztery trójkąty wokół wierzchołka parkietażu

Sytuację z czterema trójkątnymi płytkami wokół wierzchołka półobrotowego parkietażu ilustruje Rysunek 9.



Rysunek 9

Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi.$$

Zauważmy, że liczba płytek jest większa niż liczba katów w wielokącie sferycznym. Wobec tego możemy skorzystać z Obserwacji 2.3 która mówi nam, że $\alpha_4 = \alpha_1$, $\alpha_1 = \alpha_2$ i $\alpha_3 = \alpha_2$. Wobec tego otrzymujemy następującą równość

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha,$$

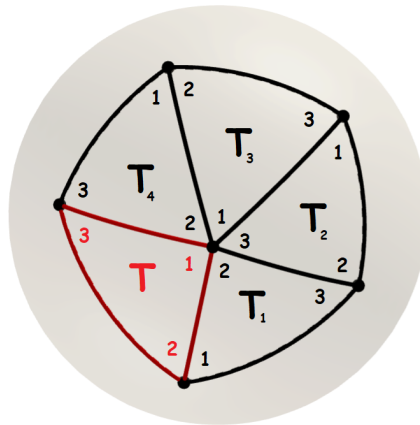
stąd

$$4\alpha = 2\pi,$$

a zatem $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Wobec tego możemy sformułować wniosek, że dana sytuacja może się pojawić jedynie wtedy, gdy danym trójkątem sferycznym będzie trójkąt o kątach $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Problemem istnienia parkietaży o płytkach takiego kształtu zajmiemy się w Podrozdziale 3.3.

2.3.3 Pięć trójkątów wokół wierzchołka parkietażu

Sytuację z pięcioma trójkątnymi płytkami wokół wierzchołka półobrotowego parkietażu ilustruje Rysunek 10. Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:



Rysunek 10

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 2\pi,$$

Liczba użytych płytek jest większa niż liczba katów w wielokącie, więc ze względu na Obserwację 2.3 mamy, że

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha,$$

Wobec tego:

$$5\alpha = 2\pi,$$

czyli

$$\alpha = \frac{2\pi}{5}.$$

Zatem możemy sformułować wniosek, że dana sytuacja może się pojawić jedynie wtedy, gdy danym trójkątem sferycznym będzie trójkąt o mierze kątów $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$.

Problemem istnienia parkietaży o płytkach takiego kształtu zajmiemy się w Podrozdziale 3.3.

2.3.4 Dla sześciu trójkątów

Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = 2\pi,$$

Liczba użytych płytek jest większa niż liczba katów w wielokącie, więc ze względu na Obserwację 2.3 mamy, że

$$\alpha_4 = \alpha_1, \quad \alpha_5 = \alpha_2, \quad \alpha_6 = \alpha_3.$$

stąd

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi,$$

czyli

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi.$$

Zatem suma miar kątów tego trójkąta wynosi π . Otrzymujemy sprzeczność, gdyż suma miar kątów w trójkącie sferycznym jest większa niż π (patrz Fakt. 1.19).

Oznacza to, że nie istnieje żaden półobrotowy parkietaż sfery o płytkach trójkątnych, w którym wokół wierzchołka spotykają się 6 płytek.

2.3.5 Dla siedmiu trójkątów i więcej

Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = 2\pi,$$

gdzie $n \geq 7$. Liczba użytych płytek jest większa niż liczba katów w wielokącie, więc ze względu na Obserwację 2.3 mamy, że

- $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, gdy liczba płytek nie jest podzielna przez 3. Zatem

$$n\alpha = 2\pi,$$

Stąd $3\alpha < \pi$. Wówczas suma kątów tego trójkąta sferycznego jest mniejsza niż π . Otrzymujemy sprzeczność, gdyż suma kątów w trójkącie jest większa niż π (patrz Fakt. 1.19).

- $g(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi$, dla pewnej liczby naturalnej $g > 2$, gdy liczba płytek jest podzielna przez 3. Wówczas otrzymujemy, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$. Wobec tego suma kątów tego trójkąta sferycznego jest mniejsza niż π . Otrzymujemy sprzeczność, gdyż suma kątów w trójkącie musi być większa niż π (Patrz Fakt. 1.19).

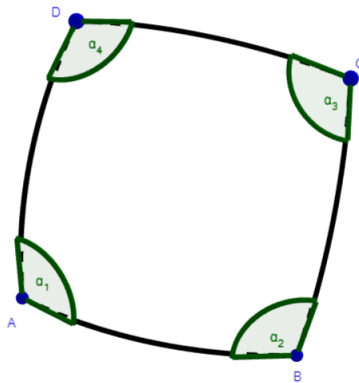
Podsumowując nasze rozważania z Podrozdziałów 2.3.1-2.3.5 otrzymujemy następującą konkluzję.

Wniosek 2.5. *Fragment parkietażu półobrotowego na sferze wokół pojedynczego wierzchołka można potencjalnie utworzyć jedynie z następujących trójkątów sferycznych:*

- trójkąt sferyczny $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$,
- trójkąt sferyczny $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$,
- trójkąt sferyczny o sumie miar kątów wynoszącej 2π .

2.4 Parkietaż z czworokątów sferycznych

W tym podrozdziale przyjrzymy się ułożeniom fragmentu parkietażu dla czworokątów sferycznych. Załóżmy, że $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ są kolejnymi kątami czworokąta sferycznego, jak na Rysunku 11.

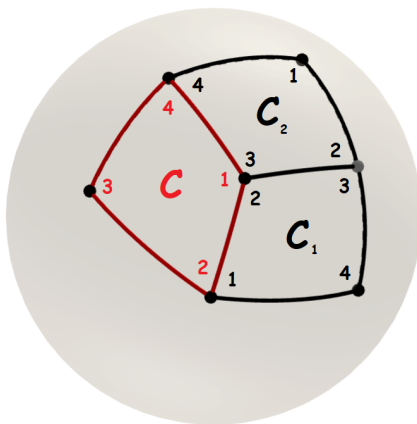


Rysunek 11

Rozpatrzmy kolejno przypadki dotyczące występowania różnej liczby takich płytek wokół wierzchołka parkietażu,

2.4.1 Trzy czworokąty wokół wierzchołka parkietażu

Sytuację z trzema czworokątnymi płytkami wokół wierzchołka półobrotowego parkietażu ilustruje Rysunek 12. Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:



Rysunek 12

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi.$$

Korzystając z Obserwacji 2.3 możemy zauważyć, że $\alpha_4 = \alpha_1$ oraz $\alpha_1 = \alpha_2$. Podobnie możemy pokazać, że $\alpha_2 = \alpha_3$. Wobec tego

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha,$$

stąd

$$3\alpha = 2\pi,$$

a zatem $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Czyli szukany czworokąt sferyczny musi mieć miary kątów $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. To jednak nie jest wszystko, co możemy powiedzieć o tym czworokacie.

Ponieważ w przeciwieństwie do trójkątów sferycznych, miary kątów w czworokacie nie określają jednoznacznie figury, potrzebujemy do tego dodatkowo długości boków.

Korzystając z Obserwacji 2.4 otrzymujemy, że

$$b_3 \equiv b_4, \quad b_4 \equiv b_1, \quad b_1 \equiv b_2,$$

a więc

$$b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv b_4,$$

czyli rozważany czworokąt sferyczny musi być czworokątem foremnym. Wobec tego możemy sformułować wniosek, że dana sytuacja może pojawić się jedynie wtedy, gdy danym czworokątem sferycznym będzie czworokąt foremny o mierze kątów $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. Problemem istnienia parkietażu o płytkach takiego kształtu zajmiemy się w Podrozdziale 3.3.

