

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

Patrycja Pachuc

Klasyfikacja zakresów kształtów płytek w
parkietach izohedralnych o czworokątnych i
sześciokątnych niesymetrycznych płytkach
specjalność: nauczycielska

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2024/2025

Spis treści

1	Wprowadzenie	3
2	Twierdzenia i definicje	4
3	Czworokąty	11
3.1	Typ IH41	12
3.2	Typ IH42	13
3.3	Typ IH43	14
3.4	Typ IH44	16
3.5	Typ IH45	17
3.6	Typ IH46	21
3.7	Typ IH47	24
3.8	Typ IH48	26
3.9	Typ IH49	28
3.10	Typ IH50	31
3.11	Typ IH51	32
3.12	Typ IH52	35
3.13	Typ IH53	38
3.14	Typ IH54	41
3.15	Typ IH55	44
3.16	Typ IH56	45
3.17	Parkietaże czworokątne – podsumowanie	48
4	Sześciokąty	50
4.1	Typ IH1	50
4.2	Typ IH2	52
4.3	Typ IH3	55
4.4	Typ IH4	59
4.5	Typ IH5	60
4.6	Typ IH6	62
4.7	Typ IH7	66
4.8	Parkietaże sześciokątne – podsumowanie	68
5	Dodatek	69
5.1	Dowód twierdzenia o translacji	69
5.2	Dowód twierdzenia o obrocie	72
5.3	Dowód twierdzenia o półobrocie	73
5.4	Dowód twierdzenia o odbiciu	73

1 Wprowadzenie

Niniejsza praca stanowi swoistą kontynuację i uzupełnienie pracy magisterskiej autorstwa Pawła Gielgiera *Klasyfikacja zakresów kształtów płytek w wielokątnych parkietażach izohedralnych o niesymetrycznych płytkach* [1]. W przywołanej pracy autor opisał 23 z 46 typów parkietaży izohedralnych płaszczyzny o niesymetrycznych płytkach – mianowicie te o płytkach trójkątnych, pięciokątnych oraz pewne 3 typy parkietaży izohedralnych o płytkach czworokątnych. Obiektem zainteresowań niniejszej pracy są pozostałe 23 przypadki, a dokładniej wszystkie przypadki parkietaży o płytkach sześciokątnych oraz nieomówione w [1] przypadki płytek czworokątnych. Materiał w tej pracy został przedstawiony w sposób niezależny od wcześniej wspomnianej pracy magisterskiej, co pozwala na jego zrozumienie bez konieczności wcześniejszego zapoznania się z opracowaniem [1].

W książce [3] dokonano klasyfikacji parkietaży izohedralnych, natomiast w publikacji [2] na dwóch ilustracjach przedstawiono szkicowe zakresy kształtów płytek występujących w tych parkietażach. Ilustracje te nie zostały jednak opatrzone komentarzami ani uzasadnieniami. W szczególności brakuje tam jednoznacznych informacji dotyczących warunków, jakie musi spełniać płytka w danym parkietażu, a także odpowiedzi na pytanie, czy może ona w pewnych przypadkach mieć kształt wielokąta wklęsłego. Celem niniejszej pracy jest szczegółowe określenie zakresów dopuszczalnych kształtów płytek w poszczególnych typach parkietaży izohedralnych oraz przedstawienie uzasadnień poprawności tych ustaleń.

Praca ma charakter popularnonaukowy. Została napisana w sposób przystępny, z myślą o uczniach szkół średnich. Bazuje na wiedzy dostępnej na tym etapie edukacji. Pojęcia i twierdzenia, które wykraczają poza ten zakres, zostały przedstawione w Rozdziale 2: *Twierdzenia i definicje*. Opracowanie to skierowane jest przede wszystkim do młodych czytelników, aby rozbudzić ich zainteresowanie geometrią, a szerzej – matematyką, oraz zachęcić do dalszego odkrywania tej dziedziny. Istotną częścią tej pracy jest ukazanie, że przy użyciu prostych narzędzi możemy prowadzić ciekawe i niebanalne rozumowania geometryczne.

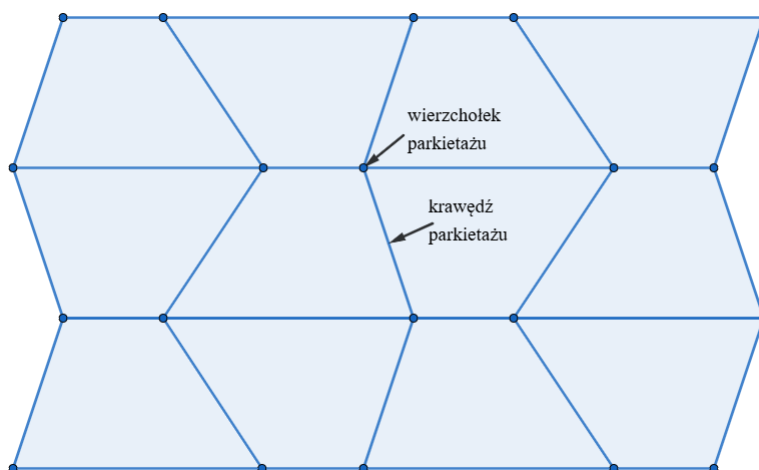
Poniższe opracowanie może też stanowić inspirację dla grafików komputerowych, poszukujących nietuzinkowych, regularnych form graficznych opartych na parkietażach izohedralnych o niesymetrycznych płytkach.

Wszystkie zamieszczone w tej pracy rysunki wykonałam samodzielnie, korzystając z programu GeoGebra. Ich liczba oraz przejrzystość mają ułatwić potencjalnemu czytelnikowi zrozumienie kolejnych etapów prowadzonych rozumowań.

2 Twierdzenia i definicje

Czym jest parkietaż płaszczyzny? Intuicyjnie jest to ułożenie posadzki z płytek. Chcemy, aby taka posadzka nie miała dziur i żeby płytki na siebie nie nachodziły. Będziemy rozważać *parkietaże wielokątne*, to znaczy takie, których płytki są wielokątami.

Definicja 1. *Parkietaż wielokątny płaszczyzny to wyłożenie płaszczyzny wielokątami w taki sposób, że część wspólna dwóch płytek jest bokiem w każdej z tych płytek (krawędź parkietażu), wierzchołkiem w każdej z tych płytek (wierzchołek parkietażu) lub zbiorem pustym.*



Rysunek 1: Przykładowy fragment parkietażu wielokątnego o płytkach w kształcie trapezu

Przypomnijmy, czym jest izometria płaszczyzny.

Definicja 2. *Izometria płaszczyzny to przekształcenie zachowujące długości i kształty.*

Izometrie możemy sklasyfikować w następujący sposób:

1. translacja o wektor;
2. obrót o zadany kąt wokół ustalonego punktu;
3. symetria osiowa (odbicie) względem prostej;
4. symetria z poślizgiem, czyli złożenie odbicia względem prostej i translacji o wektor równoległy do tej prostej.

Przytoczmy kilka prostych i znanych z geometrii faktów dotyczących izometrii.

- Odcinek powstały w wyniku translacji o wektor jest równoległy do wyjściowego.

- Obrót o 180° nazywamy półobrotem. Półobrót wokół pewnego punktu jest tym samym, co odbicie względem punktu, wokół którego wykonano półobrót.
- Odcinek powstały w wyniku półobrotu jest równoległy do pierwotnego odcinka.

Definicja 3. *Symetria parkietażu to izometria przekształcająca parkietaż na samego siebie.*

Zwróćmy uwagę na to, że identyczność zawsze jest symetrią parkietażu. Wyróżniamy pewien szczególny rodzaj parkietaży, a mianowicie *parkietaże izohedralne*.

Definicja 4. *Parkietaż izohedralny to parkietaż płaski, w którym dla każdych dwóch płytek istnieje symetria parkietażu przeprowadzająca jedną płytkę na drugą.*

Oczywistą konsekwencją tej definicji jest to, że wszystkie płytki parkietażu izohedralnego muszą być figurami przystającymi.

Definicja 5. *Stopniem (walencyjnością) wierzchołka parkietażu nazwiemy liczbę spotykających się w nim płytek parkietażu.*

Na Rysunku 1 wszystkie wierzchołki parkietażu są stopnia 4.

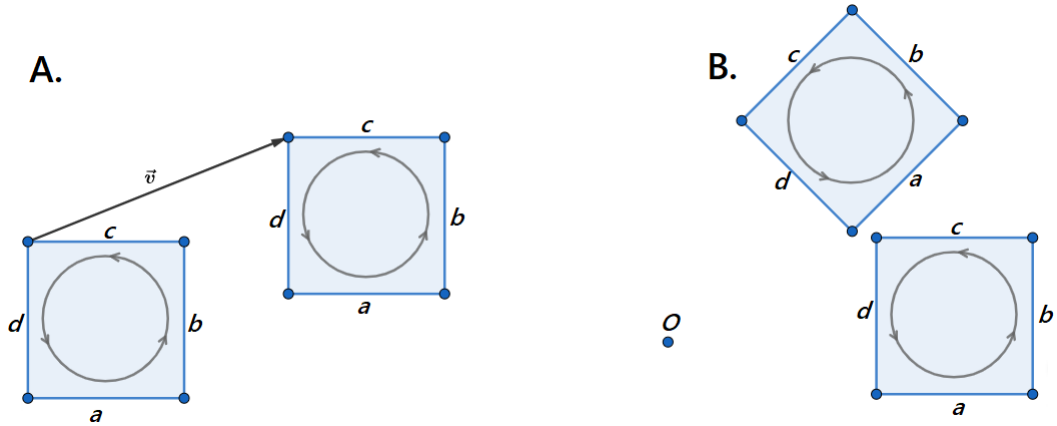
Definicja 6. *Typ walencyjny parkietażu izohedralnego to zestaw stopni wierzchołków parkietażu na obwodzie pojedynczej płytki w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara.*

Analizowane w tej pracy parkietaże izohedralne o płytkach czworokątnych będą miały typ walencyjny $[4,4,4,4]$, to znaczy, że w każdym wierzchołku parkietażu spotykają się cztery płytki. Natomiast analizowane parkietaże izohedralne o płytkach sześciokątnych będą miały typ walencyjny $[3,3,3,3,3,3]$, czyli w każdym wierzchołku takiego parkietażu spotykają się trzy płytki.

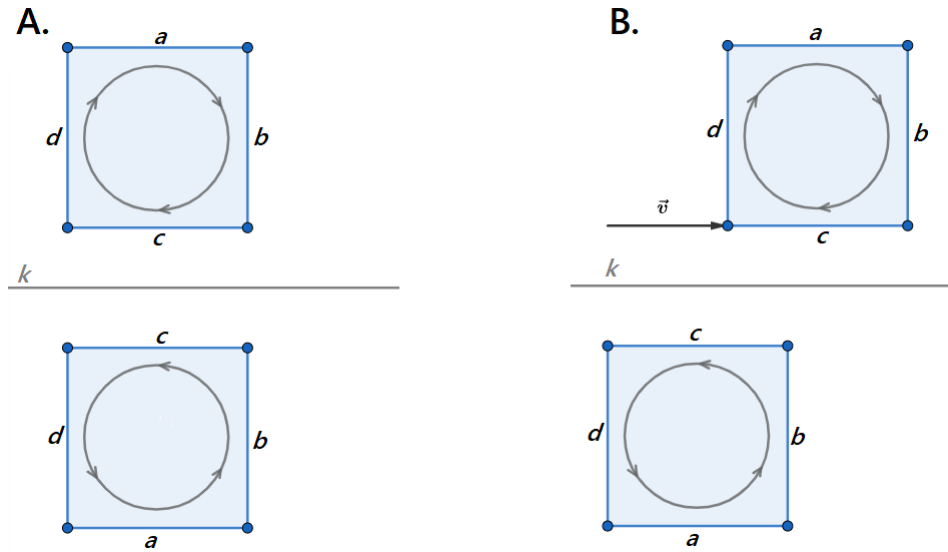
Dalej omówimy pojęcie orientacji płytki oraz podziału izometrii ze względu na zachowywanie orientacji.

Definicja 7. *Orientacją płytki będziemy nazywać kierunek ruchu po obwodzie płytki (zgodny lub przeciwny do ruchu wskazówek zegara), według którego etykietowane są boki.*

Uwaga 8. *Translacja i obrót to przekształcenia zachowujące orientację, zaś symetria względem prostej oraz symetria z poślizgiem to przekształcenia zmieniające orientację.*



Rysunek 2: Przekształcenia zachowujące orientację. (A) Translacja o wektor $\vec{v}$. (B) Obrót wokół punktu O .



Rysunek 3: Przekształcenia zmieniające orientację. (A) Odbicie względem prostej k . (B) Odbicie względem prostej k z poślizgiem o wektor $\vec{v}$.

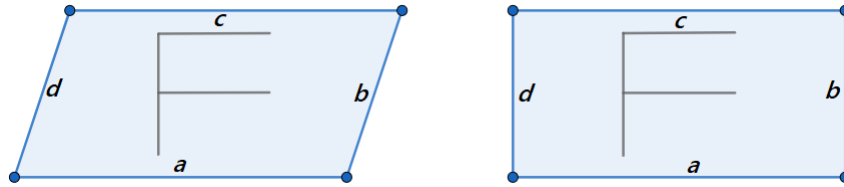
Wiemy już, czym są parkietaże izohedralne. W tytule niniejszej pracy jest mowa o *niesymetrycznych płytkach*. Sprecyzujmy, co rozumiemy pod tym pojęciem.

Definicja 9. *Płytką w parkietażu izohedralnym jest niesymetryczna, gdy nie istnieje różna od tożsamościowej symetria parkietażu przekształcająca ją na samą siebie.*

Płytki, które nie posiadają symetrii własnych są oczywiście niesymetryczne. Nie jest to jednak jedyny przypadek, gdy płytka w parkietażu izohedralnym jest niesymetryczna.

Płytką będzie niesymetryczną również wtedy, gdy płytka ma symetrię własną, ale symetria parkietu sprawia, że płytka staje się niesymetryczna. Przykładowo, symetrią własną równoległoboku jest półobrot wokół punktu przecięcia przekątnych, ale, gdy rozważanymi izometriami parkietu będą tylko odbicia i translacje to ta płytka staje się dla nas niesymetryczna.

Najprostszym jednak sposobem, aby płytka posiadająca symetrie własne stała się niesymetryczna, jest narysowanie na niej wzoru. Tym wzorem będzie dla nas poetykietowanie boków tej płytki. Dodatkowo, w kilku początkowych podrozdziałach wprowadzimy dodatkowy wzór – literę **F** na płytce, aby dodatkowo zaznaczyć brak symetrii płytki oraz pokazać sens rozróżniania poszczególnych typów parkietu izohedralnych.



Rysunek 4: Przykładowe dwie **niesymetryczne** płytki, na których wprowadzono etykietowanie boków i dodatkowy wzór – literę **F**

Przytoczmy ważną i znaną własność, którą posiadają parkietu izohedralne o niesymetrycznych płytkach.

Lemat 10. *W izohedralnym parkiecie o niesymetrycznych płytkach dla dowolnych dwóch płytek P_1 i P_2 istnieje dokładnie jedna symetria parkietu, która przeprowadza płytkę P_1 na P_2 .*

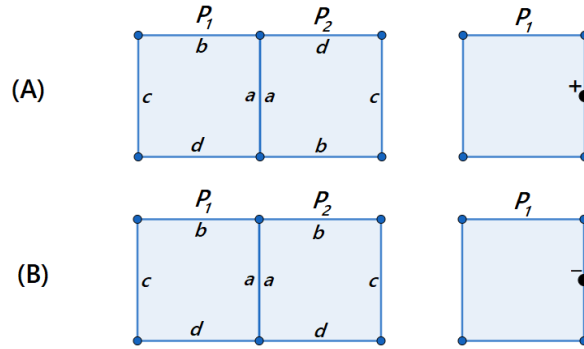
Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieją dwie różne symetrie parkietu T i S przeprowadzające płytkę P_1 na płytkę P_2 . Każdą izometrię możemy odwrócić, więc T^{-1} oraz S^{-1} są izometriami przeprowadzającymi płytkę P_2 na płytkę P_1 . Rozważmy złożenie izometrii $S^{-1} \circ T$ nałożone na P_1 , czyli $S^{-1}(T(P_1))$. Ponieważ $T(P_1) = P_2$, to $S^{-1}(T(P_1)) = S^{-1}(P_2) = P_1$, bo S^{-1} przeprowadza P_2 na P_1 . Oznacza to, że złożenie izometrii $S^{-1} \circ T$ jest identycznością na P_1 , więc $S^{-1} \circ T = I$. Nakładając S na obie strony równości otrzymujemy, że $T = S$. $\square$

Jak będziemy etykietować krawędzie parkietu? Krawędzie jednej wyróżnionej płytki etykietujemy kolejnymi literami alfabetu, a następnie przenosimy etykiety płytek zgodnie z odpowiednimi symetriami parkietu przenoszącymi tę pierwszą płytkę na dowolną inną. W ten sposób każda krawędź ma dwie etykiety pochodzące od dwóch płytek, do których przynależy.

Zwróćmy uwagę na to, że w danym typie izohedralnym parkietu każda płytka jest przekształcana na płytki sąsiadujące z nią przez boki o poszczególnych etykietach przez

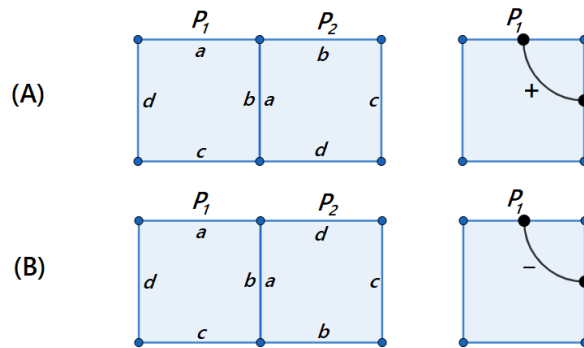
te same izometrie, zatem wystarczy wiedzieć, jak jedna płytką jest przekształcana na sąsiednie. Wprowadzimy na to pewne oznaczenia. Rozważmy dwie płytki P_1 i P_2 . Niech T będzie zgodnie z Lematem 10 jedyną izometrią parkietu przekształcającą płytkę P_1 na P_2 . Niech płytki P_1 i P_2 przylegają do siebie przez bok o etykiecie a w płytce P_2 (ich częścią wspólną jest ten bok). Będziemy rozróżniać przypadki w zależności od tego, gdzie w płytce P_1 znajduje się bok o etykiecie a .

1. Jeśli bok o etykiecie a w płytce P_1 to wspólny bok płytek P_1 i P_2 (symetria parkietu T przekształca bok o etykiecie a sam na siebie), to oznaczamy to kropką na środku boku. Jeśli symetria T zachowuje orientację, to piszemy przy tej kropce znak plus $+$, a jeśli nie zachowuje, to znak minus $-$ (patrz Rysunek 5).



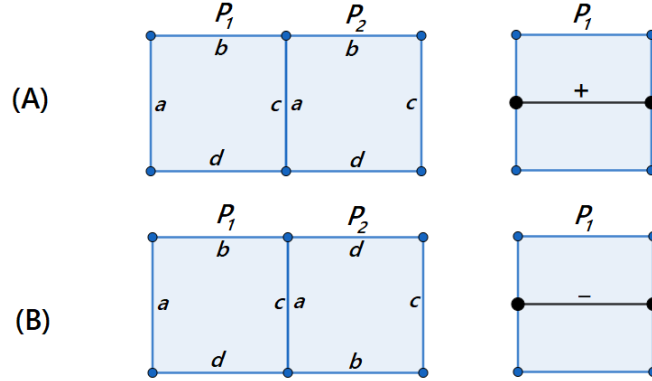
Rysunek 5: Oznaczenie, gdy wspólny bok płytek P_1 i P_2 ma taką samą etykietę w obu płytkach, zaś symetria T : (A) zachowuje orientację, (B) nie zachowuje orientacji.

2. Jeśli bok o etykiecie a w płytce P_1 ma dokładnie jeden wspólny wierzchołek z bokiem o etykiecie a w P_2 , to oznaczamy to łukiem łączącym środki dwóch wspomnianych boków. Jeśli symetria T zachowuje orientację, to przy łuku piszemy znak plus $+$, a jeśli nie zachowuje, to znak minus $-$ (patrz Rysunek 6).



Rysunek 6: Oznaczenie, gdy boki o etykietach a w płytkach P_1 i P_2 mają wspólny wierzchołek i symetria T : (A) zachowuje orientację, (B) nie zachowuje orientacji.

3. Jeśli bok o etykietce a w płytce P_1 nie ma wspólnego wierzchołka z bokiem o etykietce a w P_2 , to oznaczamy to łukiem łączącym środki dwóch wspomnianych boków. Odcinek również będziemy nazywać łukiem. Jeśli symetria parkietażu zachowuje orientację, to przy łuku piszemy znak plus $+$, a jeśli nie zachowuje, to znak minus $-$ (patrz Rysunek 7).



Rysunek 7: Oznaczenie, gdy boki o etykietach a w płytkach P_1 i P_2 nie mają wspólnego wierzchołka i symetria T : (A) zachowuje orientację, (B) nie zachowuje orientacji.

Wprowadzone oznaczenia rozumiemy w ten sposób, że dwa boki połączone łukiem są nawzajem swoimi obrazami przez odpowiednie izometrie parkietażu. Kropka na środku boku to w pewnym sensie połączenie boku łukiem z samym sobą. Znaki plus $+$ oraz minus $-$ oznaczają odpowiednio zachowywanie bądź zmianę orientacji przez wspomniane izometrie.

Wprowadzenie odpowiednich oznaczeń na wszystkich bokach pokazuje, jak dana płytka jest przekształcana na sąsiednie. Nazywamy to *diagramem sąsiedowania*. Wszystkie możliwe diagramy sąsiedowania dla parkietaży o niesymetrycznych czworokątnych płytkach o typie walencyjnym $[4, 4, 4, 4]$ w izohedralnych parkietażach zostały zaprezentowane na Rysunku 8. Zestawienie diagramów sąsiedowania dla parkietaży izohedralnych o sześciokątnych niesymetrycznych płytkach o typie walencyjnym $[3^6]$ zostały pokazane na Rysunku 58. Klasyfikację tych diagramów czytelnik może znaleźć w [3] (Rozdział 6).

Przedmiotem naszego zainteresowania będą parkietaże sklasyfikowane według *typów izohedralnych*.

Definicja 11. Dwa parkietaże izohedralne należą do tego samego typu, zwanego *typem izohedralnym*, gdy mają ten sam typ walencyjny oraz płytki mają ten sam diagram sąsiedowania.

Przytoczmy za [1] serię twierdzeń, które w [1] zostały sformułowane bez uzasadnienia, a które w niniejszej pracy udowodnimy w ostatnim rozdziale pracy – Dodatek. Niech będzie dany parkietaż izohedralny o niesymetrycznych płytkach i odpowiednio poetykietowych

bokach wszystkich płytek. Niech płytki P_1 i P_2 przylegają do siebie bokiem o etykiecie a w płytce P_2 . Niech T będzie jedyną izometrią parkietażu przekształcającą płytkę P_1 na P_2 .

Twierdzenie 12 (o półobrocie). *Jeśli wspólny bok płytek P_1 i P_2 ma etykietę „a” zarówno w P_1 jak i P_2 oraz symetria parkietażu T zachowuje orientację (patrz Rysunek 5A), to T jest półobrotem względem środka wspólnego boku.*

Twierdzenie 13 (o odbiciu). *Jeśli wspólny bok płytek P_1 i P_2 ma etykietę „a” zarówno w P_1 jak i P_2 oraz symetria parkietażu T nie zachowuje orientacji (patrz Rysunek 5B), to T jest odbiciem względem prostej zawierającej wspólny bok.*

Twierdzenie 14 (o obrocie). *Jeśli boki o etykietach „a” w płytkach P_1 i P_2 mają jeden wspólny wierzchołek oraz symetria parkietażu T zachowuje orientację (patrz Rysunek 6A), to T jest obrotem wokół wspólnego wierzchołka tych boków oraz boki o etykietach „a” w płytkach P_1 i P_2 są równe (to znaczy, że mają tę samą długość).*

Twierdzenie 15. *Jeśli boki o etykietach „a” w płytkach P_1 i P_2 mają jeden wspólny wierzchołek oraz symetria parkietażu T nie zachowuje orientacji (patrz Rysunek 6B), to T jest symetrią z poślizgiem oraz boki o etykietach „a” w płytkach P_1 i P_2 są równe.*

Twierdzenie 16 (o translacji). *Jeśli boki o etykach „a” w płytkach P_1 i P_2 nie mają wspólnego wierzchołka oraz symetria parkietażu T zachowuje orientację (patrz Rysunek 7A), to T jest translacją oraz boki o etykietach „a” w płytkach P_1 i P_2 są równe i równoległe.*

Twierdzenie 17. *Jeśli boki o etykach „a” w płytkach P_1 i P_2 nie mają wspólnego wierzchołka oraz symetria parkietażu T nie zachowuje orientacji (patrz Rysunek 7B), to T jest symetrią z poślizgiem oraz boki o etykietach „a” w płytkach P_1 i P_2 są równe.*

W niniejszej pracy będziemy korzystać z Twierdzeń 12, 13, 14, 16, których dowody czytelnik może znaleźć w Rozdziale 5 – Dodatku. Dla kompletności przytaczamy również pozostałe dwa twierdzenia dotyczące symetrii z poślizgiem. Najczęściej będziemy wykorzystywać Twierdzenie 16.