2.4.2 Dla czterech czworokątów wokół wierzchołka parkietażu

Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi.$$

Dostajemy sprzeczność, z Faktem 1.19, bo zgodnie z nim suma kątów w czworokacie sferycznym musi być większa niż 2π . Zatem nie istnieje żaden półobrotowy parkietaż sfery o płytkach czworokątnych, w którym wokół wierzchołka spotkają się 4 płytki.

2.4.3 Dla pięciu i więcej czworokątów

Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k = 2\pi,$$

gdzie $k \geq 5$. Zauważmy, że

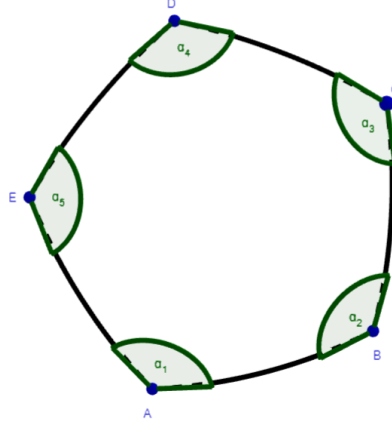
$$2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k > \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

gdyż miary kątów muszą być dodatnie. Dostajemy sprzeczność z Faktem 1.19, bo zgodnie z nim suma kątów w czworokacie sferycznym musi być większa niż 2π .

Wniosek 2.6. *Zakładając, że płytka jest czworokątem sferycznym, fragment parkietażu półobrotowego na sferze można utworzyć jedynie z foremnego czworokąta sferycznego o kątach $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.*

2.5 Parkietaż z pięciokątów sferycznych

W tym podrozdziale przyjrzymy się możliwości ułożenia fragmentu parkietażu wokół ustalonego wierzchołka, dla pięciokątów sferycznych. Załóżmy, że $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ są kolejnymi kątami pięciokąta sferycznego, jak na Rysunku 13.

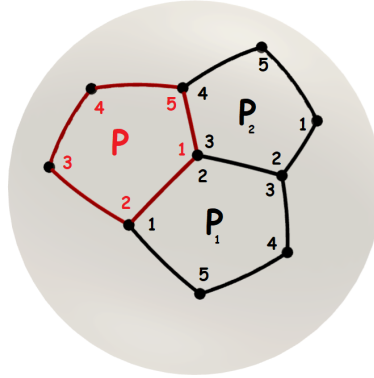


Rysunek 13

Rozpatrzmy kolejno przypadki dotyczące występowania różnej liczby takich płytek wokół wierzchołka parkietażu,

2.5.1 Trzy pięciokąty wokół wierzchołka parkietażu

Sytuację z trzema pięciokątnymi płytkami wokół wierzchołka półobrotowego parkietażu ilustruje Rysunek 14.



Rysunek 14

Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi.$$

Korzystając z Obserwacji 2.3 otrzymujemy że

$$\alpha_1 = \alpha_4, \quad \alpha_2 = \alpha_5, \quad \alpha_3 = \alpha_1, \quad \alpha_4 = \alpha_2, \quad \alpha_5 = \alpha_3,$$

stąd

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha,$$

czyli

$$3\alpha = 2\pi,$$

a zatem $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Korzystając z Obserwacji 2.4 otrzymujemy, że

$$b_3 \equiv b_4, \quad b_4 \equiv b_1, \quad b_5 \equiv b_2, \quad b_1 \equiv b_3,$$

czyli

$$b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv b_4 \equiv b_5.$$

Wobec tego możemy sformułować wniosek, że dana sytuacja może się pojawić jedynie wtedy, gdy danym pięciokątem sferycznym będzie pięciokąt foremny o mierze kątów $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. Problemem istnienia parkietaży o płytkach takiego kształtu zajmiemy się w Podrozdziale 3.3.

2.5.2 Dla czterech pięciokątów

Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi.$$

Korzystając z obserwacji 2.3 otrzymujemy że

$$\alpha_1 = \alpha_5, \quad \alpha_2 = \alpha_1, \quad \alpha_3 = \alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_3, \quad \alpha_5 = \alpha_4,$$

stąd

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha,$$

czyli

$$4\alpha = 2\pi,$$

a zatem $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Wobec tego $5\alpha = \frac{5\pi}{2}$. Otrzymujemy sprzeczność z Faktem 1.19, bo zgodnie z nim suma kątów w pięciokącie sferycznym musi być większa niż 3π .

2.5.3 Dla pięciu i więcej pięciokątów wokół wierzchołka parkietażu

Ze względu na Obserwację 2.2 otrzymujemy, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k = 2\pi,$$

gdzie $k \geq 5$. Zauważmy, że

$$2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5,$$

gdyż miary kątów muszą być dodatnie. Dostajemy sprzeczność z Faktem 1.19, gdyż suma miar kątów w pięciokącie sferycznym musi być większa niż 3π .

Wniosek 2.7. Zakładając, że płytka jest pięciokątem sferycznym fragment parkietażu półobrotowego na sferze wokół ustalonego wierzchołka można utworzyć jedynie z foremnego pięciokąta sferycznego o kątach $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

2.6 Co z innymi wielokątami

W tym podrozdziale, na koniec przyjrzymy się możliwościom ułożenia fragmentu parkietu wokół ustalonego wierzchołka, gdy płytkami będą u nas wielokąty sferyczne wypukłe o liczbie boków większej niż pięć.

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ będą kolejnymi kątami wewnętrznymi rozważanego n -kąta, gdzie $n \geq 6$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Założmy najpierw, że liczba płytek wokół wierzchołka wynosi k , gdzie $k \geq n$. Wówczas korzystając z Obserwacji 2.2 otrzymujemy, że

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 2\pi.$$

Zauważmy, że

$$2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

Dostajemy sprzeczność z Faktem 1.19, gdyż suma miar kątów w n -kącie sferycznym, musi być większa niż $(n - 2) \cdot \pi$, czyli większe niż 4π .

Pozostało nam sprawdzić co się stanie, gdy $k < n$. Założmy, że istnieje taki parkiet. Wówczas korzystając z Obserwacji 2.2 mamy, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 2\pi$$

Wiedząc, że $k < n$ możemy wywnioskować, że $n = ak + b$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{N}$, gdzie $b < k$. Wobec tego na mocy Obserwacji 2.3 mamy, że

$$\alpha_{k+1} = \alpha_1, \quad \alpha_{k+2} = \alpha_2, \quad \alpha_n = \alpha_{ak+b} = \alpha_b.$$

Zatem

$$\begin{aligned} & \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n = \\ & = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{ak+b} = \\ & = a(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) + \alpha_1 + \dots + \alpha_b < 2a\pi + b\pi = \pi(2a + b), \end{aligned}$$

gdyż kąty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_b$ są kątami wypukłymi. Korzystając z Faktu 1.19 wiemy, że suma miar kątów n -kąta sferycznego musi być większa niż $\pi(n - 2)$. Tym bardziej musi zostać spełniona następująca nierówność:

$$\begin{aligned} \pi(2a + b) & > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > \pi(ak + b - 2) \\ 2 & > a(k - 2). \end{aligned}$$

Dana nierówność jest prawdziwa jedynie dla trzech przypadków $k = 3$ i $a = 1$, ale wówczas $n = 3 + b$, czyli $b \geq 3$. Sprzeczność, gdyż b jest resztą z dzielenia n przez k , wobec tego musi być mniejsze niż k .