Będziemy używać pewnego potocznego terminu **odbicia względem boku**, więc je sprecyzujemy.

Definicja 18. *Odbicie względem odcinka do odbicia względem prostej zawierającej ten odcinek.*

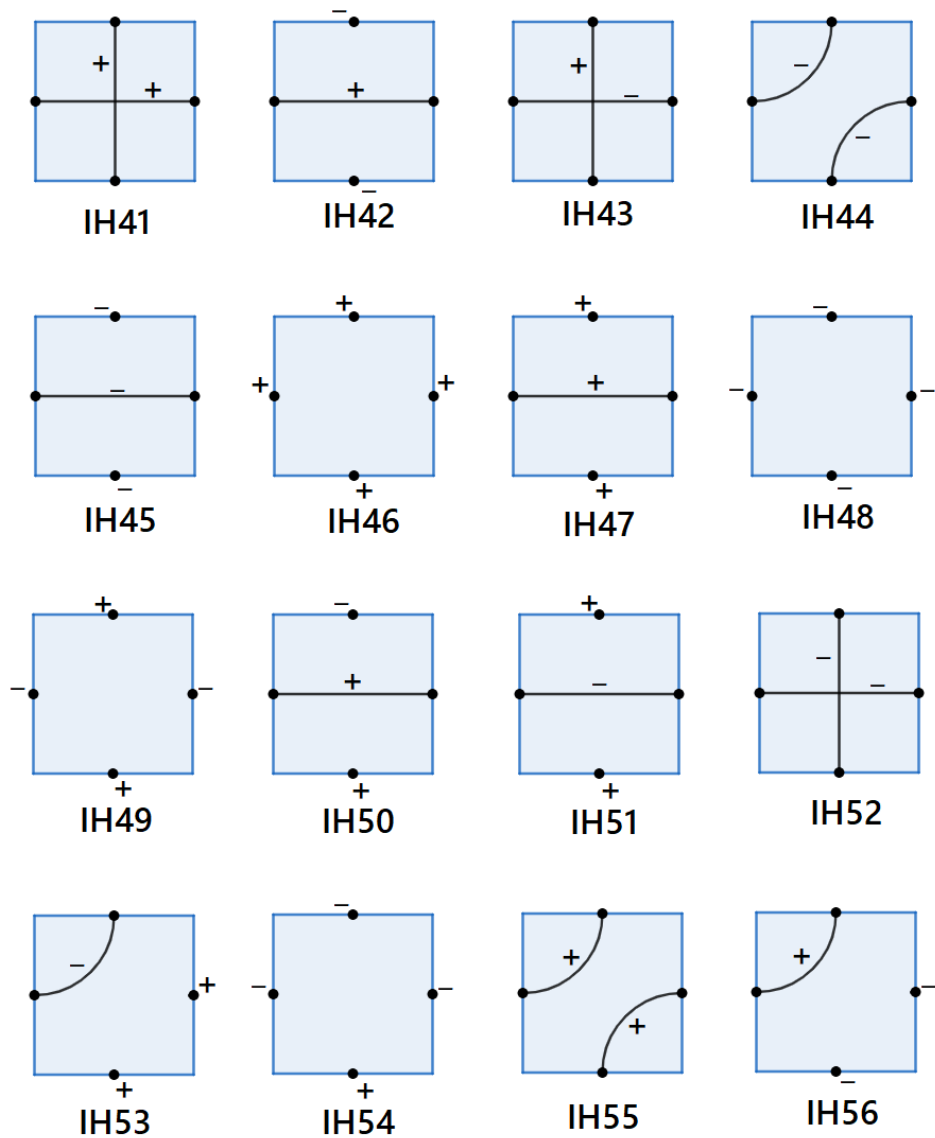
Przydatny w wielu uzasadnieniach będzie poniższy pomocniczy fakt.

Fakt 19. *Boki płytki z diagramu sąsiedownia połączone łukiem są tej samej długości.*

Dowód. Przypomnijmy, że stosujemy konwencję, że odcinek również nazywamy łukiem. Boki połączone łukiem mają taką samą etykietę w dwóch różnych płytkach. Jedyna izometria przeprowadzająca jedną płytkę na drugą, przeprowadza również jeden z tych boków na drugi. Izometria jest przekształceniem zachowującym długości odcinków, więc boki połączone łukiem są równe. $\square$

3 Czworokąty

Rysunek 8 pokazuje diagramy sąsiadowania dla rozważanych w tej pracy typów parkietazy izohedralnych o niesymetrycznych płytkach czworokątnych zaczerpnięte z publikacji [3] (Rozdział 6). Wszystkie te parkietaże mają typ walencyjny $[4^4]$ (w każdym wierzchołku parkietażu spotykają się 4 płytki), co ma sygnalizować kwadratowy kształt tych płytek. Dodatkowe trzy typy parkietaży o płytkach czworokątnych IH30, IH31, IH33 mające typy walencyjne różne od $[4,4,4,4]$ zostały już opisane w pracy magisterskiej [1].

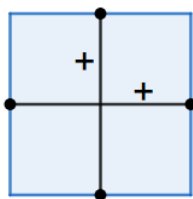


Rysunek 8: Diagramy sąsiadowania dla rozważanych parkietazy czworokątnej

W następnych podrozdziałach będziemy kolejno analizować poszczególne typy izohedralne pod kątem możliwych kształtów czworokątnych płytek w parkietach poszczególnych typów.

3.1 Typ IH41

Parkiet izohedralny typu IH41 tworzą płytki z diagramem sąsiadowania jak na Rysunku 9.

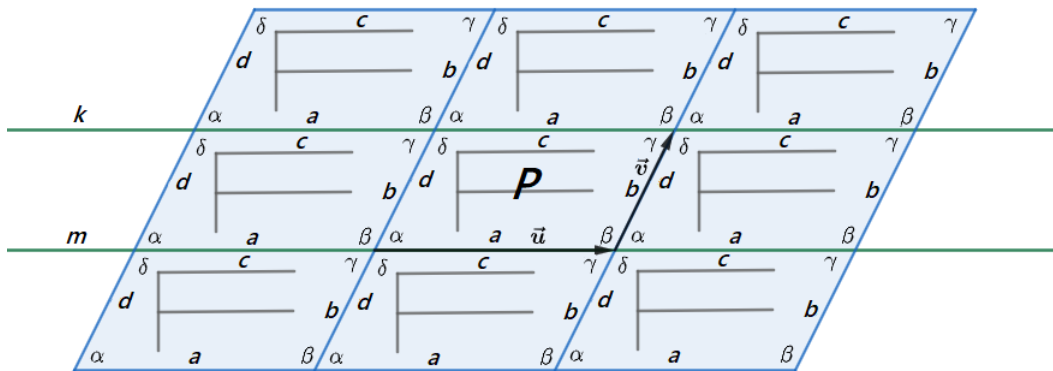


Rysunek 9: Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH41

Zgodnie z Twierdzeniem 16, izometrią przekształcającą płytkę na sąsiednie jest translacja. Przeciwległe boki czworokątnej płytki są równe i równoległe, więc płytka ma kształt równoległoboku.

Fakt 20. *Dla płytki o kształcie dowolnego równoległoboku istnieje parkiet izohedralny typu IH41.*

Zacznijmy wypełniać płaszczyznę równoległobokami zgodnie z diagramem sąsiadowania dla płytki typu IH41. Po pewnym czasie otrzymamy sytuację, jak na Rysunku 10.



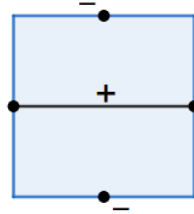
Rysunek 10: Fragment parkietu typu IH41

Rozważmy równoległobok P odpowiadający wyjściowej płytce. Zauważmy, że pas równoległoboków między prostymi k i m możemy w nieskończoność kontynuować w lewo i w prawo przesuwając równoległobok P o całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$. Pas równoległoboków powyżej prostej k powstaje poprzez przesunięcie pasa pomiędzy prostymi k i m o wektor $\vec{v}$, natomiast pas równoległoboków poniżej prostej m powstaje poprzez przesunięcie pasa między prostymi k i m o wektor $-\vec{v}$. Zatem parkietowanie płaszczyzny równoległobokami możemy kontynuować w nieskończoność w górę i w dół stosując odpowiednie przesunięcia pasa równoległoboków między prostymi k i m .

Udowodniliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkiecie izohedralnym typu IH41 to wszystkie możliwe równoległoboki (w szczególności nic więcej już nie pasuje) oraz dla płytki o kształcie dowolnego równoległoboku istnieje parkiet izohedralny typu IH41.

3.2 Typ IH42

Parkiet izohedralny typu IH42 tworzą płytki z diagramem sąsiadowania jak na Rysunku 11.



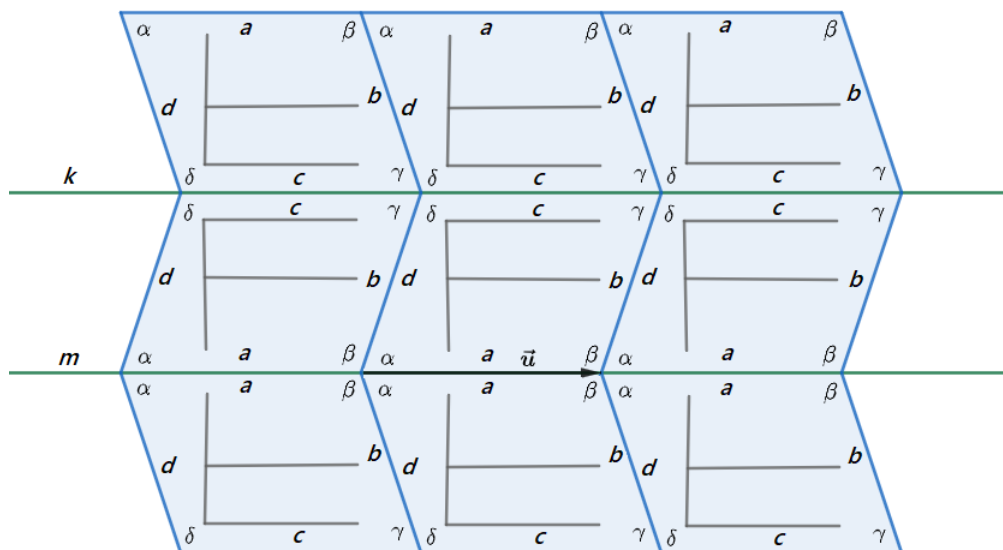
Rysunek 11: Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH42

Przypomnijmy, że zgodnie z Twierdzeniem 16 połączenie niesąsiadujących ze sobą boków odcinkiem (łukiem) ze znakiem $+$ oznacza, że te odcinki są równe i równoległe. Zatem płytka parkietu typu IH42 ma kształt równoległoboku.

Fakt 21. *Dla płytki o kształcie dowolnego równoległoboku istnieje parkiet izohedralny typu IH42.*

Wypełniamy płaszczyznę równoległobokami zgodnie z diagramem sąsiadowania typu IH42. Po pewnym czasie otrzymamy sytuację, jak na Rysunku 12.

Zauważmy, że pas równoległoboków między prostymi m i k możemy kontynuować w nieskończoność w prawo i w lewo przesuwając odpowiednie równoległoboki odpowiednio o wektor $\vec{u}$ i $-\vec{u}$. Pas równoległoboków powyżej prostej k powstaje w wyniku odbicia pasa równoległoboków między prostymi k i m względem prostej k . Pas poniżej prostej m powstaje poprzez odbicie pasa między prostymi k i m względem prostej m . Stosując symetrie względem odpowiednich prostych możemy kontynuować zapewnianie płaszczyzny równoległobokami w nieskończoność w górę i dół.

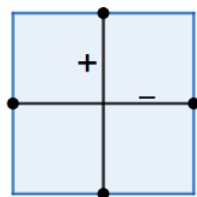


Rysunek 12: Fragment parkietażu typu IH42

Udowodniliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkietażu izohedralnym typu IH42 to wszystkie możliwe równoległoboki oraz dla płytki o kształcie równoległoboku istnieje parkietaż izohedralny typu IH42.

3.3 Typ IH43

Parkietaż izohedralny typu IH43 tworzą płytki z diagramem sąsiadowania jak na Rysunku 13.



Rysunek 13: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH43

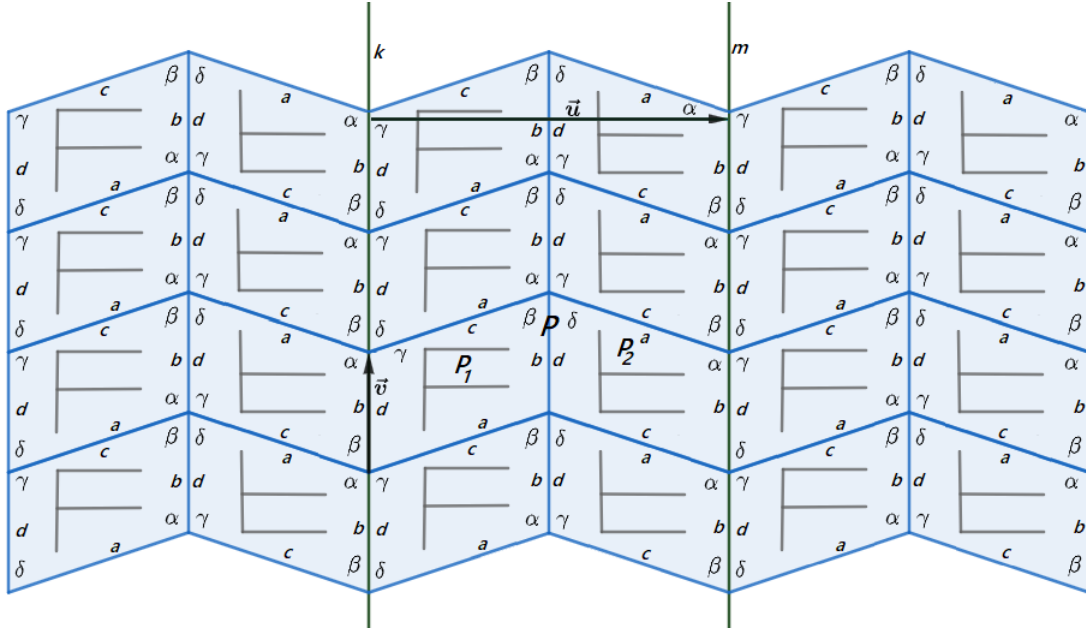
Łatwo zauważyć, że znów potencjalna płytka ma kształt równoległoboku, bo z Twierdzenia 16 jej dwa przeciwległe boki są równe i równoległe. Odnotujmy zatem poniższy fakt.

Fakt 22. *Dla płytki o kształcie dowolnego równoległoboku istnieje parkietaż izohedralny*

typu IH43.

Niech P_1 będzie wyjściowym równoległobokiem, zaś P_2 płytką parkietazu sąsiadującą przez bok o etykiecie b w płytce P_1 . Niech P oznacza sześciokąt będący sumą równoległoboków P_1 i P_2 .

Zauważmy, że możemy stworzyć fragment parkietazu, jak na Rysunku 14.



Rysunek 14: Fragment parkietazu typu IH43

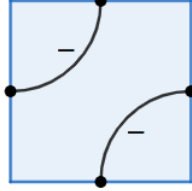
Pas między prostymi k i m możemy kontynuować w nieskończoność przesuając sześciokąt P w górę i w dół o całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$, bo boki o etykietach a i c zarówno w płytce P_1 jak i w płytce P_2 są równe i równoległe.

Pas złożony z figur przystających do sześciokąta P po prawej stronie prostej m powstaje poprzez przesunięcie pasa między prostymi k i m o wektor $\vec{u}$. Podobnie pas na lewo od prostej k jest przesunięciem pasa figur między prostymi k i m o wektor $-\vec{u}$. Przesuwając dalej pas sześciokątów między prostymi k i m o całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$ wraz z podziałem każdego sześciokąta na dwa równoległoboki, uzyskujemy parkietaz izohedralny typu IH43.

Pokazaliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkietazu izohedralnym typu IH43 to wszystkie możliwe równoległoboki oraz dla płytki o kształcie dowolnego równoległoboku istnieje parkietaz izohedralny typu IH43.

3.4 Typ IH44

Płytke parkietu typu IH44 przedstawia Rysunek 15.

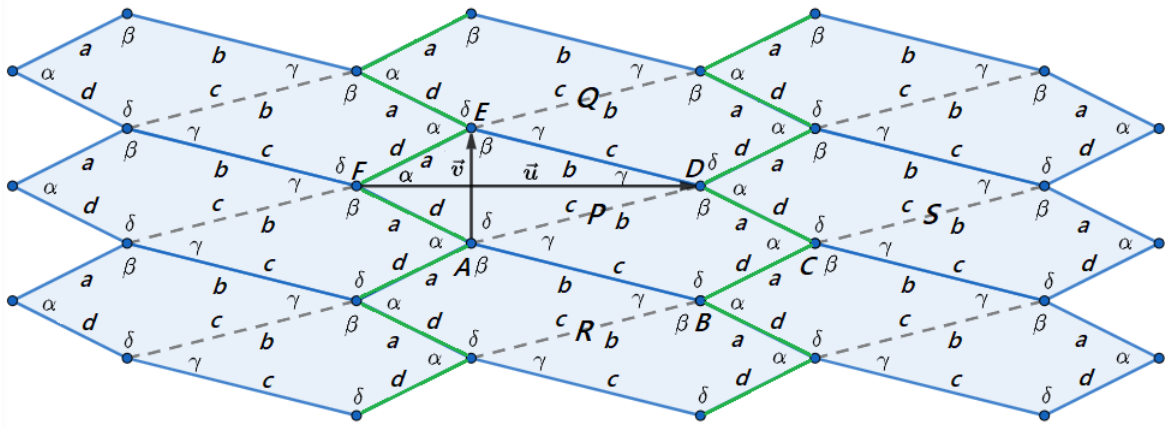


Rysunek 15: Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH44

Na mocy Faktu 19 boki połączone łukiem są tej samej długości, zatem potencjalna płytka parkietu typu IH44 ma kształt deltoidu.

Fakt 23. *Dla płytki o kształcie dowolnego deltoidu istnieje parkiet izohedralny typu IH44.*

Wypełniamy płaszczyznę deltoidami zgodnie z diagramem sąsiadowania zaprezentowanym na Rysunku 15. W wyniku tego dostajemy fragment parkietu zaprezentowany na Rysunku 16.



Rysunek 16: Fragment parkietu typu IH44

Rozważmy sześciokąt¹ $ABCDEF$ oznaczony literą P . Jest on sklejeniem dwóch deltoidów, których wspólny bok w jednym z nich ma etykietę b , w drugim zaś etykietę c . Niech sześciokąt Q będzie sklejeniem odpowiednich deltoidów powyżej płytki P połączonych bokiem o etykiecie b w jednym z nich oraz etykiecie c w drugim z deltoidów.

¹w skrajnym przypadku sześciokąt może stać się równoległobokiem, ale rozumowanie jest dalej poprawne

Zauważmy, że bok AB jest równoległy do boku DE , gdyż kąty odpowiadające BAD i ADE są tej samej miary γ . Ponadto boki o etykietach b i c są tej samej długości. Wobec tego sześciokąt Q jest obrazem sześciokąta P w wyniku przesunięcia o wektor $\vec{v}$. Etykiety boków i podział sześciokąta na dwa deltoidy przenoszą się odpowiednio. Podobnie sześciokąt R poniżej figury P wraz z jej podziałem jest obrazem sześciokąta P w wyniku przesunięcia o wektor $-\vec{v}$. Zatem pionowy pas utworzony z sześciokątów będących sklejeniem dwóch deltoidów możemy kontynuować w górę i w dół w nieskończoność przesuwając płytkę P wraz z jej podziałem o całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$.

Zwróćmy uwagę na to, że sześciokąt S idealnie pasuje do płytek P i Q , bo boki o etykietach a i d są tej samej długości oraz $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$, co wynika z sumy miar kątów pojedynczego deltoidu. Dalej zauważmy, że odcinek CD jest równoległy do odcinka AF , bo kąty odpowiadające CDA i DAF są tej samej miary, gdyż w deltoidzie $\beta = \delta$. Ponadto wspólny bok sześciokątów Q i S jest równoległy do odcinka EF , bo kąty odpowiadające są równe: $\delta = \beta$. Stąd sześciokąt S wraz z jego podziałem jest obrazem sześciokąta P wraz z jego podziałem przez przesunięcie o wektor $\vec{u}$. Zatem pas sześciokątów po prawej stronie powstaje poprzez przesunięcie środkowego pasa o wektor $\vec{u}$, a pas sześciokątów po lewej stronie powstaje w wyniku przesunięcia środkowego pasa o wektor $-\vec{u}$. Wypełnianie płaszczyzny pionowymi pasami sześciokątów możemy zatem kontynuować w nieskończoność w lewo i w prawo przesuwając środkowy pionowy pas sześciokątów o całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$.

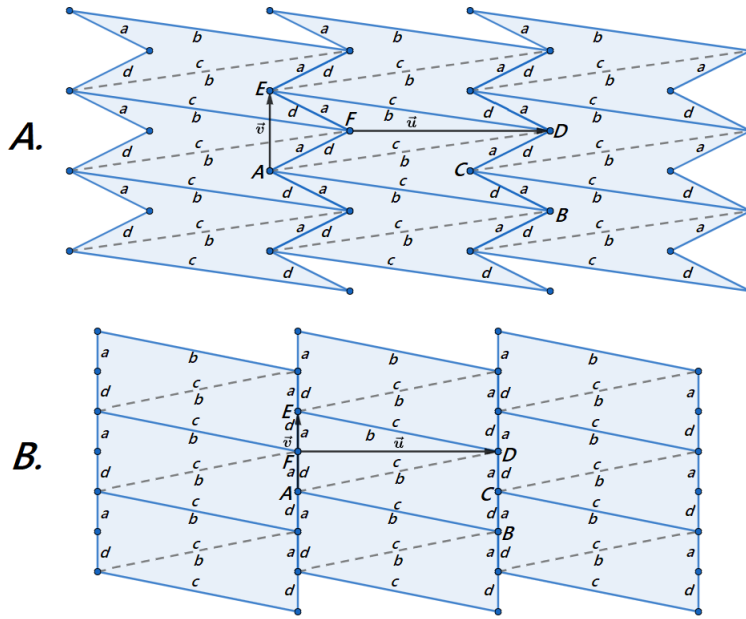
Zwróćmy uwagę jeszcze na to, że deltoid może być również wklęsły. Wtedy rozumowanie jest identyczne, a parkietaż wygląda tak, jak pokazano na Rysunku 17A. W szczególności możliwa jest też sytuacja, gdy deltoid degeneruje się do trójkąta równoramiennego. Wtedy jeden wierzchołek tego „deltoidu” wypada w spodku wysokości. Ten przypadek wraz z rozumowaniem zaprezentowanym powyżej jest również poprawny. Mamy to zobrazowane na Rysunku 17B.

Udowodniliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkietażu izohedralnym typu IH44 to wszystkie możliwe deltoidy (również wklęsłe). Pokazaliśmy również, że dla płytki o kształcie dowolnego deltoidu istnieje parkietaż izohedralny typu IH44.

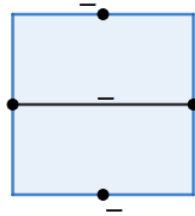
3.5 Typ IH45

Diagram sąsiedowności dla płytki parkietażu typu IH45 przedstawia Rysunek 18

Wykonajmy schematyczny rysunek czworokątnej płytki $ABCD$ oraz płytek mających z nią wspólny bok lub wierzchołek z odpowiednio poetykietowanymi bokami. Uwzględniamy przy tym, że typ walencyjny to $[4,4,4,4]$, czyli w każdym wierzchołku spotykają się cztery płytki. Pomoże nam to odkryć dopuszczalne kształty płytki w analizowanym parkietażu.



Rysunek 17: Fragment parkietażu typu IH44 dla płytki w kształcie deltoidu (A) wklęsłego oraz (B) zdegenerowanego do trójkąta równoramiennego



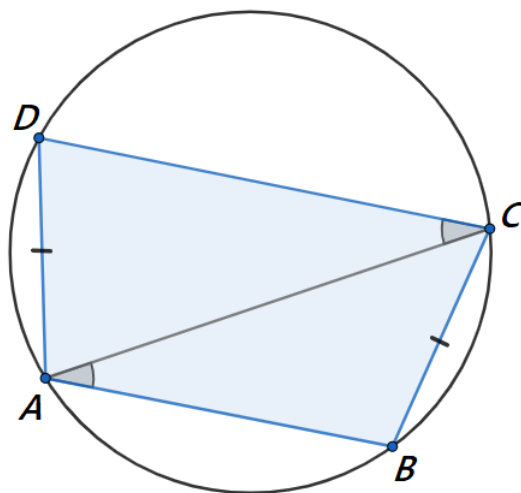
Rysunek 18: Diagram sąsiedownia dla parkietażu typu IH45

Zauważmy, że boki o etykietach b i d muszą mieć tę samą długość, bo są etykietami tych samych boków.

Zauważmy, że w wierzchołkach A i C spotykają się dwa kąty miary α i dwa kąty miary γ , zatem $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, czyli α i γ sumują się do 180° . Podobnie w wierzchołkach B i D spotykają się dwa kąty miary β i dwa kąty miary δ , więc $2\beta + 2\delta = 360^\circ$, zatem β i δ sumują się do 180° . Podsumowując, czworokąt $ABCD$ jest czworokątem, w którym przeciwległe kąty sumują się do 180° oraz boki BC i AD są równe. Gdy miary przeciwległych kątów czworokąta sumują się do 180° , to taki czworokąt można wpisać w okrąg. Zostało to pokazane na Rysunku 20.



Rysunek 19: Analiza kształtu płytki w parkiecie IH45

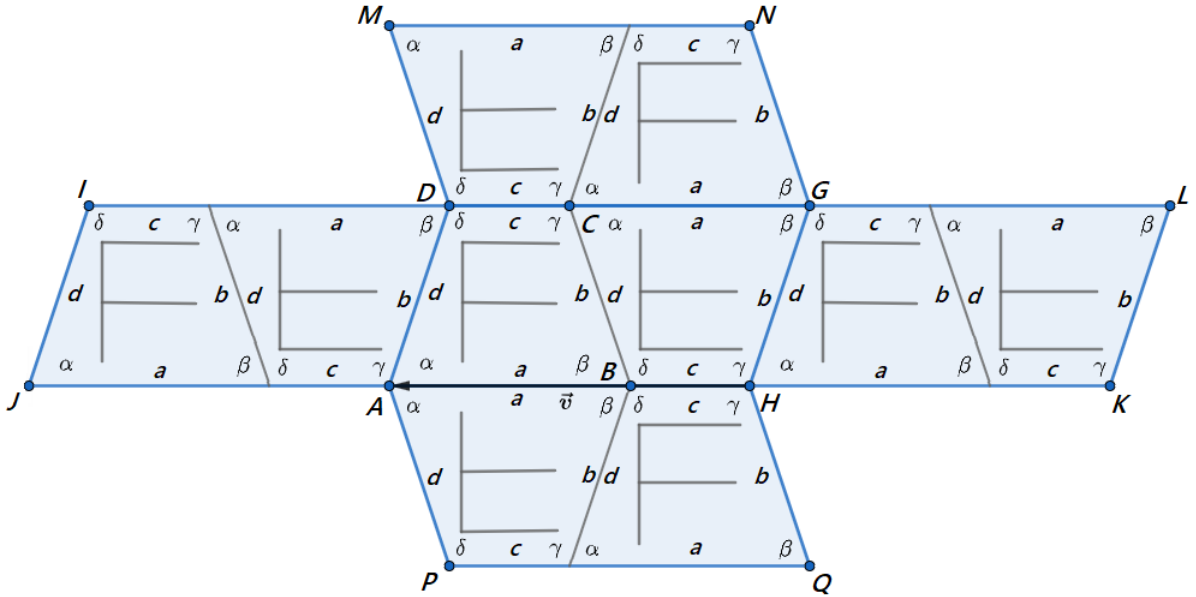


Rysunek 20: Płytki w parkiecie IH45

Zwróćmy uwagę na to, że $|\angle ACD| = |\angle BAC|$, ponieważ są to kąty wpisane oparte na cięciwach tej samej długości. Skoro kąty naprzemianległe ACD oraz BAC są równe, to odcinki AB i CD są równoległe. Wnioskujemy stąd, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem

równoramiennym, który można wpisać w okrąg, czyli posiadającym oś symetrii².

Fakt 24. Dla płytki o kształcie dowolnego trapezu równoramiennego posiadającego oś symetrii istnieje parkietaż izohedralny typu IH45.



Rysunek 21: Fragment parkietażu typu IH45

Niech trapezy równoramienne $ABCD$ i $BCGH$ będą płytkami w parkietażu typu IH45, jak pokazano na Rysunku 21. Zauważmy, że miara kąta ABH to $\beta + \delta$. Ponieważ trapez $ABCD$ jest równoramienny, to $\beta = \alpha$. Możemy zatem zapisać $|\angle ABH| = \beta + \delta = \alpha + \delta = 180^\circ$, bo kąty o miarach α i δ to kąty przy jednym ramieniu trapezu. Analogicznie możemy zapisać równości $|\angle DCG| = \alpha + \gamma = \alpha + \delta = 180^\circ$. Wobec tego wielokąt $ABHGC D$ to tak naprawdę czworokąt $AHGD$. Zauważmy dalej, że czworokąt $AHGD$ jest równoległobokiem, bo jego przeciwległe kąty są równe ($\alpha = \beta$ oraz $\gamma = \delta$).

Dalej zauważmy, że równoległobok $JADI$ to obraz równoległoboku $AHGD$ przez translację o wektor $\vec{v}$, zaś równoległobok $HKLG$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległoboku $AHGD$ o wektor $-\vec{v}$.

Z Lematu 13 wynika, że równoległobok $DGNM$ powstaje poprzez odbicie równoległoboku $AHGD$ względem prostej DG , zaś równoległobok $PQHA$ powstaje w wyniku odbicia

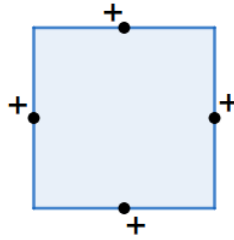
²Zgodnie z definicją trapezu równoramiennego jako czworokąta, w którym dwa boki są równoległe a pozostałe dwa są równej długości, równoległobok też jest trapezem równoramiennym. Z rozumowania wynika jednak, że interesujący nas czworokąt można wpisać w okrąg, co wyklucza równoległoboki niebędące prostokątami.

równoległoboku $AHGD$ względem prostej AH . Wynika stąd, że równoległobok $AHGD$ to płytki parkietażu typu IH42. W Rozdziale 3.2 udowodniliśmy istnienie parkietażu typu IH42, a odpowiedni podział każdej płytki tego parkietażu na dwa trapezy równoramienne dowodzi istnienia parkietażu typu IH45.

Udowodniliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkietażu izohedralnym typu IH45 to wszystkie możliwe trapezy równoramienne mające oś symetrii oraz dla płytki o kształcie dowolnego trapezu równoramiennego z osią symetrii istnieje parkietaż izohedralny typu IH45.

3.6 Typ IH46

Rozważmy płytkę parkietażu typu IH46. Jest ona zilustrowana na Rysunku 22.



Rysunek 22: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH46

W tym przypadku czworokąt nie musi spełniać żadnych specjalnych warunków. Chcemy jedynie, aby nie występowały samoprzecięcia. Innymi słowy, nie chcemy, aby czworokąt był zdegenerowany. Udowodnimy następujący fakt.

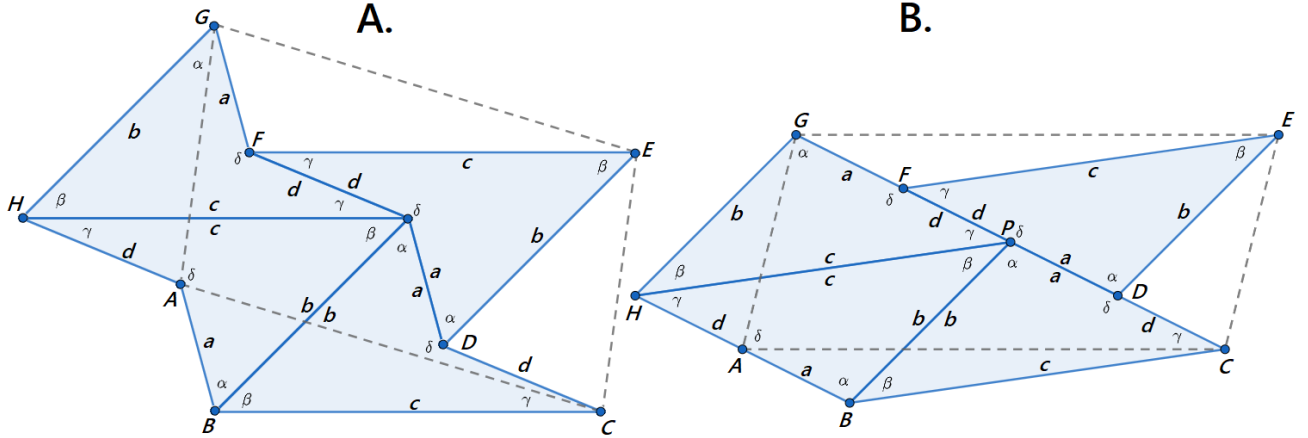
Fakt 25. *Dla płytki o kształcie dowolnego czworokąta istnieje parkietaż izohedralny typu IH46.*

Rozważmy ośmiokątny fragment parkietażu będący sklejeniem czterech płytek typu IH46, jak na Rysunku 23.

Przypomnijmy, że zgodnie z Twierdzeniem 12 izometrią przekształcającą płytkę na sąsiednią jest półobrot wokół środka wspólnego boku. Półobrot względem pewnego punktu jest tym samym, co symetria względem tego punktu. Prostym i znanym z geometrii faktem jest to, że odcinek powstały w wyniku odbicia względem punktu jest równoległy do wyjściowego. Możemy stąd dokonać serii prostych spostrzeżeń.

- Boki AB i GF są równoległe, bo bok GF jest obrazem boku AB przez półobrot względem środka odcinka PH .
- Boki BC i FE są równoległe, bo bok FE jest obrazem boku BC przez półobrot względem środka odcinka PD .

przedstawiono rysunek ośmiokątnego fragmentu parkietazu dla płytki będącej czworokątem wklęsłym (patrz Rysunek 24 A). Rozumowanie przedstawione powyżej jest w pełni poprawne również w tym przypadku. Podobnie też czworokąt zdegenerowany do trójkąta również będzie pasował (patrz Rysunek 24 B).



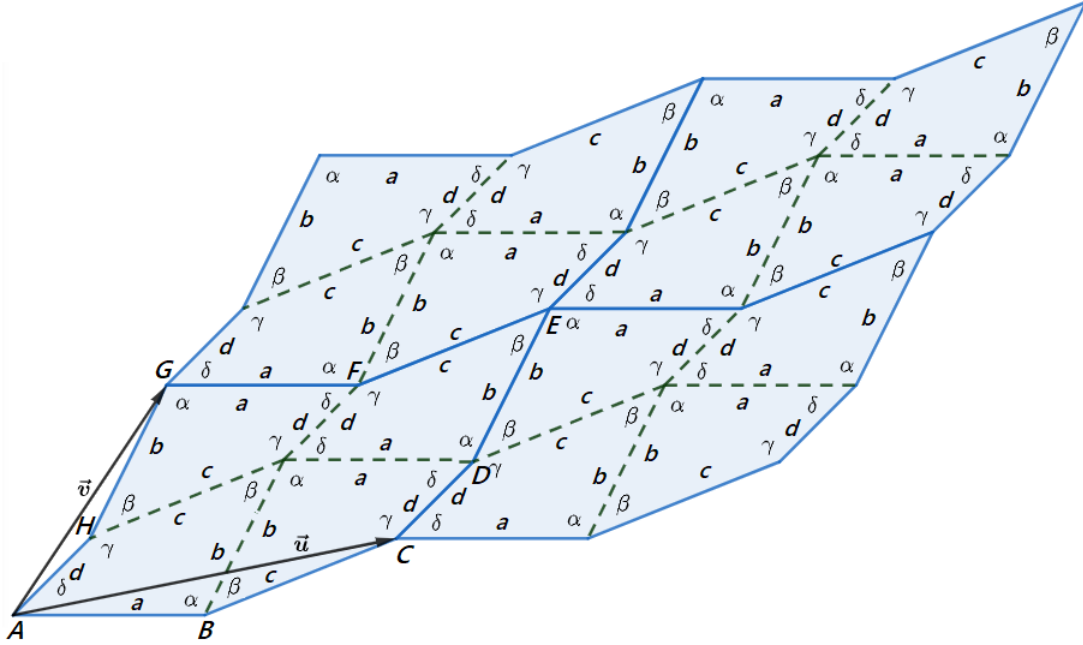
Rysunek 24: Fragment parkietazu typu IH46 dla płytki o kształcie czworokąta (A) wklęsłego oraz (B) zdegenerowanego

Rozważmy nieco większy fragment parkietazu typu IH46, jak na Rysunku 25.

Zauważmy, że ośmiokąt przylegający do ośmiokąta $ABCDEFGH$ przez boki GF i FE powstaje w wyniku przesunięcia ośmiokąta $ABCDEFGH$ o wektor $\vec{v}$. Wynika to z faktu, że boki AB i GF są równe i równoległe oraz boki BC i FE również są równe i równoległe, co w naszej nomenklaturze oznacza równoległość łamanych ABC i GFE . Podobnie ośmiokąt przylegający do ośmiokąta $ABCDEFGH$ przez boki CD i DE powstaje w wyniku przesunięcia ośmiokąta $ABCDEFGH$ o wektor $\vec{u}$. Jest to spowodowane tym, że boki AH i CD oraz HG i DE są parami równe i równoległe, innymi słowy, łamane AHG oraz CDE są równoległe.

Parkietowanie płaszczyzny ośmiokątami wraz z ich podziałem na cztery czworokąty możemy kontynuować w lewo i w prawo przesuwając ośmiokąt $ABCDEFGH$ o kolejne całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$. Podobnie możemy poziomy pas ośmiokątów przesuwając w górę i w dół o całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$, uzyskując tym samym izohedralny parkietaz płaszczyzny typu IH46.

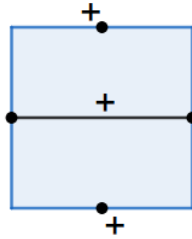
Udowodniliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkietazu izohedralnym typu IH46 to wszystkie możliwe czworokąty oraz dla płytki o kształcie dowolnego czworokąta istnieje parkietaz izohedralny typu IH46.



Rysunek 25: Fragment parkietażu typu IH46

3.7 Typ IH47

Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH47 przedstawia Rysunek 26.

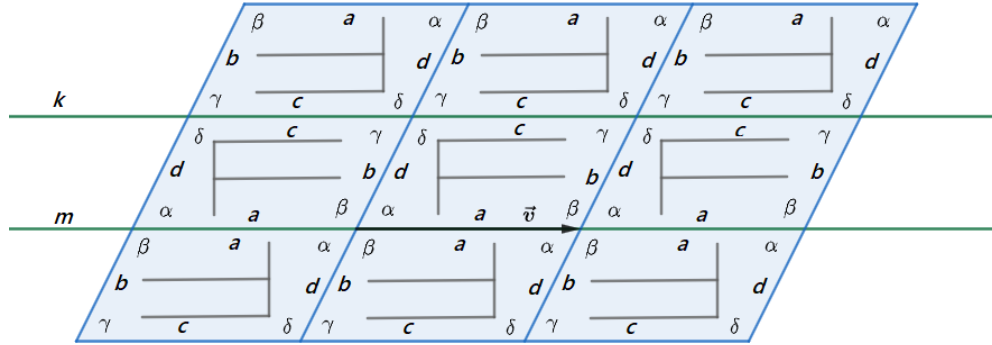


Rysunek 26: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH47

Przypomnijmy, że zgodnie z Twierdzeniem 16 połączenie niesąsiadujących ze sobą boków łukiem ze znakiem plus oznacza, że symetrią parkietażu przekształcającą płytkę na sąsiednią jest translacja. Z tego twierdzenia wiemy również, że dwa przeciwległe boki czworokąta są równe i równoległe, więc ten czworokąt jest równoległobokiem. Udowodnimy prawdziwość poniższego faktu.

Fakt 28. *Dla płytki o kształcie dowolnego równoległoboku istnieje parkietaż izohedralny typu IH47.*

Wypełniamy płaszczyznę równoległobokami stosując odpowiednie izometrie. W wyniku tego otrzymujemy sytuację, jak na Rysunku 27.

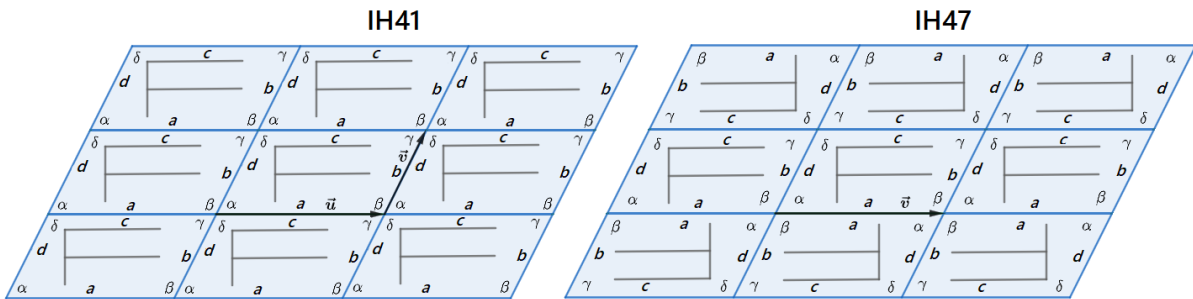


Rysunek 27: Fragment parkietażu typu IH47

Zauważmy, że pas płytek między prostymi k i m możemy kontynuować w nieskończoność w prawo i w lewo przesuując płytkę parkietażu o całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$. Ponadto pas równoległoboków powyżej prostej k powstaje poprzez półobrót pasa między prostymi k i m wokół środka dowolnej krawędzi zawartej w prostej k . Podobnie pas równoległoboków poniżej prostej m powstaje w wyniku obrotu pasa między prostymi k i m wokół środka dowolnej krawędzi zawartej w prostej m . Zatem pasy równoległoboków możemy kontynuować w nieskończoność w górę i w dół stosując odpowiednie półobroty kolejnych poziomych pasów.

Udowodniliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkietażu izohedralnym typu IH47 to wszystkie możliwe równoległoboki oraz dla płytki o kształcie dowolnego równoległoboku istnieje parkietaż izohedralny typu IH47.

Porównajmy parkietaże typów IH41 oraz IH47 (patrz Rysunek 28).

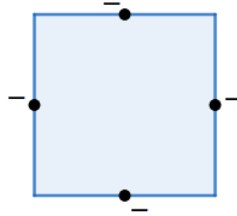


Rysunek 28: Parkietaże typu izohedralnego IH41 oraz IH47

Zwróćmy uwagę, że gdybyśmy pominęli etykietowanie (wzór), to te parkietaże byłyby identyczne. Nałożenie wzoru (etykietowania) sprawia, że istotne staje się, czy w kierunku pionowym wykonujemy translację (IH41) czy półobrót (IH47). W tym tkwi sens rozróżnienia tych dwóch typów, mimo że w obu przypadkach kształt geometryczny parkietażu jest taki sam.

3.8 Typ IH48

Przypomnijmy diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH48.



Rysunek 29: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH48

Wykonamy schematyczny rysunek fragmentu parkietażu w celu wyznaczenia zakresu kształtów płytki w parkietażu typu IH48, pamiętając, że typ walencyjny to $(4,4,4,4)$ (patrz Rysunek 30).

Niech czworokąt $ABCD$ będzie płytką w parkietażu IH48. Zgodnie z diagramem sąsiadowania dorysujmy płytki mające wspólny bok lub wierzchołek z czworokątem $ABCD$.



Rysunek 30: Analiza kształtu płytki w parkiecie IH48

Zauważmy, że w wierzchołku A spotykają się cztery kąty miary α i tworzą kąt pełny, czyli zachodzi równość $4\alpha = 360^\circ$, stąd $\alpha = 90^\circ$. Podobnie w wierzchołku B spotykają się cztery kąty miary β , w wierzchołku C cztery kąty miary γ oraz w wierzchołku D cztery kąty miary δ . Wobec tego $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$. Wobec tego płytka w parkiecie typu IH48 ma kształt prostokąta.

Fakt 29. *Dla płytki o kształcie dowolnego prostokąta istnieje parkiet izohedralny typu IH48.*

Niech P będzie prostokątną płytką w parkiecie typu IH48. Płytkę sąsiadującą z nią przez bok o etykiecie d otrzymujemy poprzez odbicie prostokąta P względem boku o etykiecie d . Płytkę na prawo od płytki P otrzymamy natomiast poprzez odbicie prostokąta P względem boku o etykiecie b . Kolejne płytki między prostymi k i m otrzymamy poprzez odbicia kolejnych płytek względem boków o etykietach b i d , zatem poziomy pas prostokątów między prostymi k i m możemy kontynuować w nieskończoność w lewo i prawo.

	β	a	α	α	a	β	β	a	α
	b		d	d		b	b		d
k	γ	c	δ	δ	c	γ	γ	c	δ
	γ	c	δ	δ	c	γ	γ	c	δ
	b		d	d	P	b	b		d
m	β	a	α	α	a	β	β	a	α
	β	a	α	α	a	β	β	a	α
	b		d	d		b	b		d
	γ	c	δ	δ	c	γ	γ	c	δ

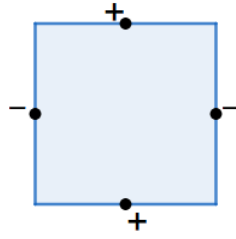
Rysunek 31: Fragment parkietu typu IH48

Zauważmy, że poziomy pas prostokątów powyżej prostej k powstaje poprzez odbicie pasa między prostymi k i m względem prostej k . Pas prostokątów poniżej prostej m otrzymamy odbijając pas między prostymi k i m względem prostej m . Etykiety boków i kąty odpowiednio się przenoszą. Zatem możemy kontynuować wypełnianie płaszczyzny poziomymi pasami w nieskończoność w górę i w dół odbijając poziome pasy względem odpowiednich prostych.

Udowodniliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkiecie izohedralnym typu IH48 to wszystkie możliwe prostokąty oraz dla płytki o kształcie dowolnego prostokąta istnieje parkiet izohedralny typu IH48.

3.9 Typ IH49

Diagram sąsiedownia dla parkietu typu IH49 wygląda następująco.



Rysunek 32: Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH49

Niech czworokąt $ABCD$ będzie płytką w parkiecie typu IH49. Przeanalizujemy płytki mające z czworokątem $ABCD$ wspólny bok lub wierzchołek, pamiętając, że typ walencyjny to $(4,4,4,4)$. Zostało to schematycznie pokazane na Rysunku 33.



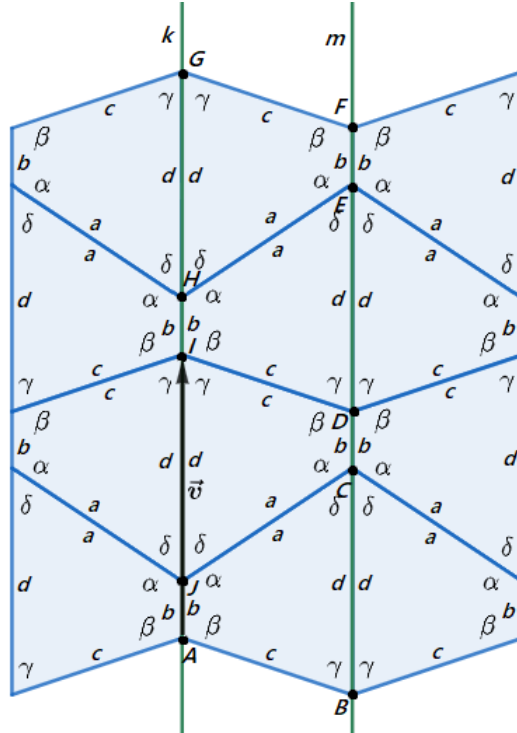
Rysunek 33: Analiza kształtu płytki w parkiecie IH49

Zauważymy, że każde dwie płytki przylegają do siebie przez bok o tej samej etykiecie, więc nie musi zachodzić żaden szczególny warunek opisujący długości boków. Możemy spostrzec, że w wierzchołkach A i D spotykają się dwa kąty miary α i dwa kąty miary δ . Zachodzi zatem zależność $2\alpha + 2\delta = 360^\circ$, czyli $\alpha + \delta = 180^\circ$. Podobnie w wierzchołkach B i C spotykają się dwa kąty miary β i γ . Wobec tego zachodzi równość $2\beta + 2\gamma = 360^\circ$, stąd $\beta + \gamma = 180^\circ$.