Wniosek 2.8. *Dla n -kątów sferycznych, gdzie $n > 5$ nie da się utworzyć fragmentu parkietu półobrotowego na sferze.*

3 Realizacja parkietaży półobrotowych na sferze

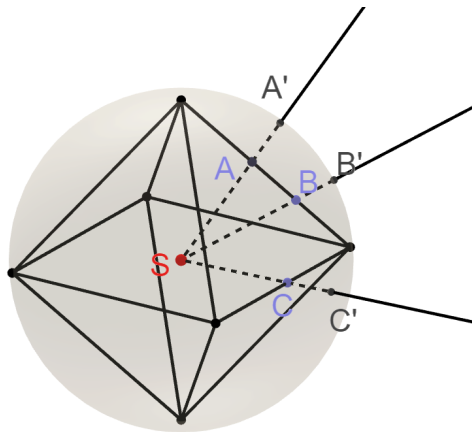
W poprzednim rozdziale zajeliśmy się sprawdzeniem, które płytki mogą posłużyć nam do skonstruowania parkietażu półobrotowego na sferze. W tym i w następnym rozdziale zajmiemy się pokazaniem, że takie płytki faktycznie istnieją oraz sprawdzeniem czy z nich da się skonstruować parkietaż! W tym rozdziale ograniczymy się do foremnych wielokątów sferycznych.

3.1 Istnienie płytki

W matematyce istnienie danego obiektu matematycznego pokazujemy poprzez jego konstrukcję. W ten sposób nasz cel stał się trochę bardziej konkretny. Naszym celem jest skonstruowanie wielokątów sferycznych z poprzedniego rozdziału. Do tego bardzo przydatnym narzędziem okaże się przekształcenie promieniste.

3.2 Przekształcenie promieniste

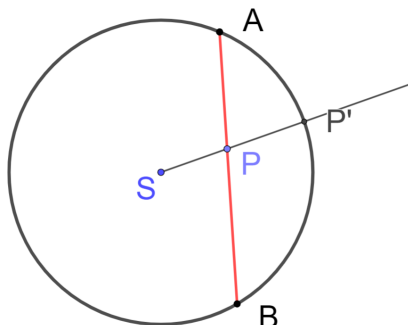
Dany jest wielościan W wpisany w sferę K o środku w punkcie S . **Przekształceniem promienistym** nazywamy takie przekształcenie, które przyporządkowuje każdemu punktowi A należącemu do brzegu wielościanu W taki punkt A' , który jest punktem przecięcia sfery S z półprostą o początku w punkcie S przechodzącą przez punkt A .



Rysunek 15: Przekształcenie promieniste

Sformułowaliśmy definicję przekształcenia promienistego. Intuicyjnie czujemy, że obrazem wielościanu wpisanego w kulę, będzie parkietaż na sferze. Nam jednak intuicja nie może wystarczyć. Musimy, to pokazać!

Zacznijmy od początku. Sprawdźmy co stanie się, gdy przekształcimy jedynie jedną krawędź AB wielościanu W . Korzystając z tego, że wielokąt W jest wpisany w kulę, mamy, że punkty A i B leżą na sferze, co więcej jeśli krawędź AB nie przechodzi przez środek sfery, to punkty A i B nie są antypodyczne, a wówczas punkty A i B leżą na dokładnie jednym okręgu wielkim AB tej sfery.



Rysunek 16: Krawędź wielościanu wpisana w koło wielkie AB

Wówczas można zauważyć, że przekształcenie promieniste odcinka AB sprowadza się do poprowadzenia ze środka okręgu S półprostych przechodzących przez dowolny punkt P znajdujący się na odcinku AB i sprawdzeniu jaki będzie punkt przecięcia tych półprostych z okręgiem wielkim AB . Nietrudno zauważyć, że obrazem tego przekształcenia będzie krótszy łuk AB tego okręgu wielkiego (patrz Rysunek 16).

Obserwacja 3.1. *Przekształcenie promieniste przekształca krawędź AB wielościanu na bok AB wielokąta sferycznego.*

Wiemy już, że przekształcenie promieniste przekształca krawędź wielokąta w odcinek na sferze (tzn. w łuk na pewnym okręgu wielkim). Wówczas możemy wywnioskować, że:

Wniosek 3.2. *Przekształcenie promieniste przekształca ścianę wielościanu wpisanego w sferę, w wielokąt sferyczny.*

Nie musimy się ograniczać, jedynie do jednej ściany. Zauważmy, że jeśli środek kuli S znajduje się wewnątrz wielościanu W , wówczas przekształcenie promieniste przekształci szkielet wielościanu W w parkietaż na sferze.

Wniosek 3.3. *Przekształcenie promieniste przekształca szkielet wielościanu sferycznego W w parkietaż na sferze.*

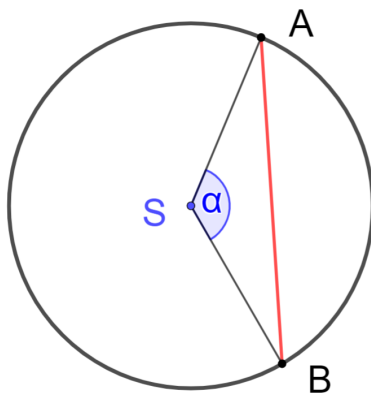
Wiemy już, że przekształcenie promieniste przekształca szkielet wielościanu W w parkietaż na sferze. Wróćmy do ścian wielościanu W . Wiemy, że ściana wielościanu W jest przekształcana w wielokąt sferyczny. My chcemy otrzymać wielokąt sferyczny foremny, czyli taki, który ma wszystkie boki tej samej długości i kąty tej samej miary. Pytanie jak taki wielokąt sferyczny uzyskać? Zrobimy, to poprzez pokazanie, że przekształcenie promieniste zachowuje „foremność wielokąta”, czyli:

- **zachowuje przystawanie boków** – obrazem wielokąta foremnego dla przekształcenia promienistego jest wielokąt sferyczny o bokach równej długości,
- **zachowuje przystawanie kątów** – obrazem wielokąta foremnego dla przekształcenia promienistego jest wielokąt sferyczny o kątach równej miary.

Omówimy to dokładniej w poniższych Podrozdziałach 3.2.1 i 3.2.2.

3.2.1 Przekształcenie promieniste zachowuje przystawanie boków

Wybermy pewną krawędź AB wielościanu W . Zauważmy tak jak poprzednio, że odcinek AB zawiera się w kole wielkim AB . Poprowadźmy ze środka okręgu S odcinki do wierzchołków A, B . Powstaje trójkąt równoramienny o kącie przy wierzchołku S pewnej miary α .

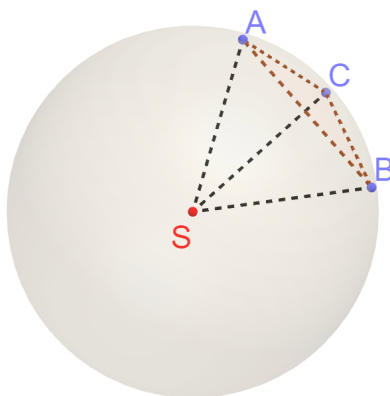


Rysunek 17: Krawędź AB wpisana w okrąg wielki AB

Wówczas długość łuku AB , będzie równa $R \cdot \alpha$, gdzie R , to promień kuli. Zauważmy, że długość łuku AB zależy jedynie od miary kąta α . Co więcej kąt α jest jednoznacznie wyznaczony przez długość odcinka AB . Wobec tego możemy powiedzieć, że obrazem krawędzi wpisanej w sferę K , której długość jest równa krawędzi AB w przekształceniu promienistym jest łuk o długości równej łukowi AB .

3.2.2 Przekształcenie promieniste przekształca foremny wielokąt o wierzchołkach na sferze w wielokąt sferyczny o jednakowych kątach

Dany jest pewien wielokąt foremny W , którego wszystkie wierzchołki leżą na sferze, i który jest rozłączny ze środkiem tej sfery. Do każdego wierzchołka wielokąta W poprowadźmy, odcinek, który łączyć go będzie z środkiem kuli S (patrz Rysunek 18).



Rysunek 18

Otrzymaliśmy ostrosłup prawidłowy, który będziemy oznaczać jako P . Korzystając z Definicji 1.10 mamy, że kąt sferyczny ACB jest kątem, pomiędzy ścianą boczną ostrosłupa

ASC a ścianą boczną ostrosłupa BSC . Innymi słowy jest to kąt dwuścienny pomiędzy tymi dwoma ścianami bocznymi ostrosłupa P . Stąd możemy powiedzieć, że innym kątem w otrzymanym wielokącie sferycznym możemy przypisać im pewne kąty dwuściennie pomiędzy dwoma ścianami bocznymi ostrosłupa P .

Następnie korzystając z tego, że w ostrosłupach prawidłowych kąty dwusieczne pomiędzy dwoma ścianami bocznymi są do siebie przystające, otrzymujemy, że w otrzymanym wielokącie sferycznym kąty też będą przystające.

Wniosek 3.4. *Przekształcenie promieniste przekształca wielokąt foremny o wierzchołkach leżących na sferze, który jest rozłączny ze środkiem kuli opisanym na tym wielokącie, w wielokąt sferyczny o przystających kątach.*

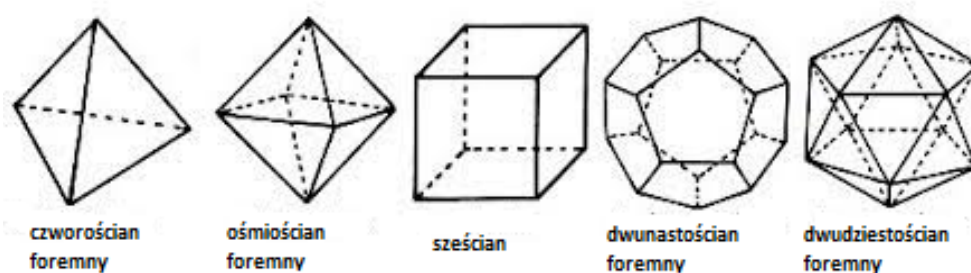
Twierdzenie 3.5. *Przekształcenie promieniste przekształca wielokąt foremny o wierzchołkach leżących na sferze, który jest rozłączny ze środkiem kuli opisanym na tym wielokącie, w wielokąt sferyczny foremny.*

3.2.3 Co dalej?

Pokazaliśmy, że przekształcenie promieniste przekształca wielokąt foremny w wielokąt foremny sferyczny. Teraz pozostało nam jedynie znaleźć takie wielościany, w których wszystkie ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi. Co więcej musi być spełniony jeszcze jeden dodatkowy warunek, a mianowicie, że w każdym wierzchołku wielościanu, spotyka się ta sama liczba ścian. W matematyce takich brył jest jedynie pięć. Nazywamy je **bryłami platońskimi**.

Definicja 3.6. *Bryłą platońską nazywamy taki wielościan wypukły, w którym:*

- *wszystkie ściany są wielokątami foremnymi przystającymi*
- *w każdym wierzchołku zbiega się taka sama liczba ścian*



Rysunek 19: Bryły platońskie (obraz pobrany z [6])

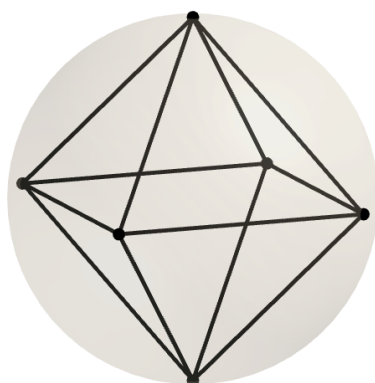
Znany jest fakt, że jest dokładnie 5 brył platońskich (patrz [8]). Bryły te przedstawione są na Rysunku 14. Wiadomo, że każda z tych brył można wpisać w sferę (w taki sposób, że wszystkie jej wierzchołki leżą na tej sferze) (patrz [8]).

3.3 Bryły platońskie a szukane parkietaże

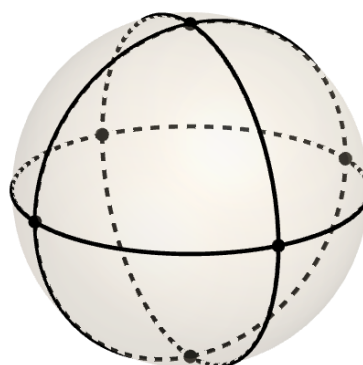
W tym podrozdziale zajmiemy się skonstruowaniem szukanych parkietaży, korzystając przy tym z narzędzia odkrytego w poprzednim podrozdziale.

3.3.1 Konstrukcja trójkąta sferycznego $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ i odpowiadającego mu parkietażu półobrotowego

Do konstrukcji trójkąta sferycznego $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, będziemy potrzebować bryły platońskiej, w której w każdym wierzchołku spotykają się cztery trójkąty. Takim wielościanem jest ośmiościan foremny (patrz Rysunek).



(a) Ośmiościan foremny
wpisany w kulę



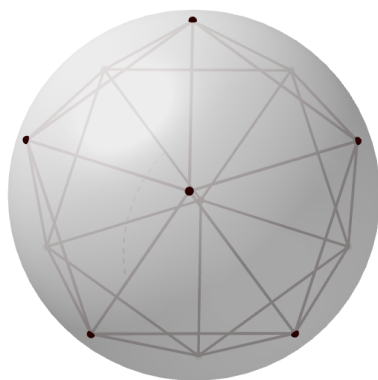
(b) Parkietaż utworzony
z trójkątów sferycznych $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

Rysunek 20

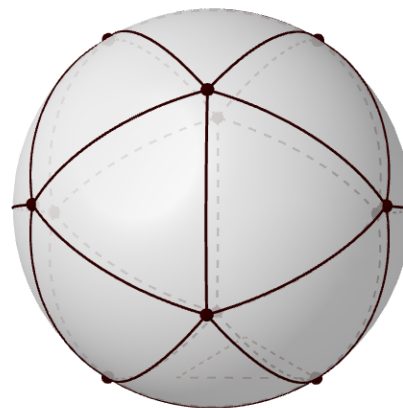
Rzut promienisty ośmiościanu foremnego wpisanego w sferę daje parkietaż sfery, który składa się z jednakowych foremnych trójkątów sferycznych. Ponieważ w każdym wierzchołku tego parkietażu spotykają się cztery jednakowe płytki, miary kątów w tych płytkach muszą wynosić $\frac{\pi}{2}$. Nietrudno też zauważyć, że taki regularny parkietaż sfery jest półobrotowy.

3.3.2 Konstrukcja trójkąta sferycznego $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$ i odpowiadającemu mu parkietażu półobrotowego.

Do konstrukcji trójkąta sferycznego $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$, będziemy potrzebować bryły platońskiej, w której w każdym wierzchołku spotykają się pięć trójkątów. Takim wielościanem jest dwudziestościan foremny.