Skoro suma kątów przyległych do boku AD wynosi 180° oraz suma kątów przyległych do boku BC również wynosi 180° , to czworokąt $ABCD$ jest trapezem, którego podstawy to boki o etykietach b i d .

Fakt 30. *Dla płytki o kształcie dowolnego trapezu istnieje parkietaż izohedralny typu IH49.*

Rozważmy fragment parkietażu typu IH49, który został zaprezentowany na Rysunku 34.



Rysunek 34: Fragment parkietażu typu IH49

Zwróćmy uwagę na to, że figura będąca sumą trapezów $ABCJ$ oraz $JCDI$ jest czworokątem, bo $\alpha + \delta = 180^\circ$. Ponadto, łatwo spostrzec, że czworokąt $ABDI$ jest równoległobokiem, bo jego przeciwległe boki są równe. Zauważmy również, że równoległobok $IDFG$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległoboku $ABDI$ o wektor $\vec{v} = \overrightarrow{AI}$, gdyż odpowiednie etykiety boków oraz miary kątów się przenoszą.

Zatem pionowy pas równoległoboków między prostymi k i m możemy kontynuować w nieskończoność w górę i w dół przesuwając równoległobok $ABDI$ wraz z jego podziałem na dwa trapezy o odpowiednie całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$.

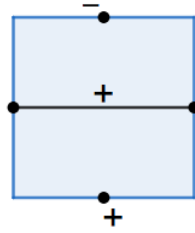
Zauważmy, że pionowy pas trapezów na lewo od prostej k powstaje w wyniku odbicia pasa trapezów między prostymi k i m względem prostej k . Podobnie pas trapezów na prawo od prostej m powstaje poprzez odbicie pasa trapezów między prostymi k i m względem

prostej m . Parkietowanie płaszczyzny trapezami możemy zatem kontynuować w nieskończoność w lewo i w prawo odbijając nowo powstałe pionowe pasy trapezów względem kolejnych prostych zawierających boki o etykietach b i d .

Udowodniliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkietażu izohedralnym typu IH46 to wszystkie możliwe trapezy oraz dla płytki o kształcie dowolnego trapezu istnieje parkietaż izohedralny typu IH46.

3.10 Typ IH50

Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH50 przedstawia Rysunek 35



Rysunek 35: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH50

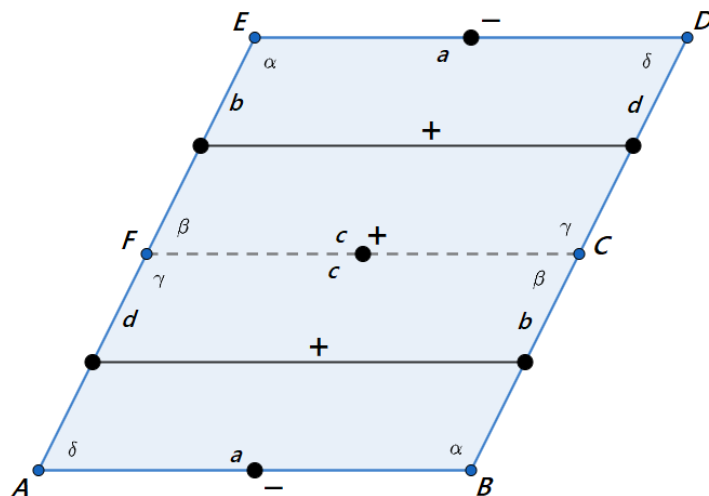
Przypomnijmy, że zgodnie z Twierdzeniem 16 połączenie niesąsiadujących boków łukiem z plusem oznacza translację. Dwa przeciwległe boki czworokąta są równe i równoległe, więc potencjalna płytka w parkietażu typu IH50 ma kształt równoległoboku.

Fakt 31. *Dla płytki o kształcie dowolnego równoległoboku istnieje parkietaż izohedralny typu IH50.*

Niech równoległobok $FCDE$ będzie płytką w parkietażu typu IH50 zaopatrzoną w diagram sąsiadowania zaprezentowany na Rysunku 35. Zgodnie z Twierdzeniem 12 kropka $\bullet$ ze znakiem $+$ oznacza półobrót względem środka boku. Niech zatem równoległobok $ABCF$ będzie obrazem równoległoboku $FCDE$ przez półobrót względem środka boku FC . Zostało to pokazane na Rysunku 36.

Zauważmy, że $|\sphericalangle AFE| = \beta + \gamma$ oraz $|\sphericalangle BCD| = \beta + \gamma$. Ponieważ β i γ to sąsiednie kąty w równoległoboku $FCDE$, więc sumują się do 180° . Stąd wynika, że wielokąt $ABCDEF$ jest równoległobokiem.

Zwróćmy uwagę na to, że odcinek BC powstaje w wyniku translacji odcinka AF o wektor $\overrightarrow{AB}$. Podobnie odcinek CD powstaje w wyniku translacji odcinka FE o ten sam wektor. Zatem bok BD powstaje w wyniku translacji boku AE o wektor $\overrightarrow{AB}$. Otrzymujemy zatem, że równoległobok $ABDE$ jest płytką parkietażu typu IH42. W Podrozdziale 3.2



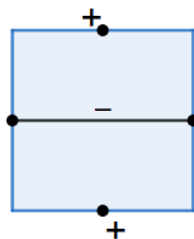
Rysunek 36: Dwie płytki w parkiecie typu IH50

udowodniliśmy, że z płytek tego typu da się utworzyć parkietaż. Wobec tego z równoległoboków $ABDE$ wraz z ich podziałem na dwa równoległoboki da się utworzyć parkietaż. Podział równoległoboku $ABDE$ na dwa równoległoboki $ABCF$ oraz $FCDE$ przenosi się przez odpowiednie izometrie (translacje i odbicia).

Udowodniliśmy, że pełny zakres kształtów płytek w parkiecie izohedralnym typu IH50 to wszystkie możliwe równoległoboki oraz dla płytki o kształcie dowolnego równoległoboku istnieje parkietaż izohedralny typu IH50.

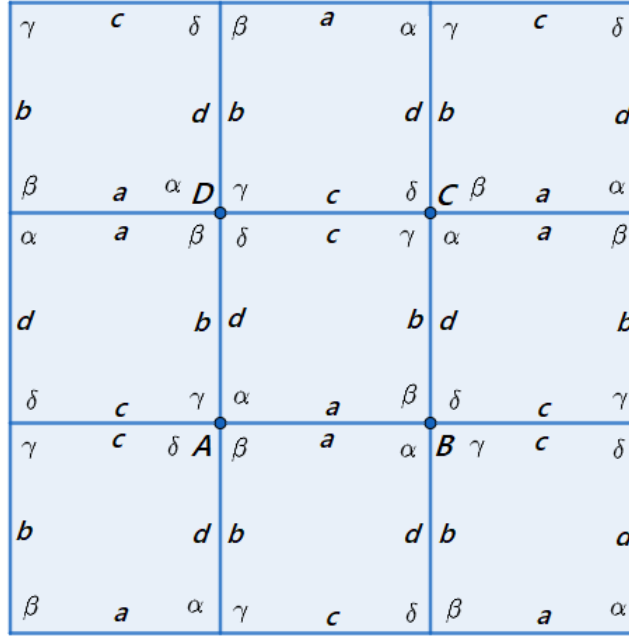
3.11 Typ IH51

Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH51 przedstawia Rysunek 37.



Rysunek 37: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH51

Wykonajmy schematyczny rysunek fragmentu parkietażu typu IH51, uwzględniając typ walencyjny (w każdym wierzchołku spotykają się cztery płytki) w celu ustalenia dopuszczalnego kształtu płytki w analizowanym parkiecie (patrz Rysunek 38).



Rysunek 38: Analiza kształtu płytki w parkiecie IH51

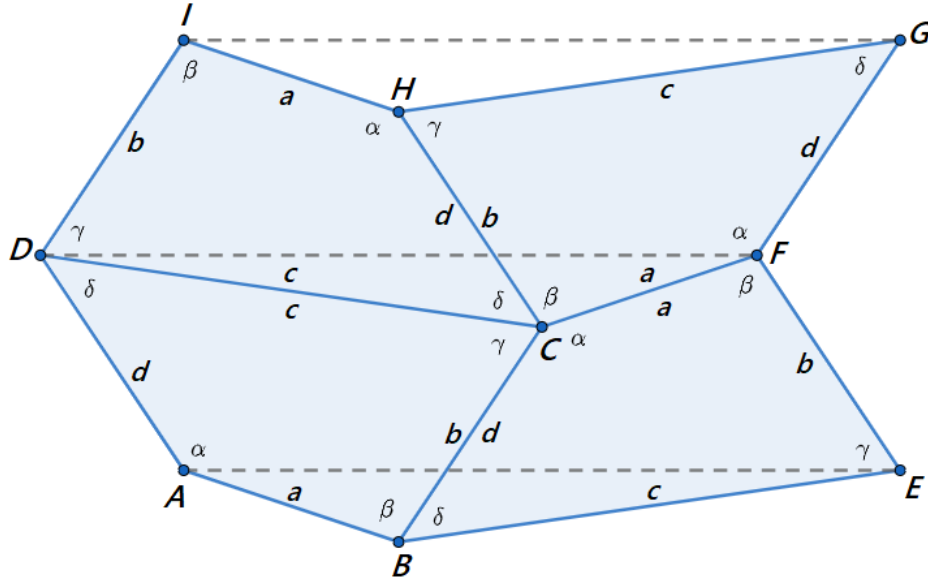
Z rysunku widzimy, że etykiety b i d nazywają te same boki, więc boki o etykietach b i d są równe. Ponadto, w każdym wierzchołku czworokąta $ABCD$ spotykają się kąty o miarach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, co możemy wyrazić równością $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$. Jest ona oczywista, bowiem wynika z sumy miar kątów czworokąta $ABCD$. Wobec tego jedyny konieczny warunek jest taki, żeby jedna para przeciwległych boków była równa.

Fakt 32. *Dla płytki o kształcie dowolnego czworokąta, który ma przynajmniej jedną parę przeciwległych boków równych, istnieje parkiet izohedralny typu IH51.*

Rozważmy ośmiokątny fragment parkietu typu IH51 złożony z czterech płytek opisanych w fakcie powyżej, jak na Rysunku 39.

Zgodnie z Lematem 12 symbol $\bullet$ ze znakiem $+$ oznacza, że izometrią przekształcającą płytkę na sąsiednią płytkę przylegającą przez ten bok, jest półobrot względem środka tego boku. Przypomnijmy ponadto, że odcinek powstały w wyniku półobrotu jest równoległy do wyjściowego. Możemy zatem dokonać następujących spostrzeżeń.

- Odcinek AB jest równoległy do odcinka IH , bo odcinek IH jest obrazem odcinka AB w wyniku półobrotu względem środka odcinka DC .
- Odcinek BE jest równoległy do odcinka HG , bo odcinek HG jest obrazem odcinka BE w wyniku półobrotu względem środka odcinka CF .



Rysunek 39: Fragment parkietu typu IH51

Dalej będziemy chcieli udowodnić, że odcinki AD i EF są równoległe oraz odcinki DI oraz FG również są równoległe. Zauważmy, że trójkąt ABE jest przystający do trójkąta DCF z cechy bok-kąt-bok, gdyż

- $|AB| = |CF|$, bo mają tę samą etykietę a ,
- $|BE| = |DC|$, bo mają tę samą etykietę c ,
- $|\angle ABE| = \beta + \delta = |\angle DCF|$.

Z przystawania trójkątów ABE oraz DCF wynika równość odcinków AE oraz DF . Odcinki o etykietach b i d są tej samej długości, więc $|AD| = |FE|$. Wobec tego czworokąt $AEFD$ jest równoległobokiem, czyli odcinki AD i EF są równoległe.

Podobnie zauważamy, że trójkąty DCF oraz IHG są przystające z cechy bok-kąt-bok, bo

- $|DC| = |HG|$, bo mają tę samą etykietę c ,
- $|CF| = |IH|$, bo mają tę samą etykietę a ,
- $|\angle DCF| = \beta + \delta = 360^\circ - (\alpha + \gamma) = |\angle IHG|$.

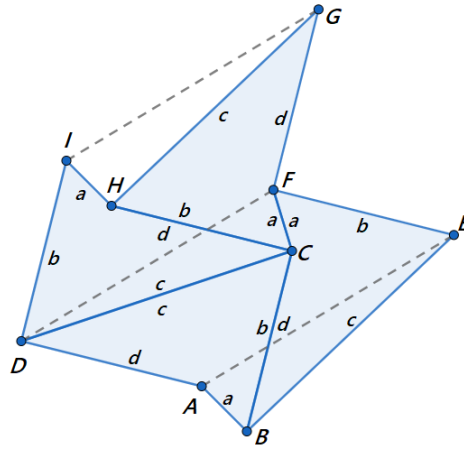
Skoro trójkąty DCF oraz IHG są przystające, to odcinki DF i IG są równe. Odcinki o etykietach b i d są tej samej długości z założenia, więc czworokąt $DFGI$ jest równoległobokiem, zatem odcinki DI oraz FG są równoległe.

Podsumowując, ośmiokąt $ABEFGHID$ jest ośmiokątem, w którym:

- odcinek AB jest równoległy do odcinka IH ,
- odcinek BE jest równoległy do odcinka HG ,
- odcinek AD jest równoległy do odcinka EF ,
- odcinek DI jest równoległy do odcinka FG .

Sytuacja jest zatem taka sama, jak w przypadku parkietażu typu IH46. Tam również w ośmiokątnym fragmencie parkietażu odpowiednie boki ośmiokąta były równe i równoległe, zatem dalsze uzasadnienie istnienia parkietażu typu IH51 jest takie samo, jak uzasadnienie istnienia parkietażu typu IH46.

Zwróćmy uwagę na to, że czworokąt spełniający założenia Faktu 32 nie musi być wypukły. Poniżej na Rysunku 40 pokazano fragment parkietażu z odpowiednimi oznaczeniami dla płytki w kształcie czworokąta wklęsłego mającego parę przeciwległych boków równych. Uzasadnienie istnienia parkietażu typu IH51 jest wtedy takie samo, jak przedstawione powyżej.

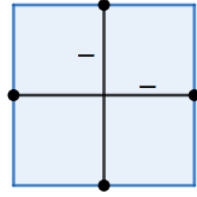


Rysunek 40: Fragment parkietażu typu IH51 dla płytki będącej czworokątem wklęsłym

Uzasadniliśmy zatem, że płytka parkietażu typu IH51 ma kształt dowolnego czworokąta o przynajmniej jednej parze przeciwległych boków równych oraz fakt, że z dowolnych takich płytek da się ułożyć parkietaż typu IH51.

3.12 Typ IH52

Przypomnijmy diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH52 (Rysunek 41).



Rysunek 41: Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH52

W celu znalezienia zakresu kształtów płytki w parkiecie typu IH52 wykonamy szkicowy rysunek fragmentu parkietu, pamiętając o typie walencyjnym [4⁴]. Niech czworokąt $ABCD$ będzie płytką w parkiecie typu IH52. Rozważmy płytki mające z czworokątem $ABCD$ wspólny bok lub wierzchołek. Zostało to zaprezentowane na Rysunku 42.



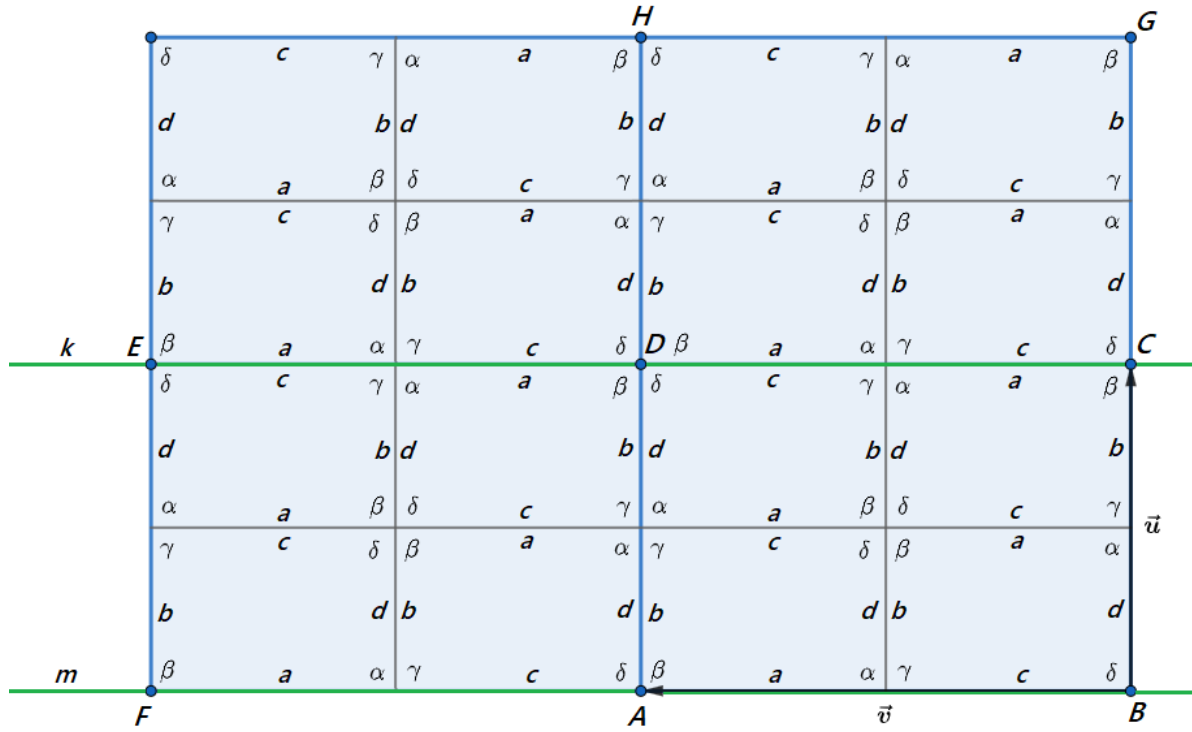
Rysunek 42: Analiza kształtu płytki w parkiecie IH52

Po pierwsze zauważmy, że etykiety boków występują w stałych parach a z c oraz b z d , więc boki o etykietach a i c są tej samej długości, podobnie b i d . Wobec tego czworokąt $ABCD$ na pewno jest równoległobokiem. Dalej zwróćmy uwagę na to, że w wierzchołkach A i C spotykają się dwa kąty miary α i dwa kąty miary γ , zatem zachodzi równość $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, czyli $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Skoro $ABCD$ jest równoległobokiem, to miara kąta α jest równa

mierze kąta γ , czyli $2\alpha = 180^\circ$, więc $\alpha = \gamma = 90^\circ$. Podobnie zauważamy, że w wierzchołkach B i D spotykają się dwa kąty miary β i dwa kąty miary δ , więc $2\beta + 2\delta = 360^\circ$, zatem $\beta + \delta = 180^\circ$. Z własności równoległoboku wiemy, że $\beta = \delta$, stąd wnioskujemy, że również $\beta = \delta = 90^\circ$. Wobec tego czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

Fakt 33. *Dla płytki o kształcie dowolnego prostokąta istnieje parkietaż izohedralny typu IH52.*

Zacznijmy wypełniać płaszczyznę prostokątami zgodnie z diagramem sąsiadowania z Rysunku 41. Po pewnym czasie otrzymamy sytuację z Rysunku 43.



Rysunek 43: Fragment parkietażu typu IH52

Rozważmy prostokąt $ABCD$, jak na Rysunku 43, który jest sklejeniem czterech prostokątnych płytek parkietażu typu IH52. Zauważmy, że prostokąt $FADE$ jest taki sam jak prostokąt $ABCD$, bo ma te same etykiety boków i kąty. Ponadto łatwo zauważyć, że prostokąt $FADE$ powstaje w wyniku translacji prostokąta $ABCD$ o wektor $\vec{v}$. Wobec tego pas prostokątów między prostymi k i m możemy kontynuować w nieskończoność w lewo i prawo przesuwając prostokąt $ABCD$ wraz z jego podziałem na cztery prostokąty o całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$.

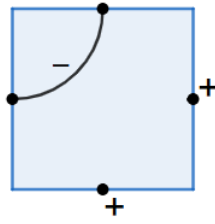
Dalej zwróćmy uwagę na to, że prostokąt $DCGH$ (wraz z jego podziałem) powstaje w wyniku przesunięcia prostokąta $ABCD$ (wraz z jego podziałem) o wektor $\vec{u}$. Zatem poziome

pasy prostokątów możemy kontynuować w nieskończoność przesuwając pas prostokątów między prostymi k i m o całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$.

Uzasadniliśmy zatem, że płytki parkietu typu IH52 ma kształt dowolnego prostokąta oraz fakt, że z dowolnych prostokątnych płytek da się ułożyć parkiet typu IH52.

3.13 Typ IH53

Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH53 został pokazany na Rysunku 44.



Rysunek 44: Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH53

Przypomnijmy, że z Twierdzenia 12 kropka $\bullet$ ze znakiem $+$ oznacza półobrót względem środka boku.

Wykonamy szkicowy rysunek fragmentu parkietu w celu wyznaczenia zakresu kształtów płytki w parkiecie typu IH53 uwzględniając to, że w każdym wierzchołku spotykają się cztery płytki (patrz Rysunek 45).



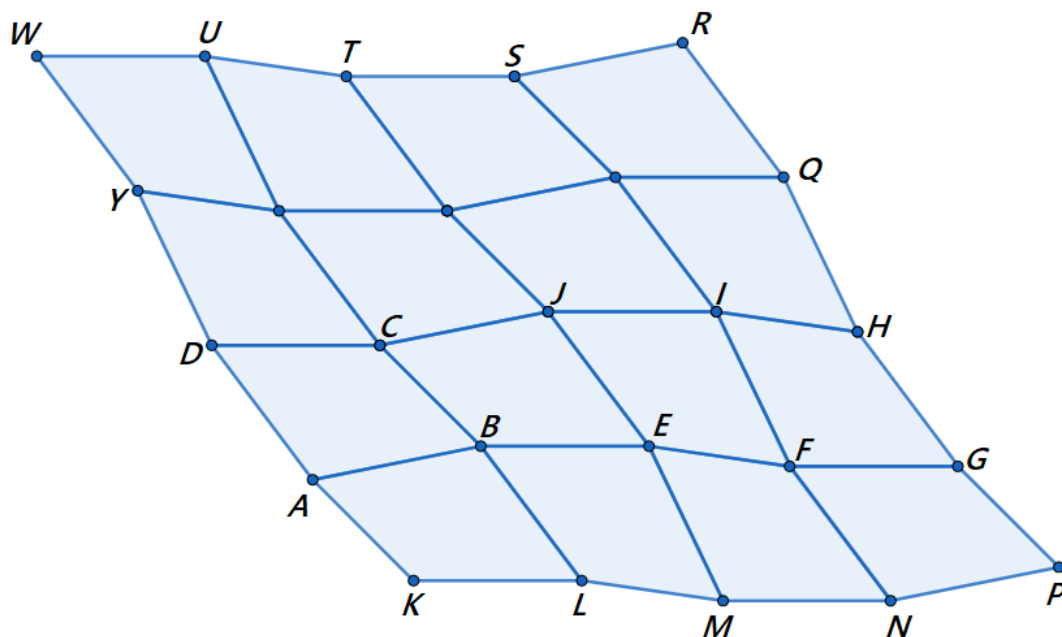
Rysunek 45: Analiza kształtu płytki w parkiecie typu IH53

Z rysunku widzimy, że boki o etykietach c i d są tej samej długości. Ponadto nie musi zachodzić żaden szczególny warunek dotyczący miar kątów. W każdym wierzchołku czworokąta $ABCD$ spotykają się kąty o miarach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ale oczywistym jest, że te miary sumują się do 360° (suma miar kątów czworokąta $ABCD$).

Fakt 34. *Dla płytki o kształcie dowolnego czworokąta, w którym jest przynajmniej jedna para sąsiednich boków równych, istnieje parkietaż izohedralny typu IH53.*

Rozważmy teraz fragment parkietażu typu IH53 złożony z 16 czworokątów tworzących szesnastokąt (patrz Rysunek 46). Będziemy chcieli udowodnić, że odpowiednie boki tego szesnastokąta są równoległe. Będziemy myśleć, że ten szesnastokąt to w pewnym sensie równoległobok z powyginanymi bokami, ale tak, aby zachować równoległość boków. Takimi równoległobokami z odpowiednio powyginanymi bokami możemy wypełnić płaszczyznę stosując odpowiednie translacje.

Niech czworokąt $ABCD$ będzie płytką opisaną w Fakcie 34 zaopatrzoną w diagram sąsiadowania z Rysunku 44.

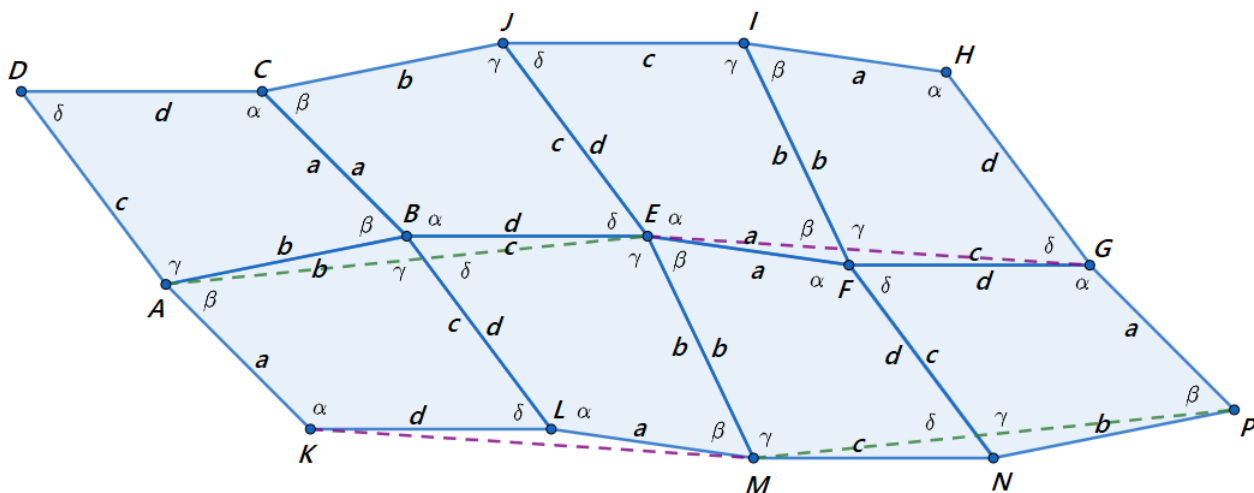


Rysunek 46: Szesnastokątny fragment parkietażu typu IH53

KROK I. Uzasadnimy, że odcinki AD i GH na Rysunku 46 są równe i równoległe.

Rozważmy bardziej szczegółowy mniejszy fragment parkietażu, jak na Rysunku 47.

Zauważmy, że odcinek EJ powstaje w wyniku półobrotu odcinka AD wokół środka boku BC , zatem odcinki AD oraz EJ są równe i równoległe. Dalej zauważmy, że odcinek HG powstaje w wyniku półobrotu odcinka EJ wokół środka odcinka FI , zatem odcinki



Rysunek 47: Fragment parkietazu typu IH53

EJ oraz GH są równe i równoległe. Skoro odcinki AD i EJ są równe i równoległe oraz odcinki EJ oraz GH są równe i równoległe, więc również odcinki AD i GH są równe i równoległe.

KROK II. Udowodnimy, że odcinki AK i GP są równe i równoległe.

Zauważmy, że trójkąty ABE oraz MNP są przystające z cechy bkb, gdyż:

- $|AB| = |NP|$, bo mają tę samą etykietę b
- $|BE| = |MN|$, bo mają tę samą etykietę c
- $|\angle ABE| = \gamma + \delta = |\angle MNP|$

Z przystawania trójkątów ABE oraz MNP wynika równość długości boków $|AE| = |MN|$ oraz równość miar kątów $|\angle AEB| = |\angle PMN|$.

Podobnie możemy zauważyć, że trójkąty EFG oraz KLM są przystające, bo:

- $|KL| = |FG|$, bo mają tę samą etykietę d
- $|LM| = |EF|$, bo mają tę samą etykietę a
- $|\angle KLM| = 360^\circ - (\alpha + \delta) = |\angle EFG|$

Z przystawania trójkątów EFG oraz KLM wynika równość długości boków $|KM| = |EG|$ oraz równość miar kątów $|\angle KML| = |\angle GEF|$.

Dalej zauważamy, że trójkąty AGE oraz KPM są przystające z cechy bkb, ponieważ:

- $|KE| = |MP|$
- $|KM| = |EG|$
- $|\sphericalangle AEG| = \gamma - |\sphericalangle AEB| + \beta + |\sphericalangle GEF| = \gamma - |\sphericalangle PMN| + \beta + |\sphericalangle KML| = |\sphericalangle KMP|$

Skoro trójkąty AEG oraz KML są przystające, więc odcinki AG oraz KP są równe. Odcinki AK i GP są równe, bo mają tę samą etykietę, zatem czworokąt $KPGA$ jest równoległobokiem, stąd odcinki AK i GP są równe i równoległe.

KROK III. Równoległość pozostałych odcinków na Rysunku 46.

Równoległości odcinków $WY \parallel RQ, WU \parallel KL, TS \parallel MN$ dowodzimy jak w kroku I, zaś równoległości $YD \parallel QH, UT \parallel LM, SR \parallel NP$ dowodzimy analogicznie, jak w kroku II.

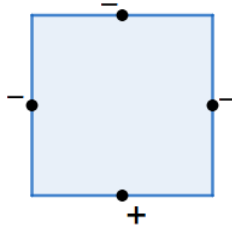
Skoro pary łamanych $KLMNP$ i $WUTSR$ oraz $WYDAK$ i $RQHGP$ są równoległe w tych parach według Definicji 26, więc przez argument taki sam jak dla typu IH51 z rozważanych szesnastokątów da się ułożyć parkietaż stosując odpowiednie translacje, co dowodzi istnienia parkietażu typu IH53 dla każdego wspomnianego kształtu płytki.

Zwróćmy uwagę na to, że czworokąt spełniający założenia Faktu 34 nie musi być wypukły, ale nawet w takim przypadku powyższe rozumowanie pokazuje istnienie odpowiedniego parkietażu typu IH53.

Podsumowując, uzasadniliśmy, że płytka parkietażu typu IH53 jest czworokątem z przynajmniej jedną parą sąsiednich boków równych oraz fakt, że z dowolnych takich czworokątów da się ułożyć parkietaż izohedralny typu IH53.

3.14 Typ IH54

Na Rysunku 48 jest przedstawiony diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH54.



Rysunek 48: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH54

Wykonajmy szkicowy rysunek płytki $ABCD$ parkietażu typu IH54 i płytek mających z nią wspólny bok lub wierzchołek, uwzględniając typ walencyjny $[4,4,4,4]$. Taki szkic pozwoli odkryć nam dopuszczalne kształty płytki w parkietażu typu IH54.



Rysunek 49: Analiza kształtu płytki w parkiecie IH54

Zauważmy, że w wierzchołku C spotykają się cztery kąty miary γ , więc $4\gamma = 360^\circ$, zatem γ wynosi 90° . Podobnie w punkcie D spotykają się cztery kąty miary δ , więc również δ jest równa 90° . Zwróćmy uwagę, że w wierzchołkach A i B spotykają się dwa kąty miary α i dwa kąty miary β , zatem zachodzi zależność $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, zatem α i β sumują się do 180° .

Podsumowując poczynione spostrzeżenia, czworokąt $ABCD$ ma dwa kąty proste, pozostałe dwa jego kąty sumują się do 180° , zatem jest on trapezem prostokątnym.

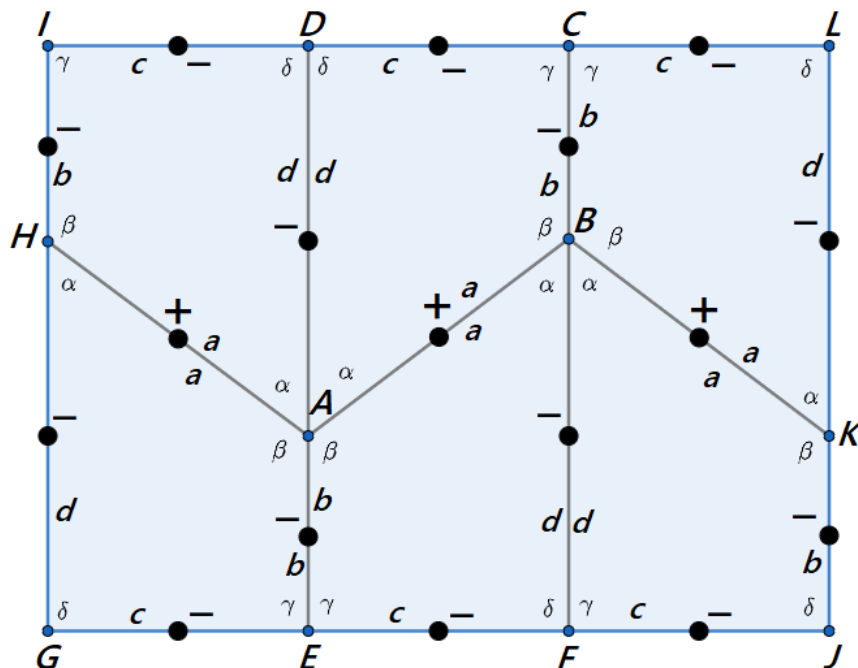
Fakt 35. *Dla płytki o kształcie dowolnego trapezu prostokątnego istnieje parkiet izohedralny typu IH54.*

Niech zatem trapez prostokątny $ABCD$ będzie płytką w kształcie trapezu prostokątnego zaopatrzoną w diagram sąsiadowania jak na Rysunku 48. Niech dalej czworokąt $EFBA$ będzie płytką o takim samym kształcie przylegającą do płytki $ABCD$ przez bok AB . Zostało to pokazane na Rysunku 50.

Zauważmy, suma miar kątów α i β wynosi 180° , bo α i β to miary kątów przy jednym ramieniu trapezu $ABCD$, więc wielokąt $EFBCDA$ jest prostokątem.

Dokonajmy serii następujących spostrzeżeń.

- Trapez $EFBA$ jest przekształcany na trapez $GEAH$ poprzez odbicie względem prostej AE .



Rysunek 50: Fragment parkietu typu IH54

- Trapez $ABCD$ jest przekształcany na trapez $HADI$ poprzez odbicie względem prostej AD .

Punkty E, A, D są współliniowe, więc prostokąt $EFCD$ jest przekształcany na prostokąt $GEDI$ poprzez odbicie względem prostej ED .

- Trapez $EFBA$ jest przekształcany na trapez $FJKB$ poprzez odbicie względem prostej FB .
- Trapez $ABCD$ jest przekształcany na trapez $BKLC$ poprzez odbicie względem prostej BC .

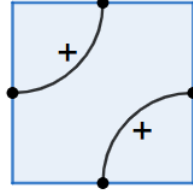
Punkty F, B, C są współliniowe, więc prostokąt $EFCD$ jest przekształcany na prostokąt $FJLC$ poprzez odbicie względem prostej FC .

Z powyższych uwag wynika, iż prostokąt $EFCD$ jest płytką w parkiecie typu IH48 (patrz Rysunek 29). Z Rozdziału 3.8 wiemy, iż z prostokątnych płytek da się utworzyć parkiet typu IH48. Wobec tego z prostokątnych płytek wraz z ich podziałem na dwa trapezy można utworzyć parkiet izohedralny typu IH54.

Uzasadniliśmy, że płytka parkietu typu IH54 ma kształt dowolnego trapezu prostokątnego oraz to, że z takich płytek da się utworzyć parkiet typu IH54.

3.15 Typ IH55

Diagram sąsiadowania dla parkietazu typu IH55 został zaprezentowany na Rysunku 51.



Rysunek 51: Diagram sąsiadowania dla parkietazu typu IH55

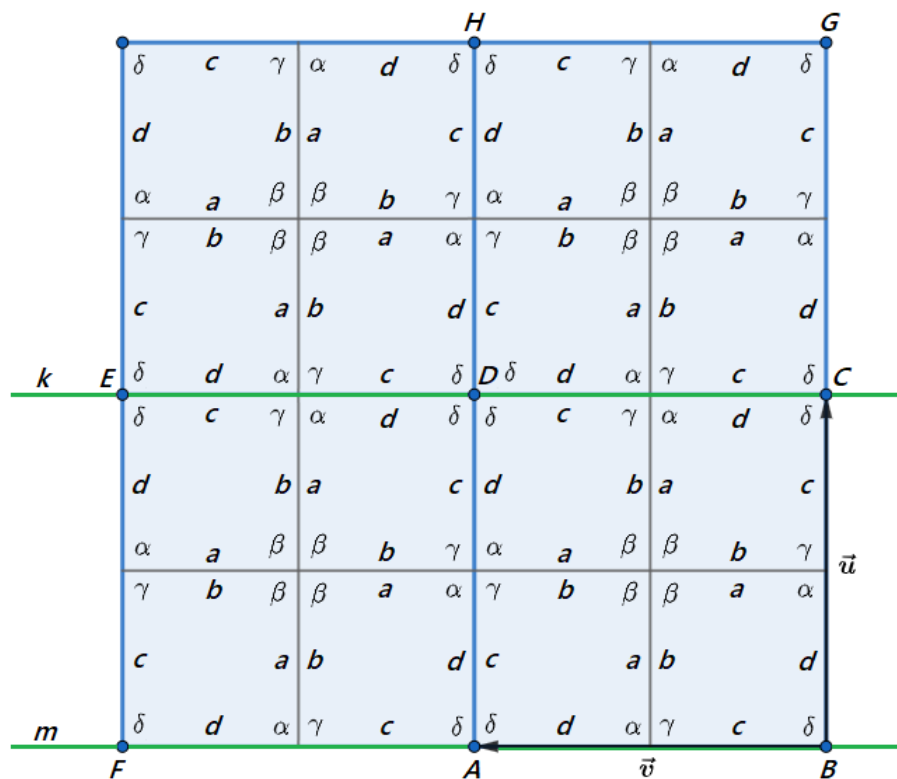
Przypomnijmy, że zgodnie z Twierdzeniem 14 połączenie łukiem sąsiadujących boków oznacza, że obrót wokół wspólnego wierzchołka tych dwóch boków jest symetrią parkietazu. Te dwa boki muszą mieć tę samą długość, zatem potencjalna płytką musi być deltoidem. Omawiane płytki czworokątne mają typ walencyjny (4^4) , a to znaczy, że w każdym wierzchołku spotykają się 4 płytki. Zauważmy zatem, że w każdym wierzchołku, wokół którego będziemy wykonywać obrót, będą spotykać się 4 takie same kąty, zatem każdy z nich ma 90° . Stąd deltoid ma dwa przeciwległe kąty proste, więc jest on kwadratem.

Fakt 36. *Dla płytki o kształcie dowolnego kwadratu istnieje parkietaż izohedralny typu IH55.*

Rysunek 52 pokazuje fragment parkietazu typu IH55 budowanego z kwadratowych płytek.

Rozważmy kwadrat $ABCD$ będący sklejeniem czterech płytek parkietazu typu IH55. Zauważmy, że kwadrat $FADE$ wraz z jego podziałem powstaje w wyniku przesunięcia kwadratu $ABCD$ wraz z jego podziałem o wektor $\vec{v}$. Zatem pas kwadratów między prostymi k i m możemy w nieskończoność kontynuować w lewo i prawo przesuwając kwadrat $ABCD$ wraz z jego podziałem o kolejne całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$. Zwróćmy uwagę, iż kwadrat $DCGH$ wraz z jego podziałem powstaje w wyniku translacji kwadratu $ABCD$ wraz z jego podziałem o wektor $\vec{u}$. Łatwo zatem zauważyć, że pas kwadratów powyżej prostej k powstaje w wyniku przesunięcia pasa kwadratów między prostymi k i m o wektor $\vec{u}$. Zatem wypełnianie płaszczyzny kwadratami możemy kontynuować w nieskończoność w górę i w dół przesuwając pas między prostymi k i m o całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$.

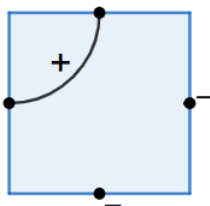
Uzasadniliśmy zatem, że płytka parkietazu typu IH55 ma kształt dowolnego kwadratu. Pokazaliśmy również, że z kwadratowych płytek da się utworzyć parkietaż izohedralny typu IH55.



Rysunek 52: Fragment parkietu typu IH55

3.16 Typ IH56

Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH56 wygląda następująco (Rysunek 53).



Rysunek 53: Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH56

Przypomnijmy, że połączenie sąsiednich boków łukiem ze znakiem $+$ oznacza obrót wokół wspólnego wierzchołka tych boków (patrz Twierdzenie 14), natomiast $\bullet$ ze znakiem $-$ na boku oznacza odbicie względem prostej zawierającej ten bok (patrz Twierdzenie 13).

Wykonajmy schematyczny rysunek (Rysunek 54) czworokątnej płytki parkietu typu

IH56 oraz płytek mających z nią wspólny bok lub wierzchołek w celu wyznaczenia zakresów kształtów płytki. Pamiętamy przy tym, że typ walencyjny parkietażu to (4^4) .

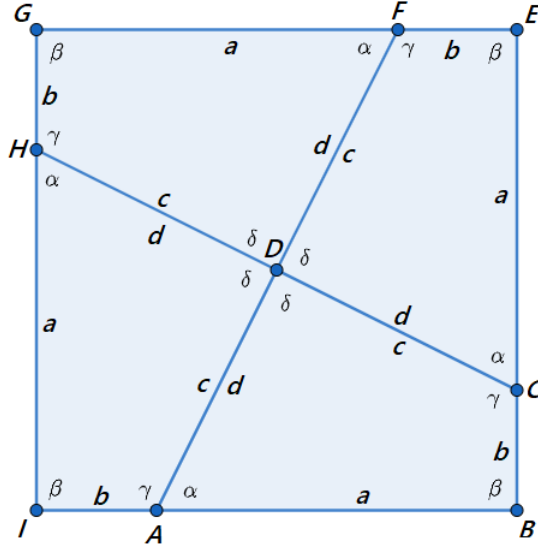
β	a	α	γ	b	β	β	b	γ
b		d	c		a	a		c
γ	c	δ	D	δ	d	α	C	α
α	d	δ	δ	c	γ	γ	c	δ
a		c	d		b	b		d
β	b	γ	α	a	β	β	a	α
β	b	γ	A	α	a	β	B	α
a		c	d		b	b		d
α	d	δ	δ	c	γ	γ	c	δ

Rysunek 54: Analiza kształtu płytki w parkietażu IH56

Niech czworokąt $ABCD$ będzie płytką w parkietażu typu IH56. Zauważmy, że w wierzchołku D spotykają się cztery kąty miary δ , zatem $\delta = 90^\circ$. Podobnie w wierzchołku B spotykają się cztery kąty miary β , więc również $\beta = 90^\circ$. W wierzchołkach A i C spotykają się dwa kąty miary α oraz dwa kąty miary γ , czyli α i γ sumują się do 180° . Jest to jednak oczywiste z sumy miar kątów czworokąta $ABCD$. Zauważmy ponadto, że boki o etykietach c i d są tej samej długości, ponieważ jeśli bok czworokąta ma etykietę c do ten sam bok w płytce sąsiadującej przez ten bok, ma etykietę d i odwrotnie. Możemy zatem powiedzieć, że czworokąt $ABCD$ jest sklejeniem dwóch trójkątów prostokątnych przeciwprostokątnymi, z czego jeden z tych trójkątów jest równoramienny.

Fakt 37. *Dla płytki o kształcie dowolnego czworokąta będącego sklejeniem dwóch trójkątów prostokątnych przeciwprostokątnymi, z czego jeden z tych trójkątów jest równoramienny a drugi dowolny, istnieje parkietaż izohedralny typu IH56.*

Rozważmy cztery czworokątne płytki parkietażu typu IH56, jak na Rysunku 55.



Rysunek 55: Fragment parkietu typu IH56

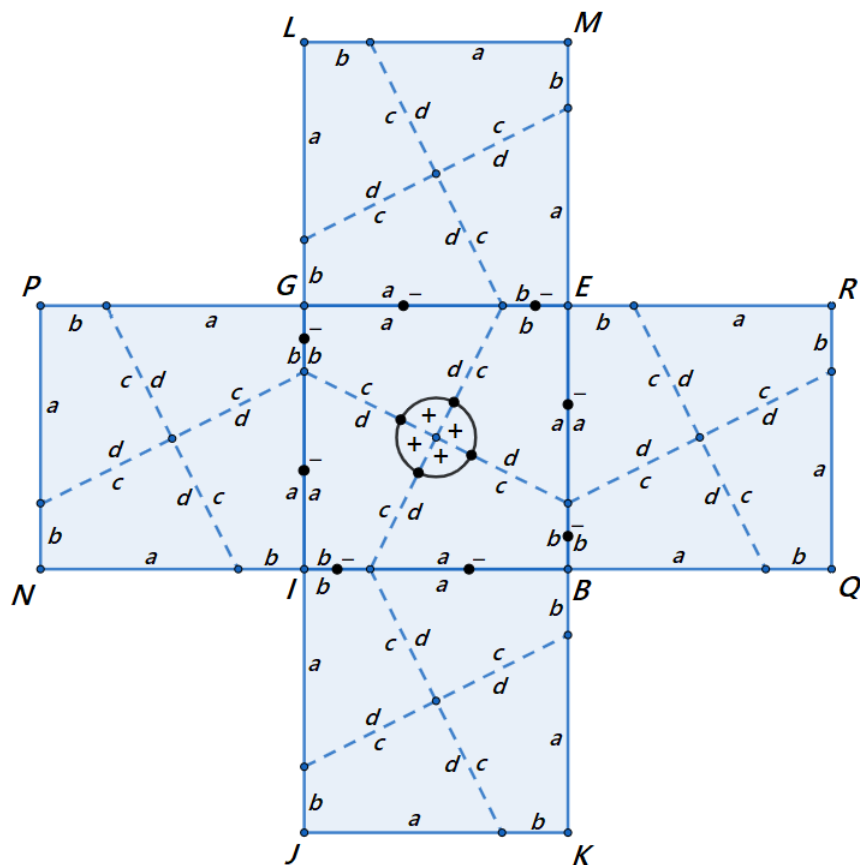
Zauważmy, że ośmiokąt $ABCEFGHI$ to tak naprawdę czworokąt $IBEG$, bo $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Zwróćmy uwagę na to, że czworokąt $IBEG$ ma cztery kąty proste, bo $\beta = 90^\circ$ oraz cztery boki tej samej długości, bo każdy z nich jest sumą odcinka o etykiecie a i odcinka o etykiecie b . Zatem czworokąt $IBEG$ jest kwadratem.

Dokonajmy teraz serii spostrzeżeń związanych z nieco większym fragmentem parkietu przedstawionym na Rysunku 56.

- Kwadrat $JKBI$ jest obrazem kwadratu $IBEG$ w wyniku odbicia względem prostej IB .
- Kwadrat $EGLM$ jest obrazem kwadratu $IBEG$ w wyniku odbicia względem prostej GE .
- Kwadrat $GINP$ jest obrazem kwadratu $IBEG$ w wyniku odbicia względem prostej GI .
- Kwadrat $QREB$ jest obrazem kwadratu $IBEG$ w wyniku odbicia względem prostej EB .

Wobec tego możemy stwierdzić, że kwadrat $IBEG$ jest płytką parkietu typu IH48. W Rozdziale 3.8 udowodniliśmy istnienie parkietu tego typu. Parkiet typu IH56 powstaje w wyniku podziału każdej płytki parkietu typu IH56 utworzonego z kwadratów na odpowiednie cztery czworokąty opisane w Faktie 37.

Udowodniliśmy, że płytki parkietu typu IH56 ma kształt dowolnego czworokąta będącego sklejeniem dwóch trójkątów prostokątnych przeciwprostokątnymi, z czego jeden z



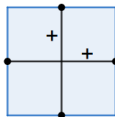
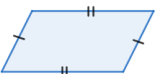
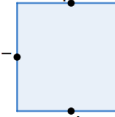
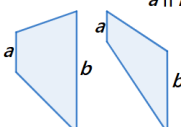
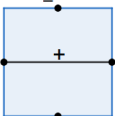
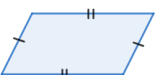
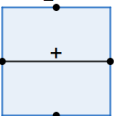
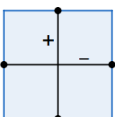
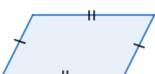
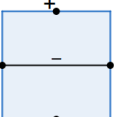
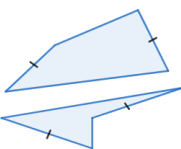
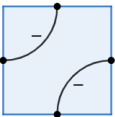
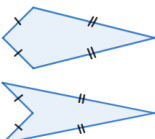
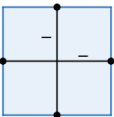
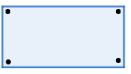
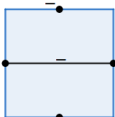
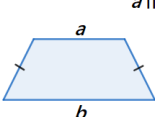
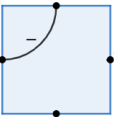
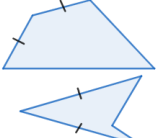
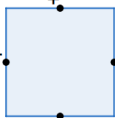
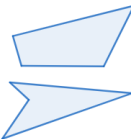
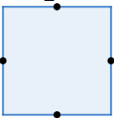
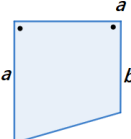
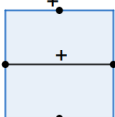
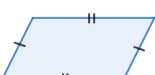
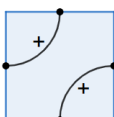
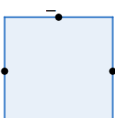
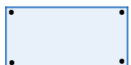
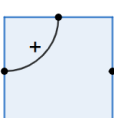
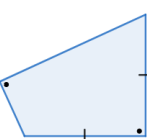
Rysunek 56: Nieco większy fragment parkietazu typu IH56

tych trójkątów jest równoramienny a drugi dowolny. Uzasadniliśmy również, że z dowolnych takich czworokątów da się utworzyć parkietaz typu IH56.