(a) Dwudziestościan foremny wpisany w kulę

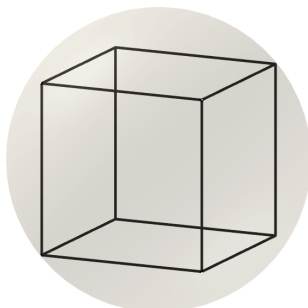


(b) Parkietaż utworzony z trójkątów sferycznych $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$

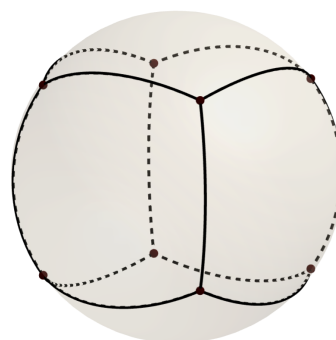
Rzut promienisty dwudziestościanu foremnego wpisanego w sferę daje parkietaż sfery, który składa się z jednakowych foremnych trójkątów sferycznych. Ponieważ w każdym wierzchołku tego parkietażu spotyka się pięć jednakowych płytek, miary kątów w tych płytkach muszą wynosić $\frac{2\pi}{5}$. Nietrudno też zauważyć, że taki regularny parkietaż sfery jest półobrotowy.

3.3.3 Konstrukcja sferycznego czworokąta foremnego $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ i odpowiadającemu mu parkietażu półobrotowego.

Do konstrukcji czworokąta sferycznego $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ będziemy potrzebować wielościanu w którym w każdym wierzchołku spotykają się trzy przystające czworokąty. Takim wielościanem jest sześcian.



(a) Sześcian wpisany w kulę



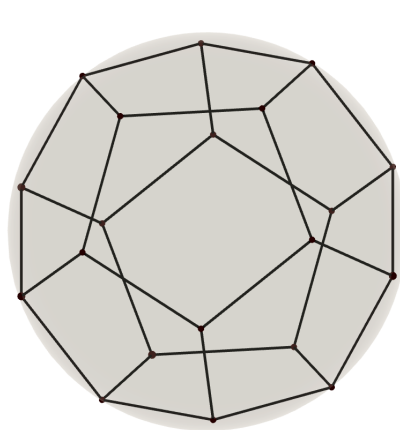
(b) Parkietaż utworzony z czworokątów sferycznych $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

Rysunek 22

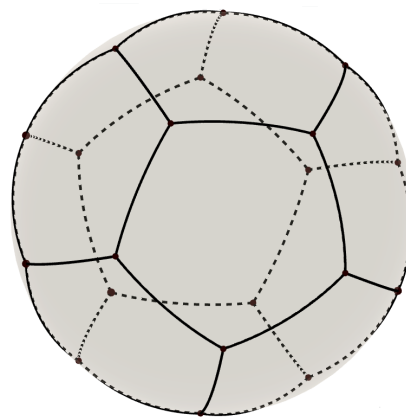
Rzut promienisty sześcianu wpisanego w sferę daje parkietaż sfery, który składa się z jednakowych foremnych czworokątów sferycznych. Ponieważ w każdym wierzchołku tego parkietażu spotykają się trzy jednakowe płytki, miary kątów w tych płytkach muszą wynosić $\frac{2\pi}{3}$. Nietrudno też zauważyć, że taki regularny parkietaż sfery jest półobrotowy.

3.3.4 Konstrukcja sferycznego pięciokąta foremnego $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ i odpowiadającego mu parkietażu półobrotowego

Do konstrukcji pięciokąta sferycznego $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ będziemy potrzebować wielościanu w którym w każdym wierzchołku spotykają się trzy przystające pięciokąty. Takim wielościanem jest dwunastościan foremny.



(a) Dwunastościan foremny wpisany w kulę



(b) Parkietaż utworzony z pięciokątów sferycznych $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

Rysunek 23

Rzut promienisty dwunastościanu foremnego wpisanego w sferę daje parkietaż sfery, który składa się z jednakowych foremnych pięciokątów sferycznych. Ponieważ w każdym wierzchołku tego parkietażu spotykają się trzy jednakowe płytki, miary kątów w tych płytkach muszą wynosić $\frac{2\pi}{3}$. Nietrudno też zauważyć, że taki regularny parkietaż sfery jest półobrotowy.

Podsumowanie

W tym rozdziale skonstruowaliśmy cztery parkietaże półobrotowe z płytkami foremnymi, które omawialiśmy w Podrozdziałach 2.3.2, 2.3.3, 2.4.1, 2.5.1. Pozostało nam jedynie sprawdzić, czy istnieje parkietaż z płytkami trójkątnymi o sumie kątów 2π , który omawialiśmy w Podrozdziale 2.3.1. Tym problemem zajmiemy się w kolejnym rozdziale.

4 Trójkąty sferyczne o sumie miar kątów równej 2π

Na koniec pozostało nam sprawdzić ostatnią serię przykładów; trójkąty sferyczne o sumie miar kątów równej mierze kątowni pełnemu. Na początku zajmiemy się sprawdzeniem istnienia takich płytek.

4.1 Istnienie płytki

W tym rozdziale chcemy pokazać istnienie rodziny trójkątów sferycznych o sumie kątów wewnętrznych równej 2π .

Dla przejrzystości tekstu, w dalszym ciągu na oznaczanie powyższej rodziny trójkątów sferycznych, będziemy używać skrótu $T_{\alpha,\beta,\gamma}^{2\pi}$, gdzie α, β, γ , to kąty wewnętrzne w tych trójkątach. Do pokazania niepustości tej rodziny trójkątów, przyda nam się informacja na temat pola dwukąta i trójkąta sferycznego. Owe informacje zostały zaczerpnięte z [??].

Twierdzenie 4.1. *Pole dwukąta sferycznego o kącie α jest równe:*

$$P = 2\alpha \cdot R^2,$$

gdzie R , to promień sfery.

Twierdzenie 4.2. *Pole trójkąta sferycznego o mierze kątów α, β, γ jest równe:*

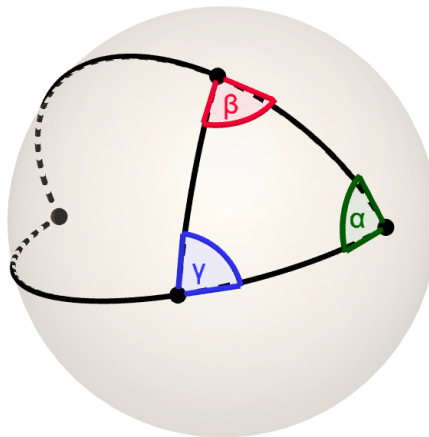
$$P = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot R^2,$$

gdzie R , to promień sfery.

Gdy wiemy już jak obliczać pola dwukąta i trójkąta sferycznego, możemy uzasadnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.3. *Jeśli trójkąt sferyczny $T_{\alpha,\beta,\gamma}^{2\pi}$ istnieje, to $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\beta > \frac{\pi}{2}$, $\gamma > \frac{\pi}{2}$.*

Dowód. Ustalmy dowolny dwukąt sferyczny D_α o kącie α taki, że trójkąt sferyczny T należący do rodziny trójkątów $T_{\alpha,\beta,\gamma}^{2\pi}$, który zawiera się w tym dwukącie (patrz Rysunek 24).



Rysunek 24

Korzystając z Twierdzeń 4.1 i 4.2, mamy, że $P(D_\alpha) = 2\alpha \cdot R^2$ i $P(T) = \pi R^2$.