3.17 Parkietaże czworokątne – podsumowanie

Dokonajmy podsumowania wszystkich powyższych analiz dotyczących zakresów kształtów płytek w izohedralnych parkietazach o niesymetrycznych czworokątnych płytkach. Najczęściej występującym kształtem czworokątnej płytki jest równoległobok (IH41, IH42, IH43, IH47, IH50). W podsumowaniu wstępują też następujące figury: trapez równoramienny (IH45), trapez prostokątny (IH54), dowolny trapez (IH49), prostokąt (IH48, IH52), kwadrat (IH55), deltoid (IH44), dowolny czworokąt (IH46) oraz trochę bardziej nietypowe czworokąty (IH51, IH53, IH56).

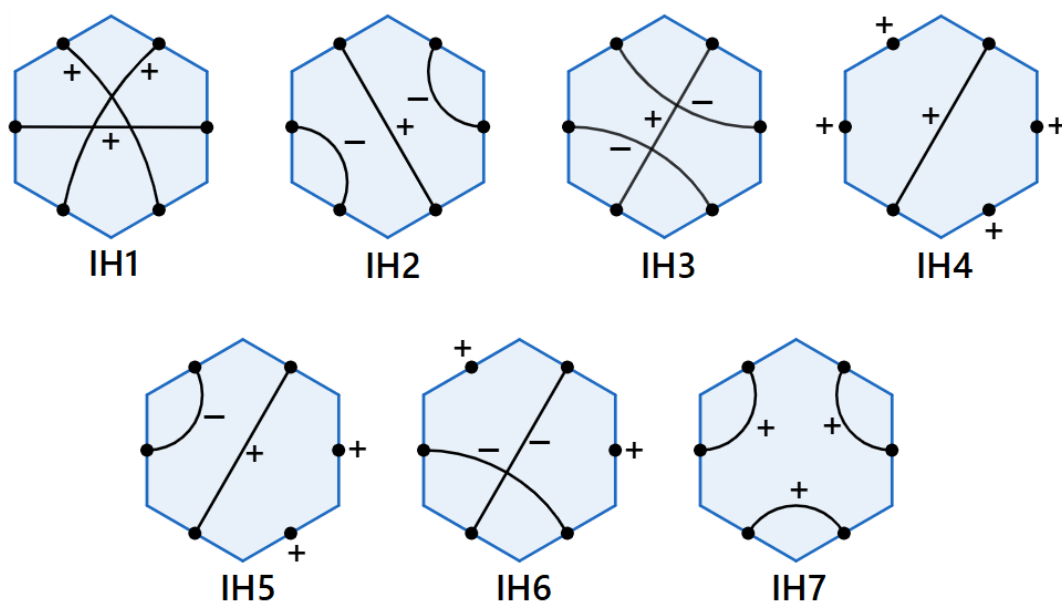
Graficzne zestawienie dopuszczalnych zakresów kształtów czworokątnych płytek dla poszczególnych typów przeanalizowanych parkietazów zostało przedstawione w formie tabeli na Rysunku 57.

Typ parkietażu	Kształt płytki	Typ parkietażu	Kształt płytki
 IH41		 IH49	 $a \parallel b$
 IH42		 IH50	
 IH43		 IH51	
 IH44		 IH52	
 IH45	 $a \parallel b$	 IH53	
 IH46		 IH54	 $a \parallel b$
 IH47		 IH55	
 IH48		 IH56	

Rysunek 57: Zakresy kształtów płytek w analizowanych parkietach izohedralnych o niesymetrycznych czworokątnych płytkach

4 Sześciokąty

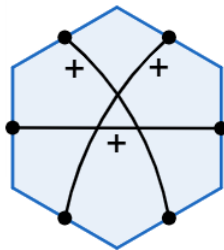
Poniżej na Rysunku 58 prezentujemy wszystkie diagramy sąsiadowania dla parkietaży izohedralnych o sześciokątnych niesymetrycznych płytkach zaczerpnięte z [3] (Rozdział 6). Przypomnijmy, że wszystkie parkietaże izohedralne o płytkach sześciokątnych są typu walencyjnego $[3^6]$, czyli w w każdym wierzchołku parkietażu spotykają się 3 płytki. Dla każdego typu izohedralnego parkietażu, tak jak dla czworokątów, opiszemy zakres kształtów płytki i uzasadnimy istnienie parkietażu danego typu dla każdego ze wskazanych kształtów płytki.



Rysunek 58: Rozważane parkietaże sześciokątne

4.1 Typ IH1

Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH1 jest następujący (patrz Rysunek 59).

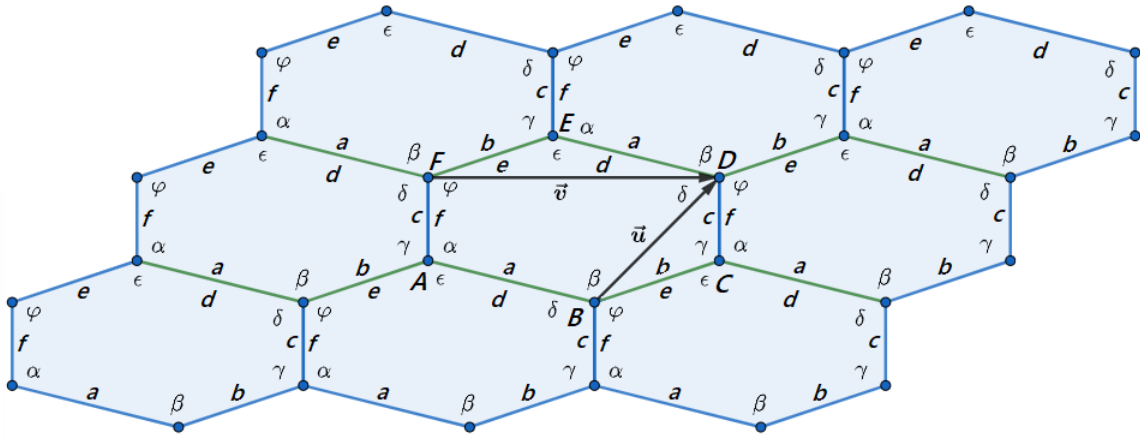


Rysunek 59: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH1

Z Twierdzenia 16 wiemy, że połączenie niesąsiadujących boków łukiem ze znakiem plus oznacza, że boki połączone łukiem są równe i równoległe. Zatem płytki parkietu typu IH1 jest sześciokątem, którego przeciwległe pary boków są równe i równoległe.

Fakt 38. *Dla płytki o kształcie dowolnego sześciokąta, którego przeciwległe pary boków są równe i równoległe, istnieje parkiet izohedralny typu IH1.*

Niech sześciokąt $ABCDEF$ będzie potencjalną płytką parkietu typu IH1 (patrz Rysunek 60). Niech boki o etykietach a i d będą równe i równoległe, podobnie b i e oraz c i f . Równoległość odcinków pociąga za sobą równość miar przeciwległych kątów sześciokąta $\alpha = \delta$, $\beta = \epsilon$, $\gamma = \varphi$.

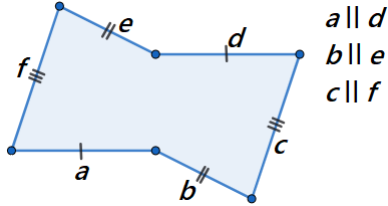


Rysunek 60: Fragment parkietu typu IH1

Sześciokąt przylegający do sześciokąta $ABCDEF$ przez bok CD powstaje poprzez przesunięcie sześciokąta $ABCDEF$ o wektor $\vec{v}$. Podobnie sześciokąt przylegający do sześciokąta $ABCDEF$ przez bok AF powstaje poprzez przesunięcie sześciokąta $ABCDEF$ o wektor $-\vec{v}$. Zatem wypełnianie pasa sześciokątów między zielonymi łamanymi (patrz Rysunek 60) możemy kontynuować w nieskończoność w lewo i prawo poprzez przesuwanie sześciokąta $ABCDEF$ o całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$.

Dalej możemy zauważyć, że poziomy górny pas sześciokątów powstaje poprzez przesunięcie pasa środkowego o wektor $\vec{u}$, zaś dolny pas sześciokątów powstaje w wyniku przesunięcia środkowego pasa sześciokątów o wektor $-\vec{u}$. Wynika to z równości i równoległości przeciwległych boków sześciokątnej płytki tego parkietu. Wobec tego wypełnianie płaszczyzny tymi sześciokątami możemy kontynuować w nieskończoność w górę i w dół przesuwając poziomy pas sześciokątów o całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$.

Zwróćmy uwagę na to, że płytki parkietu typu IH1 może mieć kształt sześciokąta wklęsłego. Dla takiego przypadku wszystkie te rozumowania się odpowiednio przenoszą. Przykład takiej płytki został zaprezentowany na Rysunku 61.

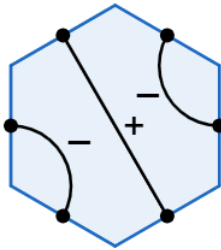


Rysunek 61: Płytki parkietu typu IH1 – przypadek wklęsły

Uzasadniliśmy, że płytki parkietu typu IH1 ma kształt sześciokąta, którego przeciwległe pary boków są równe i równoległe oraz fakt, że z płytek o dowolnym takim kształcie da się utworzyć parkiet izohedralny typu IH1.

4.2 Typ IH2

Przypomnijmy diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH2 (patrz Rysunek 62).



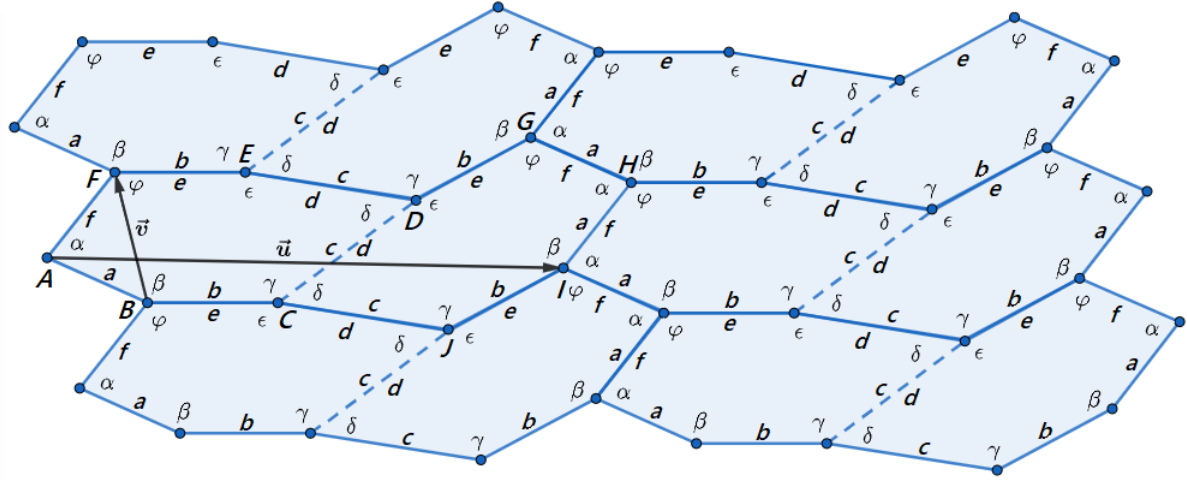
Rysunek 62: Diagram sąsiadowania dla parkietu typu IH2

Z Twierdzenia 16 wiemy, że połączenie niesąsiadujących boków łukiem ze znakiem plus oznacza, że boki połączone łukiem są równe i równoległe. Zatem płytki parkietu typu IH2 jest sześciokątem, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych. Ponadto z Faktu 19 wynika, iż w pozostałych dwóch parach boków sąsiadujących ze sobą, boki w tych parach są równe.

Fakt 39. *Dla płytki o kształcie dowolnego sześciokąta, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych, a w pozostałych dwóch parach boków sąsiadujących ze sobą, boki w tych parach są równe, istnieje parkiet izohedralny typu IH2.*

Niech sześciokąt $ABCDEF$ spełnia założenia Faktu 39, gdzie odcinki BC i EF są równe i równoległe oraz zachodzą następujące równości $|CD| = |DE|$ oraz $|AF| = |AB|$

(patrz Rysunek 63). Niech sześciokąt $CDGHIJ$ będzie płytką parkietazu typu IH2, która przylega do płytki $ABCDEF$. Przeanalizujemy dziesięciokąt $ABCJIHGDEF$ pod kątem równoległości jego boków.



Rysunek 63: Fragment parkietazu typu IH2

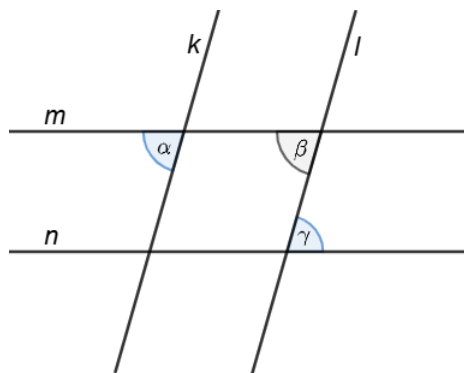
- Boki BC i FE są równe i równoległe z założenia.
- Boki CJ i ED są równe, bo boki o etykietach d i c są równe. Ponadto boki CJ i ED są również równoległe, bo kąty naprzemianległe są równe $|\sphericalangle CDE| = \delta = |\sphericalangle DCJ|$.
- Boki JI oraz DG są równe i równoległe z założenia.

Z powyższych rozważań wynika, że czworokąty $BCEF$, $CJDE$, $JIGD$ są równoległobokami, więc w szczególności z przechodniości równoległości wynika, iż odcinki FB i GI są równoległe.

Przydatne będzie nam pewne spostrzeżenie, będące swego rodzaju uogólnieniem własności, że dwie proste są równoległe tylko wtedy, gdy kąty odpowiadające są równe.

Rozważmy dwie proste równoległe k i l i dwie proste m i n przecinające wspomniane wcześniej dwie proste równoległe (patrz Rysunek 64). Twierdzimy, że proste m i n są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy kąty α i γ są równe. Uzasadnienie tego jest bardzo proste. Kąty α i β są równe jako kąty odpowiadające. Kąty β i γ są równe tylko wtedy, gdy kąty naprzemianległe β i γ są równe. Sformułujmy to jako uwagę, bo kilkakrotnie będziemy korzystać z tej własności.

Uwaga 40. Dla sytuacji z Rysunku 64 i przy założeniu równoległości prostych k i l , proste m i n są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy kąty α i γ są równe.



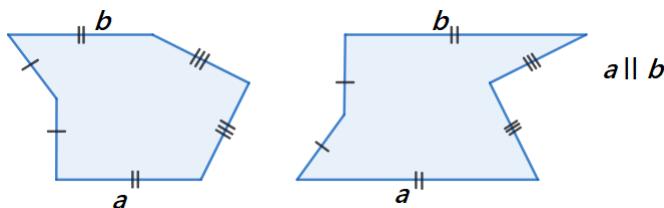
Rysunek 64: Dwie proste równoległe k i l przecięte dwoma prostymi.

Wracamy do analizy sytuacji z Rysunku 63. Ponieważ trójkąty ABF oraz GHI są równoramienne, to $|\angle AFB| = |\angle ABF| = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ i podobnie $|\angle HGI| = |\angle HIG| = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$.

Skoro odcinki FB oraz GI są równoległe oraz kąty ABF oraz IGH są równe, to z Uwagi 40 odcinki AB oraz GH są równoległe. Analogicznie kąty AFB oraz HIG są równe, więc z Uwagi 40 odcinki AF oraz IH są równoległe.

Możemy zatem myśleć, że dziesięciokąt $ABCJIHGDEF$ to sześciokąt $ABIHGF$, w którym boki BI oraz FG zostały wygięte do łamanych $BCJI$ oraz $FEDG$, ale tak, aby zachować równość i równoległość odpowiednich odcinków krzywej. W poprzednim podrozdziale uzasadniliśmy istnienie parkietazu typu IH1 o płytce sześciokątnej o przeciwległych parach boków równych i równoległych. Tutaj podobnie, równość i równoległość odpowiednich odcinków sprawia, że parkietaz typu IH2 możemy kontynuować w nieskończoność w lewo i prawo stosując translacje dziesięciokąta o całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$ oraz w górę i w dół stosując translacje o całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$.

W szczególności płytka parkietazu typu IH2 może mieć kształt sześciokąta wklęsłego. Dwa rodzaje potencjalnych płytek wklęsłych zostały zilustrowane na Rysunku 65.

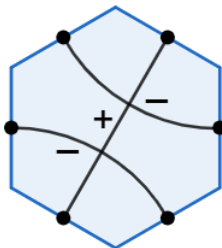


Rysunek 65: Płytki parkietazu typu IH2 – przypadek wklęsły

Uzasadniliśmy, że płytka parkietazu typu IH2 ma kształt dowolnego sześciokąta, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych, a w pozostałych dwóch parach boków sąsiadujących ze sobą, boki w tych parach są równe. Udowodniliśmy również, że z płytek o dowolnym takim kształcie da się utworzyć parkietaz typu IH2.

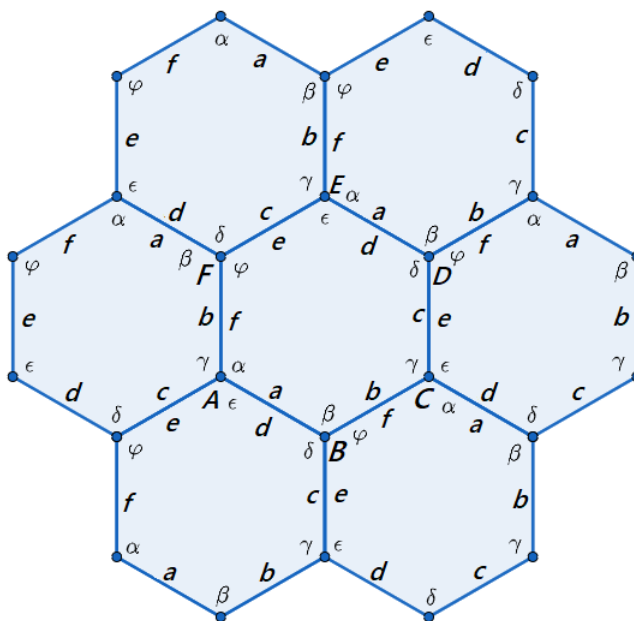
4.3 Typ IH3

Przypomnijmy diagram sąsiadowania dla parkietazu typu IH3 (patrz Rysunek 66).



Rysunek 66: Diagram sąsiadowania dla parkietazu typu IH3

Z Twierdzenia 16 wiemy, że połączenie niesąsiadujących boków łukiem ze znakiem plus oznacza, że boki połączone łukiem są równe i równoległe. Zatem płytka parkietazu typu IH3 jest sześciokątem, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych. Ponadto z Faktu 19 wynika, że w pozostałych dwóch parach boków nieprzyległych i nieprzeciwległych boki w tych parach są równe. Nie są to jednak wszystkie warunki, które musi spełniać płytka parkietazu typu IH3. Przeanalizujemy schematyczny fragment parkietazu typu IH3 ze zwróceniem uwagi na zależności między miarami kątów (patrz Rysunek 67).

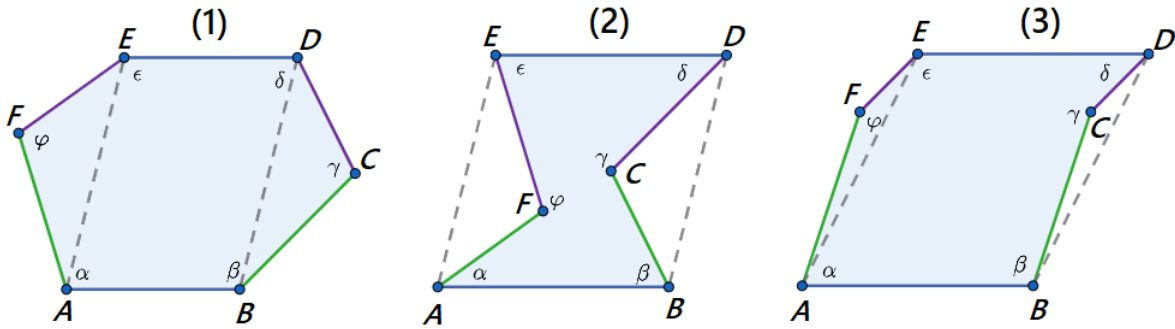


Rysunek 67: Schematyczny rysunek fragmentu parkietazu typu IH3

Zauważmy, że w wierzchołkach A, C i E spotykają się kąty o miarach α, γ i ϵ , więc zachodzi zależność $\alpha + \gamma + \epsilon = 360^\circ$. Ponadto w wierzchołkach B, D, F spotykają się kąty o miarach β, δ, φ , czyli $\beta + \delta + \varphi = 360^\circ$. Druga zależność jest konsekwencją pierwszej, gdyż wiemy, że suma miar kątów dowolnego sześciokąta wynosi $720^\circ = 2 \cdot 360^\circ$.

Fakt 41. *Dla płytki o kształcie dowolnego sześciokąta, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych, a w pozostałych dwóch parach boków nieprzyległych i nieprzeciwległych boki w tych parach są równe oraz suma miar kątów wewnętrznych w co drugim wierzchołku wynosi 360° , istnieje parkietaż izohedralny typu IH3.*

Przeanalizujemy sześciokąty, dla których spełnione są warunki dotyczące długości boków i równoległości (z pominięciem warunku na sumę miar kątów w co drugim wierzchołku) w zależności od wklęsłości i wypukłości kątów. Sprawdzimy, w których przypadkach spełniony jest także warunek dotyczący sumy kątów w co drugim wierzchołku. Możliwe są trzy sytuacje ze względu na wypukłość lub wklęsłość kątów γ i φ pokazane na Rysunku 68.



Rysunek 68: przypadek (1) wypukły-wypukły, (2) wklęsły-wklęsły, (3) wypukły-wklęsły

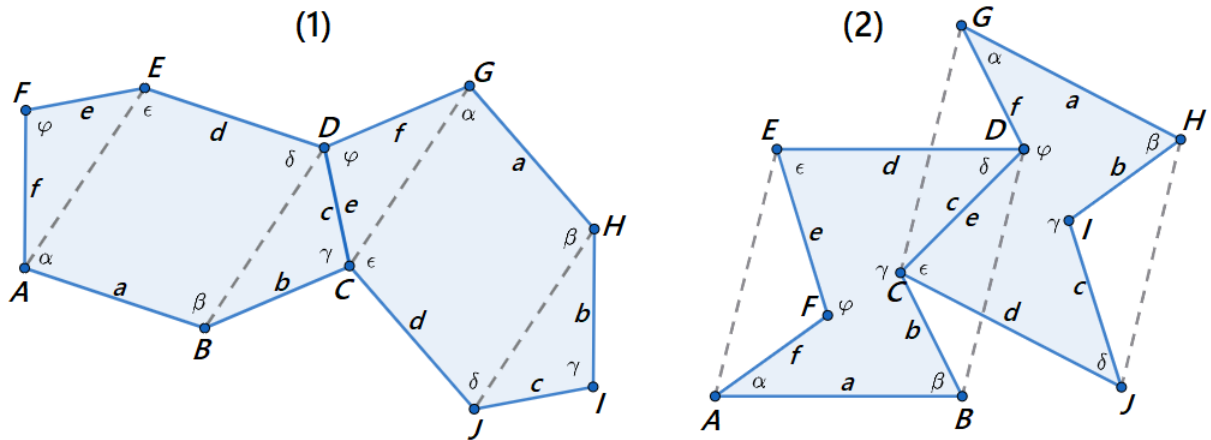
Zauważmy, że w każdym przypadku czworokąt $ABDE$ jest równoległobokiem. Ponadto, trójkąty AEF i BCD są przystające z cechy bok-bok-bok. W przypadku (1) sześciokąt $ABCDEF$ jest sumą równoległoboku i dwóch trójkątów przystających. W przypadku (2) sześciokąt to równoległobok z wyciętymi dwoma przystającymi trójkątami, zaś w przypadku (3) sześciokąt to równoległobok, w którym z jednej strony wycinamy trójkąt, zaś z drugiej strony doklejamy do niego dokładnie ten sam trójkąt. Przeanalizujemy sumę miar kątów $\alpha + \gamma + \epsilon$ w zaprezentowanych wyżej trzech sześciokątach.

1. $\alpha + \gamma + \epsilon = |\angle FAB| + |\angle BCD| + |\angle DEF|$ co możemy rozpisać jako $|\angle FAE| + |\angle EAB| + |\angle BCD| + |\angle DEA| + |\angle AEF|$ i po zmianie kolejności jako $(|\angle FAE| + |\angle AEF| + |\angle BCD|) + (|\angle EAB| + |\angle DEA|)$. Ponieważ z przystawania trójkątów wynika równość kątów BCD i AFE to z sumy miar kątów trójkąta AEF składniki w pierwszym nawiasie sumują się do 180° . W drugim nawiasie miary kątów również

sumują się do 180° , co wynika z własności równoległoboku. Zatem w tym przypadku warunek sumowania się miary co drugiego kąta do 360° jest spełniony.

2. Zauważmy, że tutaj również kąty γ i φ są równe. Z własności równoległoboku mamy, że $|\angle EAB| + |\angle AEB| = 180^\circ$, zatem $\alpha + \epsilon = 180^\circ - (|\angle AEF| + |\angle FEA|)$, co jest równe mniejszemu z kątów AFE . Suma miary mniejszego z kątów $|\angle AFE| = \alpha + \epsilon$ i większego z kątów $|\angle AFE| = \varphi = \gamma$ wynosi 360° , więc $\alpha + \gamma + \epsilon = 360^\circ$, więc warunek na co drugi kąt jest spełniony.
3. Zauważmy, że $\alpha + \epsilon > |\angle EAB| + |\angle DEA| = 180^\circ$ oraz kąt $\gamma > 180^\circ$, czyli $\alpha + \epsilon + \gamma > 360^\circ$. Zatem trzeci przypadek nie spełnia naszego warunku na kąty.

Rozważmy dwie płytki parkietu typu IH3. Zostało to pokazane na Rysunku 69 w dwóch wyróżnionych powyżej i potwierdzonych przypadkach (1) i (2) (boki o etykietach a i d są równe równoległe).



Rysunek 69: Dwie płytki parkietu typu IH3 w przypadku (1) wypukły-wypukły oraz (2) wklęsły-wklęsły.

Możliwe są dwie sytuacje, ale w obu sytuacjach rozumowanie jest identyczne, więc prowadzimy je jednocześnie dla obu przypadków.

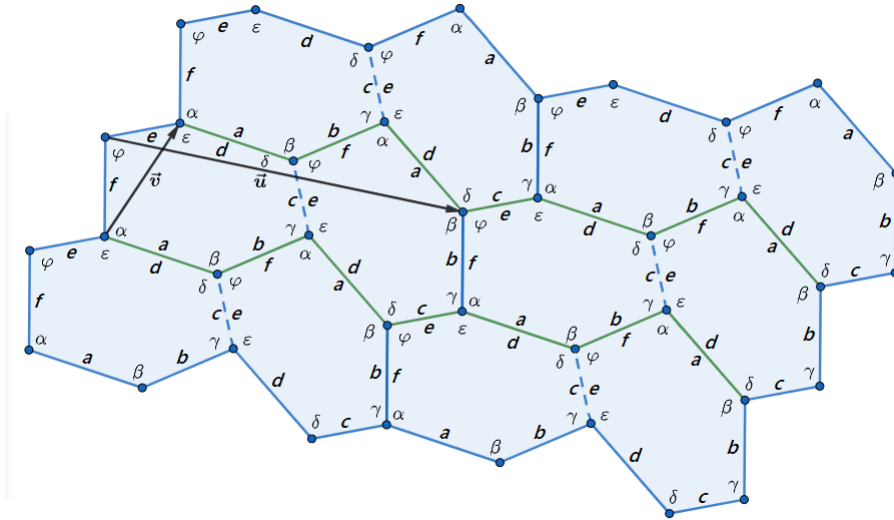
Będziemy chcieli udowodnić równość i równoległość odpowiednich boków dziesięciokąta $ABCJIHGDEF$. Powiemy, że ten dziesięciokąt to de facto sześciokąt $AJIHEF$, w którym boki AJ oraz EH zostały wygięte do łamanych $ABCJ$ oraz $EDGH$, ale tak, aby zachować równość i równoległość odpowiednich fragmentów tych łamanych.

Po pierwsze zauważmy, że odcinki AB i ED są równe i równoległe z założenia. Podobnie z założenia również odcinki CJ oraz GH są równe i równoległe. Równość odcinków BC i DG również wynika z założeń o płytce parkietu typu IH3. Pozostaje uzasadnić równoległość odcinków BC i DG .

Zauważmy, że z cechy bok-bok-bok trójkąty BCD oraz CDG są przystające. Stąd kąty naprzemianległe BCD oraz CDG są równe ($\gamma = \varphi$), więc odcinki BC oraz DG są równoległe. Co kończy uzasadnienie równoległości łamanych $ABCJ$ oraz $EDGH$ zgodnie z Definicją 26.

Dalej zauważmy również, że trójkąty AEF i JIH są przystające z cechy bok-kąt-bok. Stąd wynika równość kątów $|\angle FAE| = |\angle IHJ|$. Ponadto zachodzą następujące równoległości odcinków $AE \parallel BD \parallel CG \parallel JH$. Mamy zatem dwie proste równoległe AE i JH przecięte dwoma prostymi AF i HI , gdzie zachodzi odpowiednia równość kątów. Z Uwagi 40 wynika, że odcinki AF oraz HI są równoległe. Analogicznie dowodzimy równoległości odcinków FE i JI .

Udowodniliśmy, że dziesięciokąt $ABCJIHGDEF$ to sześciokąt $AJIHEF$ z wygiętą jedną parą boków.



Rysunek 70: Fragment parkietazu typu IH3

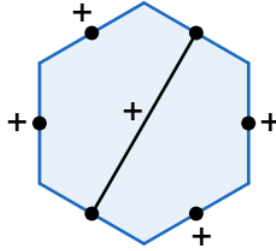
Równość i równoległość odpowiednich boków dziesięciokąta $ABCJIHGDEF$ sprawia, że zielony pas dziesięciokątów między zielonymi łamanymi (Rysunek 70) możemy kontynuować w nieskończoność w lewo i prawo, przesuwając dziesięciokąt $ABCJIHGDEF$ (wraz z jego podziałem na dwa sześciokąty) o całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$. Przesuwając ten pas w górę i w dół o całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$ uzyskamy parkietaż całej płaszczyzny. Analogiczny fragment parkietazu otrzymalibyśmy w przypadku wklęsło-wklęsłym, czyli przypadku (2) z Rysunku 69.

Uzasadniliśmy, że płytki parkietazu typu IH3 ma kształt dowolnego sześciokąta, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych, a w pozostałych dwóch parach boków nieprzyległych i nieprzeciwległych boki w tych parach są równe oraz suma miar kątów wewnętrznych w co drugim wierzchołku wynosi 360° . Wykazaliśmy również, że z

plytek o dowolnym takim kształcie da się utworzyć parkietaż izohedralny typu IH3.

4.4 Typ IH4

Przypomnijmy diagram sąsiadowania dla parkietażu izohedralnego typu IH4 (patrz Rysunek 71).



Rysunek 71: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH4

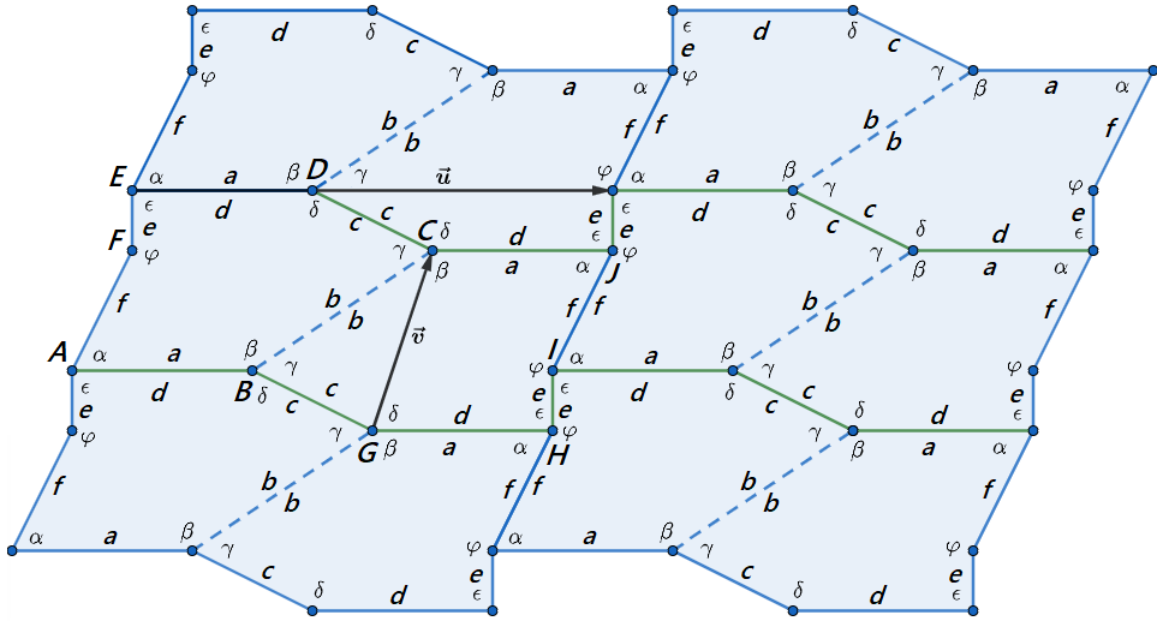
Korzystając po raz kolejny z Twierdzenia 16 wnioskujemy, że płytka parkietażu typu IH4 jest sześciokątem, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych.

Fakt 42. *Dla płytki o kształcie dowolnego sześciokąta, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych, istnieje parkietaż izohedralny typu IH4.*

Niech sześciokąt $ABCDEF$ będzie potencjalną płytką parkietażu typu IH4, w której boki AB i ED są równe i równoległe. Niech sześciokąt $BGHIJC$ będący płytką tego samego parkietażu przylega do sześciokąta $ABCDEF$ przez bok BC (patrz Rysunek 72).

Podobnie jak w poprzednich podrozdziałach będziemy chcieli uzasadnić, że dziesięciokąt $ABGHIJCDEF$ powstały ze sklejenia dwóch sześciokątnych płytek to de facto sześciokąt $AHIJEF$ z powyginanymi odpowiednio bokami. Z założenia boki AB i ED są równe i równoległe. Tak samo boki GH oraz CJ są równe i równoległe. Równość boków $|BG| = |DC|$ również jest oczywista. Równoległość tych odcinków wynika natomiast z równości kątów odpowiadających $|\angle BCD| = \gamma = |\angle CBG|$. Zauważmy dalej, że odcinki AF i IJ oraz EF i IH są równe i równoległe w tych parach. Wynika to stąd, że odcinek IJ jest obrazem odcinka AF w wyniku półobrotu wokół środka boku BC , zaś odcinek IH powstaje w wyniku półobrotu odcinka EF wokół środka boku BC . Wobec tego faktycznie dziesięciokąt $ABGHIJCDEF$ ma odpowiednie boki równe i równoległe.

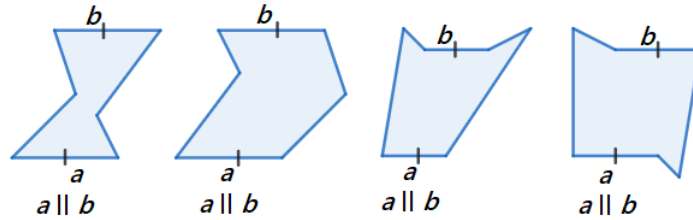
Łatwo zauważyć, że z równości i równoległości boków AF i IJ oraz boków FE i HI wynika, że pas dziesięciokątów między zielonymi łamanymi (Rysunek 72) możemy kontynuować w nieskończoność w lewo i prawo stosując translacje dziesięciokąta $ABGHIJCDEF$ o całkowite wielokrotności wektora $\vec{u}$. Dzięki równoległości łamanych $ABGH$ oraz $EDCJ$,



Rysunek 72: Fragment parkietu typu IH4

parkietowanie płaszczyzny w górę i w dół możemy kontynuować w nieskończoność przesuwając pas między zielonymi łamanymi o całkowite wielokrotności wektora $\vec{v}$.

Możliwe są różne warianty wklęsłości płytek w parkiecie typu IH4. Kilka przykładowych pokazano na Rysunku 73.



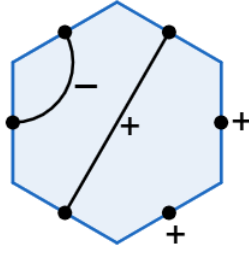
Rysunek 73: Przykładowe wklęsłe płytki parkietu typu IH4

Udowodniliśmy zatem, że płytka parkietu typu IH4 ma kształt dowolnego sześciokąta z przynajmniej jedną parą boków równych i równoległych oraz to, że dla płytki o dowolnym takim kształcie istnieje parkiet izohedralny typu IH4.

4.5 Typ IH5

Diagram sąsiedowności dla parkietu typu IH5 jest następujący (patrz Rysunek 74).

Podobnie, jak w poprzednich podrozdziałach, z Twierdzenia 16 wynika, że płytka par-

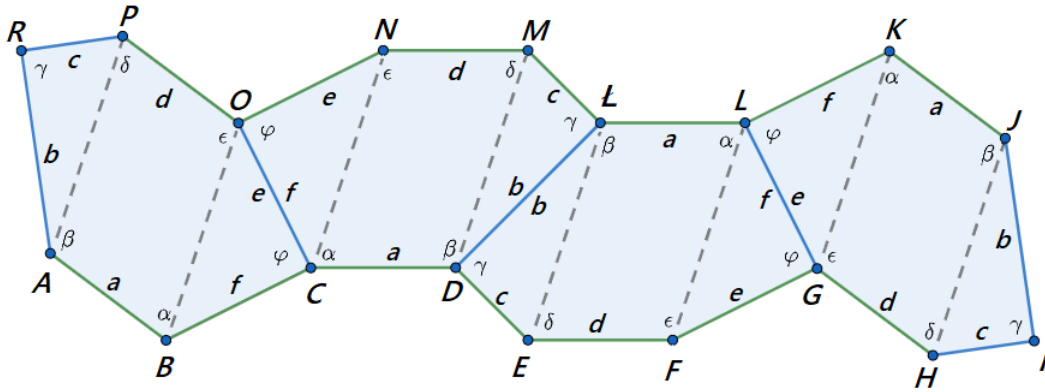


Rysunek 74: Diagram sasiadowania dla parkietazu typu IH5

kietazu typu IH5 ma parę przeciwległych boków równych i równoległych. Ponadto z Faktu 19 wnioskujemy, że w jednej z pozostałych dwóch par boków przyległych, boki w tej parze są równe.

Fakt 43. *Dla płytki o kształcie dowolnego sześciokąta, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych, a w przyjemniej jednej z dwóch pozostałych par boków przyległych boki w tej parze są równe, istnieje parkietaż izohedralny typu IH5.*

Rozważmy 18-kątny fragment parkietazu typu IH5, w którym boki o etykietach a i d są równe i równoległe, a boki o etykietach e i f są równe (patrz Rysunek 75).



Rysunek 75: Fragment parkietazu typu IH5

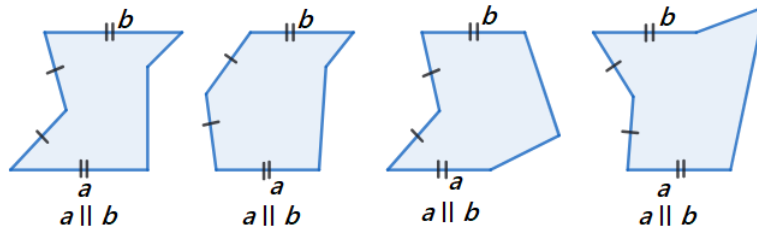
Podobnie, jak w poprzednich podrozdziałach będziemy chcieli uzasadnić, że przedstawiony na Rysunku 75 18-kąt jest zniekształconym sześciokątem, w którym zachowano równość i równoległość przeciwległych boków, tzn. że łamane $ABCDEFGH$ i $PONMLKJ$ są równoległe według Definicji 26, zaś pary boków AR i IJ oraz RP i IH są równe i równoległe. Równość długości kolejnych odcinków wspomnianych łamanych wynika wprost z założeń, że odcinki o etykietach a i d są równe oraz odcinki o etykietach e i f również. Równoległość odcinków o etykietach a i d wynika również z założenia o płytce parkietazu typu IH5.

Równoległość pozostałych odcinków wynika natomiast z równości kątów odpowiadających. Odcinki BC oraz ON są równoległe, bo zachodzi równość kątów $|\angle BCO| = \varphi = |\angle CON|$. Podobnie odcinki DE i $M\bar{L}$ są równoległe, bo $|\angle M\bar{L}D| = \gamma = |\angle ED\bar{L}|$ oraz $GH \parallel LK$, bo $|\angle FGL| = \varphi = |\angle GLK|$, co kończy uzasadnienie równoległości łamanych $ABCDEFGH$ i $PONMLKJ$.

Zwróćmy uwagę, że trójkąty ARP oraz HIJ są przystające z cechy bok-kąt-bok (równość boków o tych samych etykietach i równość kątów o mierze γ). Z poprzedniego akapitu wiemy, że odcinki PA i JH są równoległe. Z przystawania trójkątów ARP i HIJ wynika równość kątów RAP i IJH , zatem na mocy Uwagi 40 boki AR i IJ są równoległe. Podobnie z równości kątów RPA i IHJ i Uwagi 40 otrzymujemy równoległość odcinków RP i HI .

Dzięki równości i równoległości odpowiednich boków rozważanego 18-kąta parkietowanie płaszczyzny możemy kontynuować w nieskończoność stosując odpowiednie translacje.

Możliwe są też inne warianty wklęsłości i wypukłości kątów w płytce parkietazu typu IH5. Zostały one pokazane na Rysunku 76. Powyższe rozumowanie działa dla wszystkich tych wariantów.



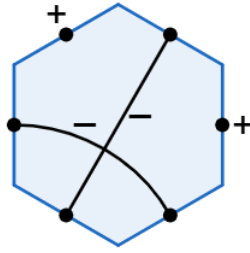
Rysunek 76: Różne warianty wklęsłości płytki w parkietazu typu IH5

Udowodniliśmy, że płytka parkietazu typu IH5 ma kształt dowolnego sześciokąta, który ma jedną parę przeciwległych boków równych i równoległych, a w przyjemniej jednej z dwóch pozostałych par boków przyległych boki w tej parze są równe. Uzasadniliśmy również, że z dowolnych takich sześciokątów da się utworzyć parkietaż izohedralny typu IH5.

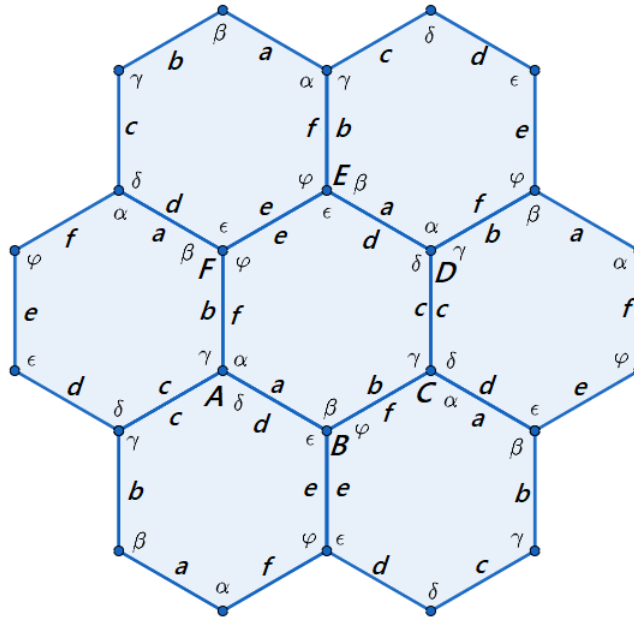
4.6 Typ IH6

Przypomnijmy diagram sąsiadowania dla parkietazu typu IH6 (patrz Rysunek 77).

Z Faktu 19 wnioskujemy, że boki w parach połączonych łukami na diagramie sąsiadowania są równe. Nie jest do końca jasne, czy zachodzi jakiś dodatkowy warunek dotyczący miar kątów. Aby to rozstrzygnąć wykonamy schematyczny rysunek sześciokątnej płytki i płytek z nią sąsiadujących (patrz Rysunek 78).



Rysunek 77: Diagram sąsiadowania dla parkietazu typu IH6



Rysunek 78: Schematyczny rysunek fragmentu parkietazu typu IH6

Zauważmy, że w wierzchołkach A, C i D spotykają się kąty o miarach α, γ, δ , więc $\alpha + \gamma + \delta = 360^\circ$. W wierzchołkach B, E, F spotykają się kąty o miarach β, ϵ, φ , stąd $\beta + \epsilon + \varphi = 360^\circ$. Drugi warunek dotyczący miar kątów jest konsekwencją warunku pierwszego, bo wiemy, że suma miar kątów wewnętrznych dowolnego sześciokąta wynosi 720° .

Fakt 44. *Dla płytki o kształcie dowolnego sześciokąta $ABCDEF$, w którym boki AB i DE są równe oraz boki BC i AF również mają tę samą długość oraz zachodzi warunek $|\angle FAB| + |\angle BCD| + |\angle CDE| = 360^\circ$, istnieje parkietaż izohedralny typu IH6.*

Rozważmy fragment parkietazu złożony z czterech sześciokątnych płytek spełniających warunki Faktu 44 (patrz Rysunek 79).

Analogicznie jak poprzednio, chcemy uzasadnić, że zaprezentowany na Rysunku 79 czternastokąt to w pewnym sensie sześciokąt $AGJKNF$, którego boki zostały odpowied-



Przypomnijmy, że zgodnie z Twierdzeniem 12, oznaczenie kropki na środku boku ze znakiem $+$ na diagramie sąsiadowania oznacza, że symetrią parkietażu przekształcającą płytkę na sąsiednią przylegającą przez ten bok jest półobrót względem środka wspólnego boku tych płytek. Możemy wobec tego stwierdzić, że sześciokąt $CGHIPD$ powstaje z sześciokąta $ABCDEF$ w wyniku półobrotu względem środka boku CD oznaczonego na rysunku jako S (i odwrotnie). Podobnie sześciokąt $PIJKLM$ powstaje w wyniku półobrotu sześciokąta $EDPMNO$ względem środka boku MP oznaczonego jako S' (i odwrotnie). Możemy już teraz przystąpić do właściwej części dowodu.

- Równość odpowiednich odcinków łamanych $ABCG$ i $NMLK$ wynika z równości odcinków o etykietach a i d oraz c i f .
- Odcinek AB jest przekształcany przez półobrot względem S na odcinek PI do niego równoległy, zaś odcinek PI przez półobrot wokół S' jest przekształcany na odcinek NM równoległy do PI , stąd $AB \parallel NM$.
- Półobrot wokół S przekształca odcinek BC na odcinek DP , natomiast półobrot wokół S' przekształca bok DP na odcinek ML . Z własności półobrotu $BC \parallel ML$.

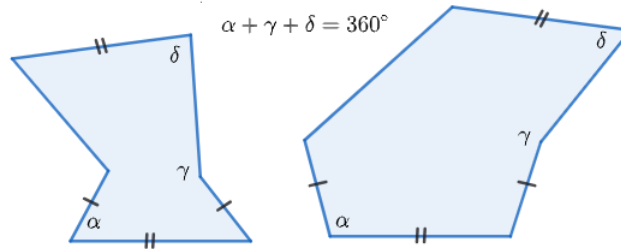
- Odcinek CG względem półobrotu wokół S jest przekształcany na ED , zaś w wyniku półobrotu wokół S' odcinek ED jest przekształcany na LK , zatem $CG \parallel LK$

Z powyższych rozważań wynika, że zielone łamane $ABCG$ i $NMLK$ są równoległe. Podobnie dowodzimy równoległości łamanych $FEON$ i $GHIJ$. Tutaj już zastosujemy zapis bardziej symboliczny. Równość odpowiednich odcinków łamanych jest oczywista.

- $FE \xrightarrow{O_{S,180^\circ}} GH$, czyli $FE \parallel GH$
- $OE \xrightarrow{O_{S',180^\circ}} KJ$, czyli $OE \parallel KJ$, zaś z równości kątów naprzemianległych $|\angle KJI| = \gamma = 360^\circ - (\alpha + \delta) = |\angle JIH|$ (miary kątów α, γ, δ sumują się do 360°) wynika, że $KJ \parallel IH$, czyli również $OE \parallel IH$.
- $ON \xrightarrow{O_{S',180^\circ}} IJ$, czyli $ON \parallel IJ$.

To uzasadnia fakt, że łamane $FEON$ i $GHIJ$ są równoległe. Pozostaje jedynie uargumentować, że odcinki FA i KJ są równoległe (równość długości oczywista). Zwróćmy uwagę, że $FA \xrightarrow{O_{S,180^\circ}} IH$, więc $FA \parallel IH$, a równoległość odcinków IH i KJ już uzasadniliśmy wcześniej. To kończy dowód tego, że czternastokąt ma pożądaną przez nas kształt. Stosując odpowiednie translacje do czternastokąta $ABCGHIJKLMNOEF$ (wraz z jego podziałem na cztery sześciokąty) otrzymamy parkietaż płaski typu IH6.