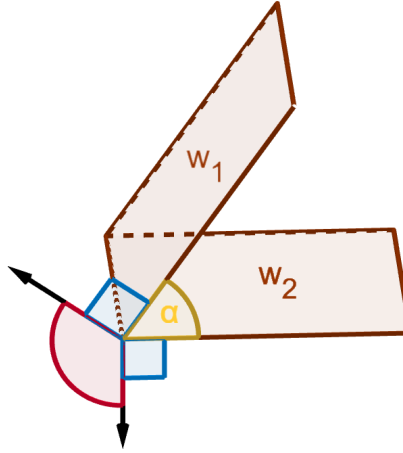
Wiedząc, że trójkąt sferyczny T jest podzbiorem właściwym dwukąta D_α otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P(D_\alpha) &> P(T) \\ 2\alpha \cdot R^2 &> \pi \cdot R^2 \\ \alpha &> \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nierówność $\beta > \frac{\pi}{2}$ oraz $\gamma > \frac{\pi}{2}$ uzasadnia się analogicznie. $\square$

Poznaliśmy dodatkową cechę rodziny trójkątów sferycznych $T_{\alpha,\beta,\gamma}^{2\pi}$. Wróćmy do pokazywania niepustości owej rodziny. Aby to zrobić skorzystamy z następującego Faktu (fakt zaczerpnięty z [7]).

Fakt 4.4. *Dane są dwie półpłaszczyzny q_1 i q_2 , które przecinają się pod kątem dwuściennym równym α . Z każdej z półpłaszczyzn prowadzimy wektor normalny, skierowany w tę stronę, która nie zawiera drugiej półpłaszczyzny tego kąta (patrz Rysunek 25).*



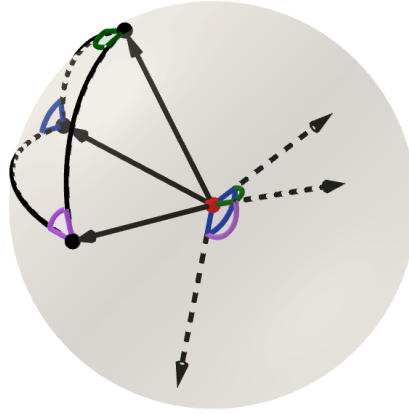
Rysunek 25

Wówczas kąt między wektorami normalnymi tych płaszczyzn wynosi $\pi - \alpha$.

Zauważmy, że Fakt 4.4 działa również w drugą stronę, tzn dla dowolnych dwóch wektorów zaczepionych w tym samym punkcie, o kącie znajdujący się między nimi równym $\pi - \alpha$, możemy znaleźć dwie półpłaszczyzny, prostopadłe do poszczególnych wektorów, w taki sposób, że kąt dwuścienny pomiędzy nimi byłby równy α .

Rozszerzmy teraz sytuację, do przypadku, gdy mamy trzy wektory zaczepione w punkcie, który jest środkiem sfery. Kąty pomiędzy poszczególnymi wektorami są równe odpowiednio $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$. Korzystając z wyżej wymionego rozumowania, możemy dla każdego wektora znaleźć półpłaszczyznę do niego prostopadłą tak, że kąty dwuścienne pomiędzy odpowiednimi ścianami będą równe α , β , γ . Korzystając z rozumowania analogicznego jak w Podrozdziale 3.2.2 możemy pokazać, że istnieje trójkąt sferyczny o kątach wewnętrznych równych α , β , γ (patrz Rysunek 26).

A zatem, aby pokazać, że istnieje trójkąta sferycznego T , który należy do rodziny $T_{\alpha,\beta,\gamma}^{2\pi}$ wystarczy pokazać, że istnieje trójsienne naroże o kątach płaskich $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$. takich, że $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ i $\alpha, \beta, \gamma \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Do tego przyda nam się poniższe twierdzenie, które zostało zaczerpnięte z [8].



Rysunek 26

Twierdzenie 4.5 (Twierdzenie o istnieniu trójsięnnego naroża bryłowego). *Dane są trzy kąty ostre $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ dla których:*

$$i) \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \leq \tilde{\gamma} \text{ oraz } \tilde{\gamma} < \tilde{\alpha} + \tilde{\beta},$$

$$ii) \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} < 2\pi.$$

Wówczas z kątów $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ można zbudować wypukły kąt trójsięnnny, czyli przestrzenne naroże o trzech krawędziach.

Aby skorzystać z Twierdzenia 4.5 sprawdzmy jego warunki. W naszym przypadku kąty płaskie mają miary $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, założmy, że $\pi - \alpha \leq \pi - \beta \leq \pi - \gamma$. Sprawdźmy najpierw drugi warunek.

$$\pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma = 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \pi < 2\pi,$$

zatem drugi warunek jest spełniony. Pozostało nam sprawdzić pierwszy warunek.

$$\pi - \alpha + \pi - \beta = 2\pi + \gamma - \gamma - \alpha - \beta = 2\pi + \gamma - 2\pi = \gamma > \pi - \gamma,$$

gdyż $\gamma > \frac{\pi}{2}$. Wobec tego

$$\pi - \alpha + \pi - \beta \geq \pi - \gamma.$$

Zatem pierwszy warunek również jest spełniony.

Wniosek 4.6. *Na mocy Twierdzenia 4.5 istnieje naroże trójsięnnne o kątach płaskich $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, gdzie $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\beta > \frac{\pi}{2}$, $\gamma > \frac{\pi}{2}$.*

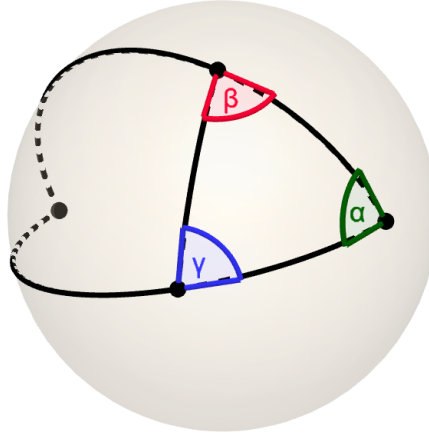
Wniosek 4.7. *Niech α , β , γ będą dowolnymi kątami wypukłymi, takimi, że $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ oraz $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\beta > \frac{\pi}{2}$, $\gamma > \frac{\pi}{2}$. Wówczas istnieje trójkąt sferyczny o kątach α , β , γ .*

4.2 Konstrukcja parkietażu

Wiemy już, że rodzina trójkątów sferycznych wypukłych o sumie kątów wewnętrznych równej 2π nie jest zbiorem pustym. Pokażemy teraz, że z każdego trójkąta z tej rodziny da się skonstruować parkietaż półobrotowy na sferze. Do tego przyda nam się poniższy fakt.

Fakt 4.8. *Każdy trójkąt sferyczny należący do zbioru $T_{\alpha,\beta,\gamma}^{2\pi}$ zawiera się w półsferze ograniczonej okręgiem zawierającym dowolny jego bok.*

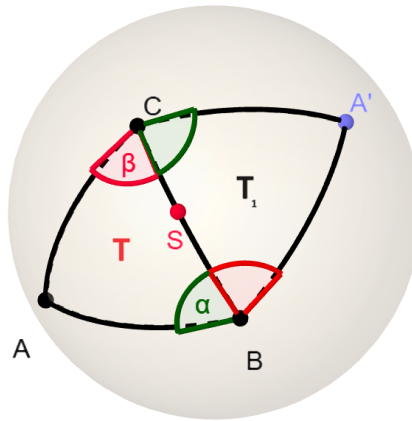
Dowód. Dany jest dowolny trójkąt sferyczny T należący do zbioru $T_{\alpha,\beta,\gamma}^{2\pi}$, dla pewnych α, β, γ . Załóżmy bez straty ogólności, że $\beta \leq \gamma \leq \alpha$. Trójkąt sferyczny T zawiera się w dwukącie D_α o kącie α (patrz rysunek 27).