Zauważmy, że płytka parkietażu typu IH6 może mieć również kształt sześciokąta wklęsłego. Potencjalne wklęsłe płytki parkietażu typu IH6 zostały zaprezentowane na Rysunku 80.

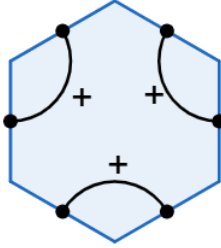


Rysunek 80: Przykładowe wklęsłe płytki parkietażu typu IH6

Uzasadniliśmy zatem, jaki zakres kształtów ma płytka w parkietażu typu IH6 oraz to, że z takich płytek możemy utworzyć parkietaż izohedralny typu IH6.

4.7 Typ IH7

Przypomnijmy diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH7 (patrz Rysunek 81).



Rysunek 81: Diagram sąsiadowania dla parkietażu typu IH7

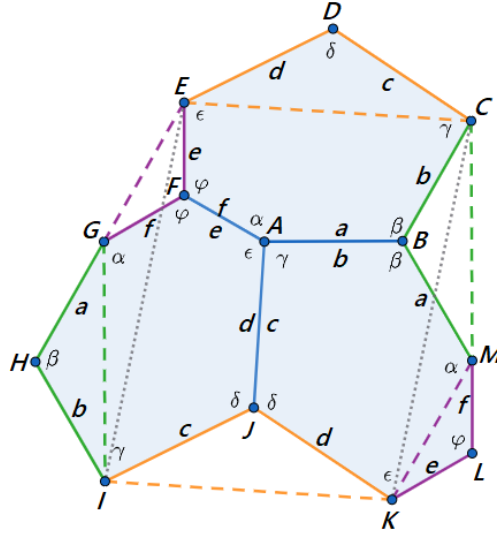
Z Twierdzenia 14 wiemy, że połączenie sąsiednich boków łukiem ze znakiem plus oznacza, że izometrią przekształcającą płytkę na sąsiednią jest obrót wokół wspólnego wierzchołka tych boków. Ponieważ wszystkie parkietaże izohedralne o niesymetrycznych sześciokątnych płytkach mają typ walencyjny $[3, 3, 3, 3, 3, 3]$, to oznacza, że w każdym wierzchołku parkietażu typu IH7 spotykają się 3 płytki. Wobec tego w każdym wierzchołku, wokół którego wykonujemy obrót, spotykają się 3 takie same kąty, zatem miara każdego z nich wynosi 120° . Zatem płytka parkietażu typu IH7 ma kształt sześciokąta, który ma trzy pary sąsiednich boków równych a każdy z trzech kątów między bokami równej długości ma miarę 120° .

Fakt 45. *Dla płytki o kształcie dowolnego sześciokąta, który ma trzy pary boków sąsiednich równej długości a każdy z trzech kątów między bokami równej długości ma miarę 120° , istnieje parkietaż izohedralny typu IH7.*

Rozważmy fragment parkietażu składający się z trzech płytek (patrz Rysunek 82), w którym boki o etykietach $a-b, c-d, e-f$ w tych parach są równe oraz zachodzi $\beta = \delta = \varphi = 120^\circ$. Trzy płytki tworzące ten fragment rzeczywiście spotykają się wokół wierzchołka A w ukazany sposób, gdyż wiedząc, że suma kątów wewnętrznych w sześciokącie wynosi 720° , otrzymujemy zależność $\alpha + \gamma + \epsilon = 720^\circ - (\beta + \delta + \varphi) = 720^\circ - 3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$

Będziemy chcieli uzasadnić, że sześciokąt $IKMCEG$ oznaczony na Rysunku 82 przerywanymi liniami na przeciwległe boki równe i równoległe.

Zauważmy, że z cechy przystawania bok-kąt-bok wynika przystawanie następujących par trójkątów: trójkąt IKJ przystaje do trójkąta ECD (pomarańczowe trójkąty), trójkąt KLM przystaje do trójkąta GFE (fioletowe trójkąty) oraz trójkąt MCB przystaje do trójkąta IGH (zielone trójkąty). Z przystawania tych trójkątów wynika równość przerywanych odcinków oznaczonych tymi samymi kolorami. Stąd sześciokąt $IKMCEG$ ma przeciwległe boki równe. Równoległość boków oznaczonych liniami nieprzerywanymi w powyższych pa-



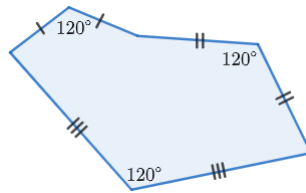
Rysunek 82: Fragment parkietazu typu IH7

rach trójkątów przystających implikuje równoległość przeciwległych par boków sześciokąta $IKMCEG$. Uzasadnimy to krótko.

Zwróćmy uwagę na to, że $|\angle IGE| = \alpha - |\angle IGH| + |\angle FGE| = \alpha - 30^\circ + 30^\circ = \alpha$ oraz $|\angle KMC| = \alpha - |\angle KML| + |\angle BMC| = \alpha - 30^\circ + 30^\circ = \alpha$. Stąd wynika, że trójkąty KMC oraz IGE są przystające, czyli czworokąt $IKCE$ jest równoległobokiem, czyli odcinki IK i EC są równoległe. Równoległość fioletowych przerywanych odcinków wynika z równości kątów IKM oraz CEG , zaś zielonych z równości kątów KIG oraz MCE .

Wobec tego przesuwając dwunastokąt $IJKLMBCDEFGH$ (wraz z jego podziałem na 3 sześciokąty) o całkowite wielokrotności wektora $\vec{JD}$ oraz wektora $\vec{HB}$ możemy kontynuować wypełnianie płaszczyzny tymi sześciokątami w nieskończoność.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że płytki parkietazu typu IH7 może mieć kształt sześciokąta wklęsłego. Przykładowa taka płytka została zaprezentowana na Rysunku 83.



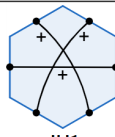
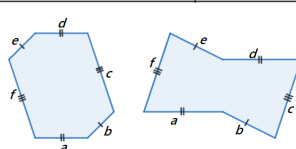
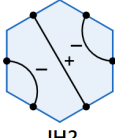
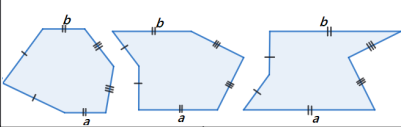
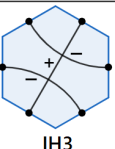
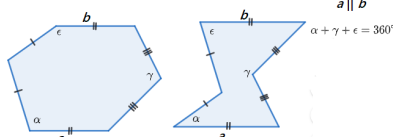
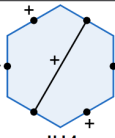
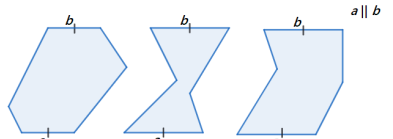
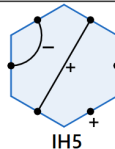
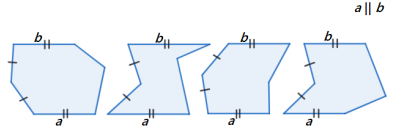
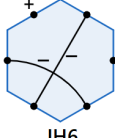
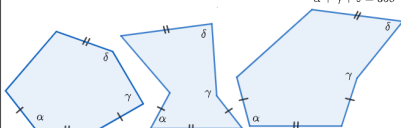
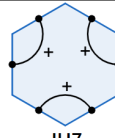
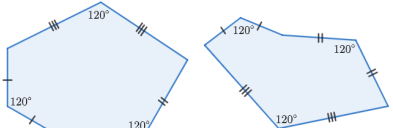
Rysunek 83: Przykładowa wklęsła płytka parkietazu typu IH7

Uzasadniliśmy zatem, że płytka parkietazu typu IH7 ma kształt dowolnego sześciokąta, który ma trzy pary boków sąsiednich równej długości a każdy z trzech kątów między bokami równej długości ma miarę 120° oraz to, że z dowolnych takich płytek da się utworzyć parkietaz izohedralny typu IH7.

Tym oto typem zakończyliśmy analizę kształtów płytek w parkietażach izohedralnych o niesymetrycznych sześciokątnych płytkach.

4.8 Parkietaże sześciokątne – podsumowanie

Dokonajmy podsumowania naszych rozważań dotyczących parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych sześciokątnych płytkach. Zestawienie zakresów kształtów płytek w poszczególnych parkietażach wraz z uwzględnieniem możliwych przypadków płytek wklęsłych zostało zaprezentowane na Rysunku 84.

Typ parkietażu	Kształt płytki
 IH1	 $a \parallel d$ $b \parallel e$ $c \parallel f$
 IH2	 $a \parallel b$
 IH3	 $a \parallel b$ $\alpha + \gamma + \epsilon = 360^\circ$
 IH4	 $a \parallel b$
 IH5	 $a \parallel b$
 IH6	 $\alpha + \gamma + \delta = 360^\circ$
 IH7	

Rysunek 84: Zestawienie zakresów kształtów płytek dla parkietaży o płytkach sześciokątnych

5 Dodatek

W tym dodatku udowodnimy twierdzenia pomocnicze sformułowane pod koniec Rozdziału 1, a dokładniej Twierdzenia 12, 13, 14 i 16. Z twierdzeń tych korzystaliśmy wielokrotnie w rozumowaniach prowadzonych w Rozdziałach 3 i 4.

Dowód najczęściej stosowanego Twierdzenia o translacji (Twierdzenia 16) wykonamy zarówno dla parkietaży czworokątnych jak i sześciokątnych. Dowody pozostałych twierdzeń przeprowadzimy dla parkietaży czworokątnych. Dla parkietaży o płytkach sześciokątnych te dowody są analogiczne.

5.1 Dowód twierdzenia o translacji

Zacznijmy od dowodu najczęściej stosowanego w tej pracy Twierdzenia 16, w którym będziemy korzystać ze wzoru Eulera.

Wzór Eulera dla grafów planarnych, czyli skończonych grafów spójnych zanurzonych w płaszczyznę, wygląda następująco: $W - K + S = 2$, gdzie W to liczba wierzchołków grafu, K to liczba krawędzi grafu, zaś S to liczba „ścian”, czyli fragmentów, na które graf dzieli płaszczyznę, wliczając w to nieograniczony fragment „wszechścianę”. Zwięzły i klarowny dowód tego twierdzenia Czytelnik może znaleźć w [4].

Grafem planarnym jest w szczególności *parkietaż skończony*. Sprecyzujmy, co rozumiemy pod tym pojęciem.

Definicja 46. *Parkietaż skończony to fragment parkietażu płaszczyzny ograniczony łamaną zamkniętą utworzoną z krawędzi tego parkietażu, wraz ze wszystkimi płytkami zawartymi wewnątrz obszaru ograniczonego tą łamaną.*

Ściany parkietażu skończonego dzielimy na ograniczone, czyli płytki tego parkietażu oraz nieograniczony fragment nazwany przez nas wszechścianą. Wzór Eulera uwzględnia tę wszechścianę otaczającą parkietaż, którą nie chcemy nazywać ścianą. Zatem zmodyfikowany wzór Eulera dla skończonego parkietażu przyjmuje następującą postać:

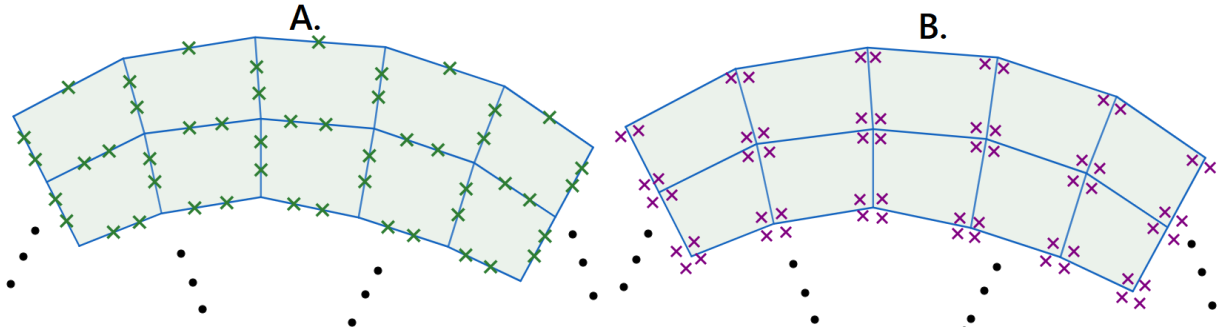
$$W - K + S = 1, \tag{5.1}$$

gdzie S oznacza już liczbę płytek skończonego parkietażu.

Dowód Twierdzenia 16 dla parkietaży o płytkach czworokątnych. Niech będą dane dwie czworokątne płytki P_1 i P_2 przylegające do siebie przez bok o etykietce a w płytce P_2 . Niech bok o etykietce a w płytce P_1 nie ma wspólnego wierzchołka z bokiem o etykietce a w płytce P_2 (patrz Rysunek 7A). Niech T będzie jedyną symetrią parkietażu przekształcającą płytkę P_1 na P_2 .

Znak plus $+$ oznacza zachowywanie orientacji. Izometriami zachowującymi orientację są translacje i obroty. Gdyby T było obrotem, to wykonując odpowiednio wiele razy ten obrót

otrzymamy cykl płytek parkietażu. Ten cykl ogranicza pewien parkietaż skończony, który będzie rozważanym przez nas grafem planarnym, dla którego prawdziwy jest zmodyfikowany wzór Eulera. Ten graf planarny jest grafem złożonym z krawędzi płytek parkietażu wypełniającego na płaszczyźnie dość duży wielokąt P . Niech n oznacza liczbę czworokątów na brzegu wielokąta P , S – liczbę ścian parkietażu (czyli czworokątów tworzących parkietaż), W – liczbę wierzchołków parkietażu, K – liczbę krawędzi parkietażu.



Rysunek 85: Fragment cyklu powstały w wyniku wielokrotnego obrotu

- Każda ściana ma 4 krawędzie. Zliczając krawędzie jako 4-krotność liczby ścian, prawie każda krawędź zostanie zliczona dwukrotnie (patrz Rysunek 85A). Tylko krawędzie na brzegu wielokąta P zostaną zliczone jednokrotnie. Zatem, gdybyśmy do 4-krotności liczby ścian dodali jeszcze n , to wszystkie krawędzie będą zliczone 2-krotnie. Możemy tę zależność wyrazić poniższą równością.

$$4S + n = 2K \quad (5.2)$$

- Każda ściana ma 4 wierzchołki. Zliczając wierzchołki jako 4-krotność liczby ścian, prawie każdy wierzchołek zostanie zliczony 4-krotnie. Tylko wierzchołki na brzegu zostaną policzone 2-krotnie (patrz Rysunek 85B). Gdy do 4-krotności liczby ścian dodamy jeszcze $2n$ (2-krotność liczby wierzchołków na brzegu), to otrzymamy 4-krotność liczby wierzchołków. Wobec tego możemy zapisać następującą zależność.

$$4S + 2n = 4W \quad (5.3)$$

Z równości (5.2) wynika, że $K = 2S + \frac{n}{2}$, a z równości (5.3) otrzymujemy, że $W = S + \frac{n}{2}$. Wstawiając do wzoru (5.1), mamy

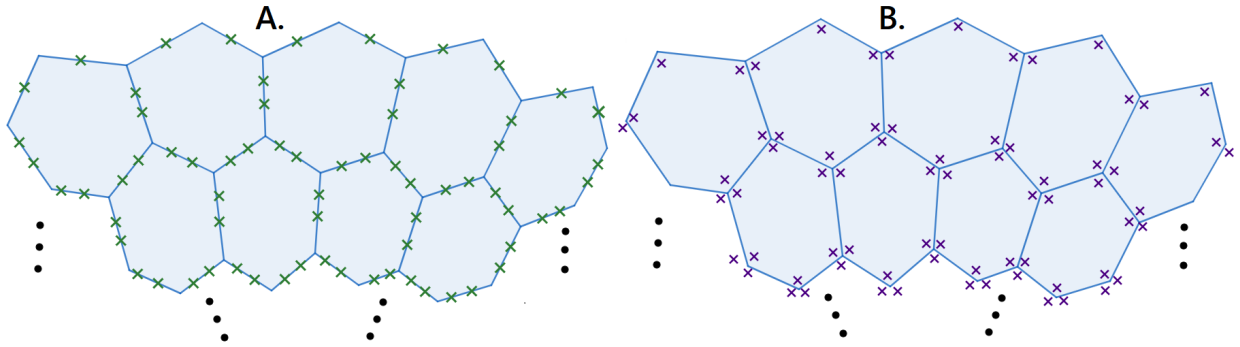
$$S + \frac{n}{2} - 2S - \frac{n}{2} + S = 1,$$

czyli $0 = 1$, co daje nam sprzeczność. Wnioskujemy zatem, że symetria parkietażu T nie może być obrotem, zatem musi ona być translacją.

Odcinek o etykiecie a w płytce P_1 jest przekształcany przez translację na odcinek o etykiecie a w płytce P_2 . Z własności translacji te odcinki są równe i równoległe. $\square$

Do rozważenia pozostaje nam sytuacja, gdy płytki parkietu mają kształt sześciokątów. Ponieważ na Rysunku 58 zostały zaprezentowane wszystkie możliwe diagramy parkietu izohedralnych o niesymetrycznych sześciokątnych płytkach, jest tylko jedna sytuacja, gdy symetria parkietu zachowująca orientację przeprowadza bok na inny, niesąsiadujący z wyjściowym bokiem, a mianowicie przeprowadza bok na bok przeciwległy. Idea dowodu jest taka sama jak poprzednio, lecz kluczowe zależności są nieco inne.

Dowód Twierdzenia 16 dla parkietu o płytkach sześciokątnych. Niech będą dane dwie sześciokątne płytki P_1 i P_2 przylegające do siebie przez bok o etykiecie a w płytce P_2 . Niech bok o etykiecie a w płytce P_1 będzie bokiem przeciwległym do wspólnego boku płytek P_1 i P_2 . Niech T będzie jedyną symetrią parkietu przekształcającą płytkę P_1 na P_2 . Ponieważ T zachowuje orientację, więc T jest translacją lub obrotem. Gdyby T było obrotem, to wykonując odpowiednio wiele razy ten obrót otrzymamy cykl płytek parkietu. Ten cykl ogranicza pewien parkiet skończony, który będzie rozważanym przez nas grafem planarnym. Stosując oznaczenia W, K, S, P tak samo jak poprzednio, zaś oznaczając przez n liczbę sześciokątów na brzegu cyklu możemy wysnuć następujące wnioski.



Rysunek 86: Fragment cyklu

- Każda ściana ma 6 krawędzi. Zliczając krawędzie jako 6-krotność liczby ścian, prawie każda krawędź zostanie zliczona dwukrotnie (patrz Rysunek 86A). Tylko krawędzie na brzegu wielokąta P zostaną zliczone jednokrotnie. Zatem, gdybyśmy do 6-krotności liczby ścian dodali jeszcze $2n$ (bo po dwie krawędzie każdego sześciokąta nie zostały zliczone podwójnie), to wszystkie krawędzie będą zliczone 2-krotnie. Możemy tę zależność wyrazić poniższą równością.

$$6S + 2n = 2K \quad (5.4)$$

- Każda ściana ma 6 wierzchołków. Zliczając wierzchołki jako 6-krotność liczby ścian, prawie każdy wierzchołek zostanie zliczony 3-krotnie, a dokładniej wszystkie wierzchołki wewnętrzne zostaną zliczone 3-krotnie. Tylko wierzchołki na brzegu zostaną zliczone 2-krotnie lub 1-krotnie (patrz Rysunek 86B). Co drugi wierzchołek na brzegu (ten "wystający") jest zliczany 1-krotnie, zaś co drugi wierzchołek brzegowy (ten "niewystający") jest liczony 2-krotnie. Gdy do 6-krotności liczby ścian dodamy jeszcze $2n$ (tyle brakuje, aby "wystające" wierzchołki brzegowe zostały zliczone 3-krotnie) oraz jeszcze n (aby "niewystające" wierzchołki brzegowe też były liczone 3-krotnie), to otrzymamy 3-krotność liczby wszystkich wierzchołków. To daje nam następującą zależność.

$$6S + 2n + n = 3W \quad (5.5)$$

Z równości (5.4) mamy, że $K = 3S + n$, a z równości (5.5) wynika, że $W = 2S + n$. Podstawiając to do zmodyfikowanego wzoru Eulera, mamy

$$2S + n - 3S - n + S = 1,$$

co sprowadza się do równości $0 = 1$, więc otrzymaliśmy sprzeczność. Wobec tego symetria T nie może być obrotem, zatem musi ona być translacją. Z własności translacji odcinki o etykietach a są równe i równoległe. $\square$

5.2 Dowód twierdzenia o obrocie

W dowodzie tego oraz kolejnych twierdzeń skorzystamy z pojęcia *punktu stałego*.

Definicja 47. *Punkt stały, to punkt, którego obrazem w wyniku przekształcenia jest on sam.*

Uwaga 48. *Punkty stałe izometrii.*

- *Translacja i symetria z poślizgiem nie mają punktów stałych.*
- *Punktem stałym obrotu jest punkt, wokół którego wykonujemy obrót.*
- *Zbiorem punktów stałych w symetrii osiowej jest oś symetrii.*

Dowód Twierdzenia 14. Niech będą dane dwie czworokątne płytki P_1 i P_2 przylegające do siebie przez bok o etykietce a w płytce P_2 . Niech bok o etykietce a ma dokładnie jeden wspólny wierzchołek z bokiem o etykietce a w płytce P_2 (patrz Rysunek 6A). Niech T będzie jedyną symetrią parkietaża przekształcającą płytkę P_1 na P_2 . Izometria T zachowuje orientację, więc jest ona obrotem lub translacją.

Zwróćmy uwagę na to, że obrazem boku o etykiecie a w P_1 jest odcinek do niego nierównoległy (wtedy czworokąt degradowałby się do trójkąta). Zatem T nie może być translacją, gdyż odcinek powstały w wyniku translacji jest równoległy do wyjściowego. Wobec tego symetria parkietazu T jest obrotem. Ponadto, punkt wspólny odcinków z etykietą a jest punktem stałym tego przekształcenia, więc T jest obrotem wokół wspólnego wierzchołka boków z etykietą a . Ponieważ obrót zachowuje długości, więc te boki są równe. $\square$

5.3 Dowód twierdzenia o półobrocie

Dowód Twierdzenia 12. Niech będą dane dwie czworokątne płytki P_1 i P_2 przylegające do siebie przez bok o etykiecie a zarówno w płytce P_1 jak i P_2 (patrz Rysunek 5A). Wspólne wierzchołki płytek P_1 i P_2 oznaczmy jako A i B , a środek wspólnego boku AB przez S . Niech T będzie jedyną symetrią parkietazu przekształcającą płytkę P_1 na P_2 . Izometria T zachowuje orientację, więc jest ona obrotem lub translacją.

Zauważmy, że obrazem punktu A jest punkt B , zaś obrazem punktu B jest punkt A . Izometria zachowuje odległości, więc obrazem punktu S jest punkt S , zatem środek odcinka AB jest punktem stałym tego przekształcenia, więc T jest obrotem, bo translacja nie ma punktów stałych. Ponieważ obrazem jednego końca odcinka jest drugi koniec, więc kąt tego obrotu wynosi 180° . $\square$

5.4 Dowód twierdzenia o odbiciu

Dowód Twierdzenia 13. Niech będą dane dwie czworokątne płytki P_1 i P_2 przylegające do siebie przez bok o etykiecie a zarówno w płytce P_1 jak i P_2 (patrz Rysunek 5B). Wspólne wierzchołki płytek P_1 i P_2 oznaczmy jako A i B . Niech T będzie jedyną symetrią parkietazu przekształcającą płytkę P_1 na P_2 . Izometria T zmienia orientację, więc jest ona symetrią osiową lub symetrią z poślizgiem.

Zauważmy, że obrazem punktu A jest punkt A , a obrazem punktu B jest punkt B . Zatem są przynajmniej dwa punkty stałe, to znaczy, że T jest symetrią osiową. Punkty A i B leżą na osi symetrii, więc wspólny bok płytek zawiera się w osi tej symetrii. $\square$

Literatura

- [1] P. Gielgier, *Klasyfikacja zakresów kształtów płytek w wielokątnych parkietach izohedralnych o niesymetrycznych płytkach*, praca magisterska, Uniwersytet Wrocławski, 2020.
- [2] C. S. Kaplan, *Introductory Tiling Theory for Computer Graphics*, Morgan&Claypool Publishers, 2009.
- [3] Branko Grünbaum & G. C. Shephard, *Tilings & Patterns*, Dover Publications Inc., 2016.
- [4] Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, Pearson Education, 2001.