Rysunek 27

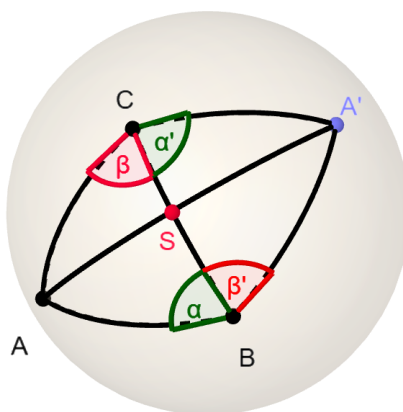
Korzystając z tego, że trójkąt sferyczny T jest trójkątem wypukłym mamy, że $\alpha \leq \pi$. Wówczas możemy powiedzieć, że dwukąt D_α zawiera się w pewnym dwukącie D_π , który ma wspólny bok z dwukątem D_α . ograniczonej okręgi. Stąd mamy, że trójkąt T zawiera się w D_π . $\square$

Wiemy, że płytka T o kształcie trójkąta sferycznego należąca do rodziny $T_{\alpha,\beta,\gamma}^{2\pi}$ znajduje się na półsfery ograniczonej okręgiem zawierający jeden z jego boków. Umieścimy ją więc na sferze. Teraz bez obaw o przecięcie się dwóch płytek możemy postawić drugą płytkę T_1 przystającą do płytki T w sposób przedstawiony na Rysunku 28.



Rysunek 28

Pokażemy, że płytka T_1 jest obrazem płytki T w obrocie sfery o środku w punkcie X wokół punktu S o kąt π , gdzie S jest środkiem odcinka BC . Oczywiście jest, że punkt B przejdzie na C , a C na B . Wówczas możemy powiedzieć, że odcinek BS przeszedł na odcinek CS i vice versa. Aby pójść dalej zauważmy, że trójkąt ASB jest przystający do trójkąta $A'SC$ (cecha bkb), co ilustruje Rysunek 29.



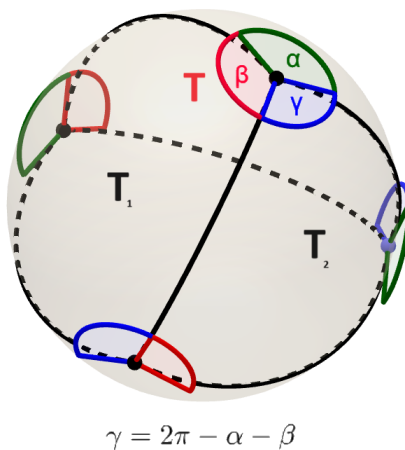
Rysunek 29

Wobec tego możemy powiedzieć, że obrazem trójkąta ASB w obrocie sfery wokół punktu S o kąt π jest trójkąt A_1SC . Podobnie obrazem trójkąta ASC będzie trójkąt A_1SB .

Wniosek 4.9. *Płytką T_1 jest obrazem płytki T w obrocie sfery wokół punktu S o kąt π , gdzie S jest środkiem odcinka BC .*

Gdy położyliśmy już dwie płytki, to najwyższy czas na trzecią, tylko gdzie?

Zwróćmy ponownie nasze oczy na Rysunek 29. Możemy zauważyć w nim, że w postawionych dwóch płytkach znajdują się dwa wierzchołki, które są wierzchołkami dwóch kątów. Bez straty ogólności wybierzmy punkt C . Wokół wierzchołka C znajduje się kąt α i kąt β . Do pokrycia całej powierzchni brakuje nam $2\pi - \alpha - \beta$, czyli kąt γ (bo $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$). Wobec tego w puste miejsce wokół wierzchołka C przyłóżmy trzecią płytkę przystającą do płytki T , którą oznaczmy jako T_2 (patrz Rysunek 30).



$$\gamma = 2\pi - \alpha - \beta$$

Rysunek 30

Aby powstałe pokrycie było parkietażem potrzebujemy pokazać jeszcze dwie rzeczy (patrz Definicja 1.17):

- płytki T , T_1 , T_2 na siebie nie nachodzą;
- Jeśli płytki T_2 ma część wspólną z płytką T lub z płytką T_1 , to jest to ich wspólny cały bok.

Zacznijmy od drugiego warunku. Korzystając z tego, że płytki T , T_1 i T_2 są do siebie przystające, mamy, że bokowi płytki T_1 przylegający do płytki T_2 odpowiada bok płytki T_2 przylegający do płytki T_1 . A zatem płytka T_1 przylega do płytki T_2 całym bokiem. Postępujemy podobnie z bokiem płytki T przylegający do płytki boku płytki T_2 . Do pełni szczęścia pozostało nam do pokazania pierwszy warunek. Bez straty ogólności pokazemy, że płytka T_2 nie nachodzi się z płytką T . Niech D_α będzie dwukątem sferycznym, który zawiera płytkę T , a D_β będzie dwukątem sferycznym, który zawiera płytkę T_2 . Korzystając z tego, że dowolne dwa wypukłe dwukąty o wspólnym boku się nie nachodzą otrzymujemy, że tym bardziej płytki T i T_2 się nie nachodzą. Postępując podobnie jak to było z płytką T_1 dostajemy poniższy wniosek.

Wniosek 4.10. *Płytką T_2 jest obrazem płytki T_1 w obrocie sfery wokół środka wspólnego boku o kąt π .*

Na koniec pozostało nam położyć ostatnią czwartą płytkę. Zauważmy, że pozostawiony pusty obszar jest trójkątem sferycznym o kątach α , β , γ . Wobec tego możemy przyłożyć do niej czwartą płytkę T_3 , która jest przystającą do płytki T . Wobec tego udało nam się pokryć sferę przystającymi płytkami należące do rodziny trójkątów $T_{\alpha,\beta,\gamma}^{2\pi}$.

4.3 Podsumowanie

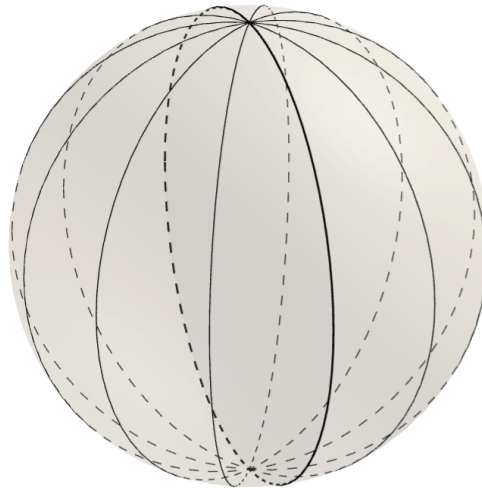
W tym rozdziale pokazaliśmy, że można skonstruować parkietaże półobrotowe na sferze z płytek w kształcie trójkąta sferycznego o kątach rozwartych takich, że ich suma jest równa 2π .

5 Podsumowanie

W tym rozdziale chcielibyśmy jeszcze raz przedstawić owoc naszej pracy, czyli klasyfikację wszystkich parkietaży półobrotowych na sferze.

5.1 Parkietaże półobrotowe z dwukątów sferycznych

Parkietaż półobrotowy na sferze możemy skonstruować za pomocą dwukątów sferycznych o kącie $\frac{2\pi}{n}$, gdzie $n \geq 3$.



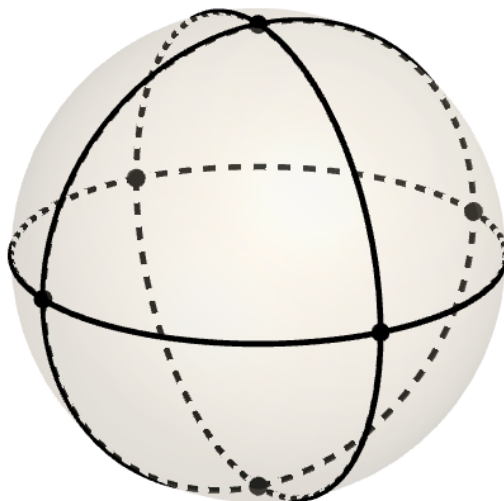
Rysunek 31

5.2 Parkietaże półobrotowe skonstruowane za pomocą brył platońskich

Dzięki rozdziałowi drugiemu i trzeciemu udało nam się odkryć kolejne cztery parkietaże półobrotowe na sferze.

5.2.1 Parkietaż utworzony z trójkątów sferycznych $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

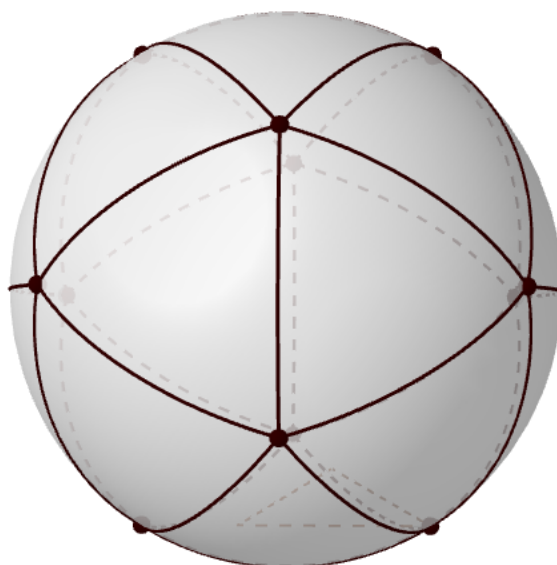
Parkietaż utworzony z trójkątów sferycznych $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ (patrz Rysunek 32) powstał jako obraz przekształcenia promienistego ośmiościanu foremnego wpisanego w sferę.



Rysunek 32

5.2.2 Parkietaż utworzony z trójkątów sferycznych $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$

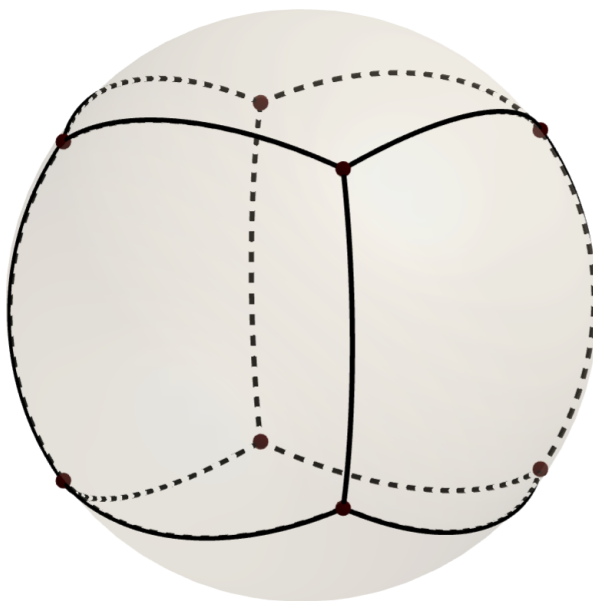
Parkietaż utworzony z trójkątów sferycznych $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$ (patrz Rysunek 33) powstał jako obraz przekształcenia promienistego dwudziestościanu foremnego wpisanego w sferę.



Rysunek 33

5.2.3 Parkietaż utworzony z czworokątów sferycznych $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

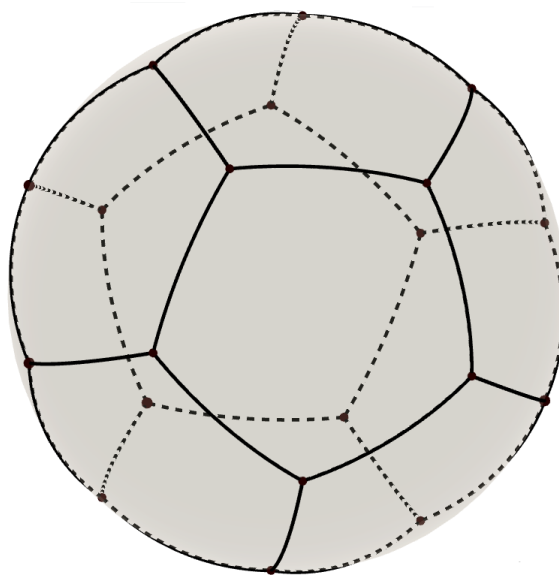
Parkietaż utworzony z czworokątów sferycznych $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (patrz Rysunek 34) powstał jako obraz przekształcenia promienistego sześcianu wpisanego w sferę.



Rysunek 34

5.2.4 Parkietaż utworzony z foremnych pięciokątów sferycznych $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

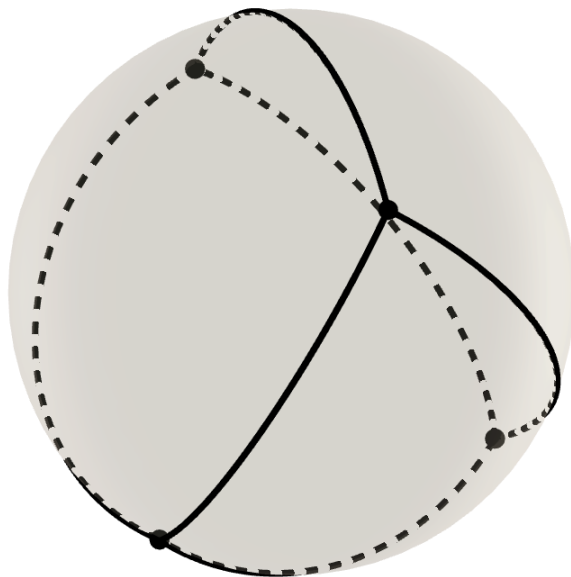
Parkietaż utworzony z pięciokątów sferycznych $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (patrz Rysunek 35) powstał jako obraz przekształcenia promienistego dwunastokąta foremnego wpisanego w sferę.



Rysunek 35

5.3 Parkietaże półobrotowe z trójkątów sferycznych o kątach rozwartych, takich, że ich suma jest równa 2π

W rozdziale czwartym pokazaliśmy, że można skonstruować parkietaż półobrotowy na sferze za pomocą płytek o kształcie trójkąta sferycznego o kątach rozwartych takich, że ich suma jest równa 2π (patrz Rysunek 36).



Rysunek 36

Literatura

- [1] Edyta Śnieżek *Geometria sferyczna w literaturze polskojęzycznej* Wrocław 1997
- [2] Dr. Jack L. Jackson II *Spherical Geometry Environment*. Dostępne na stronie:
<https://www.geogebra.org/m/skbcvuq8>
- [3] Steve Phelps – Spherical Icosahedron. Dostępne na stronie:
<https://www.geogebra.org/m/fgeRhU8b>
- [4] Marshall A. Whittlesey *Spherical geometry and its applications* 2020 Taylor & Francis Group, LLC
- [5] Obraz pobrany ze strony :
<https://brainly.pl/zadanie/19819403>
- [6] Obraz pobrany ze strony :
<https://fyzmatik.pise.cz/1005-platonska-telesa.html>
- [7] Tomasz Elsner Skrypt do Algebry liniowej 1 dostępnej na stronie :
<https://www.math.uni.wroc.pl/~elsner/dydaktyka/alglin1-skrypt.pdf>
- [8] Jan Zydlar *Geometria* Warszawa 1997