Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Beata Zwierzańska

Równoważność przez rozkład graniastosłupów

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2005

Składam serdeczne podziękowania panu
prof. dr hab. Jackowi Świątkowskiemu
za pomoc i wszelki wskazówki,
których udzielił mi podczas pisania tej pracy.

<u>Spis treści:</u>

WSTĘP

Tematem niniejszej pracy jest równoważność przez rozkład graniastosłupów, ale konieczne jest przytoczenie najpierw wiadomości dotyczących analogicznego pojęcia dla figur na płaszczyźnie. I tak, dwa wielokąty W i V nazywamy równoważnymi przez rozkład (będziemy to zdanie zapisywać: $W \equiv V$), jeżeli można je podzielić na jednakową liczbę wielokątów parami do siebie przystających. Oznacza to, że takie wielokąty W i V można podzielić na mniejsze wielokąty $W_1, W_2, ..., W_n$ i $V_1, V_2, ..., V_n$ odpowiednio, w ten sposób, że $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2$, ..., $W_n = V_n$ (symbol „=” oznacza przystawanie).

Już od dawna, Euklides również korzystał z tego faktu, wiedziano, że jeżeli dwa wielokąty są równoważne przez rozkład, to mają równe pola. Trudniejsza okazała się odpowiedź na pytanie, czy wielokąty o równych polach są równoważne przez rozkład. Na tę odpowiedź czekano aż do XIX wieku. Niezależnie od siebie, otrzymali ją w 1832r. Farkas Bolyai i w 1833r. P. Gerwien. Odpowiedź ta, znana jest obecnie jako następujące twierdzenie:

Twierdzenie Bolyaia – Gerwiena: Dwa wielokąty mające równe pola są równoważne przez rozkład.

Wkrótce po uzyskaniu tego rezultatu zaczęto się zastanawiać nad analogicznym problemem dla wielościanów. W 1900r. na II Światowym Kongresie Matematyki w Paryżu jednym ze sformułowanych przez Davida Hilberta problemów było to, czy wielościany W i V mające równe objętości są równoważne przez rozkład (dokładniej, czy można podzielić W na wielościany $W_1, W_2, ..., W_n$, zaś V na wielościany $V_1, V_2, ..., V_n$ tak, że $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2$, ..., $W_n = V_n$). Bardzo szybko, bo w tym samym roku, został przedstawiony przez Maxa Dehna dowód udzielający negatywnej odpowiedzi na problem postawiony przez Hilberta. Dowód ten nie został od razu opublikowany ponieważ był zbyt długi i czytelny tylko dla specjalistów. Aby dowiedzieć się jak długo upraszczano ten dowód i jakim cieszył się zainteresowaniem ten problem polecam sięgnięcie do książki Michała Szurka, pt. „Opowieści matematyczne” - [1] oraz do książki, pt. „Problemy Hilberta” – [2], wydanej przez Instytut Historii Nauki PAN.

Zgodnie z dowodem Dehna dwa wielościany o równej objętości nie muszą być równoważne przez rozkład. Przykładem takich wielościanów są czworościan foremny i sześcian, które pomimo jednakowych objętości, nie są równoważne przez rozkład. Więcej przykładów wraz z dowodami można znaleźć w książce pt. „Ciekawy czworościan" Anieli Ehrenfeucht – [3].

Można jednak zastanowić się, czy pewne rodzaje wielościanów o jednakowej objętości są równoważne przez rozkład.

W tej pracy przeanalizuję wszystkie rodzaje graniastosłupów i pokażę, że dla tych właśnie wielościanów uzyskujemy pozytywną odpowiedź na problem Hilberta.

W pierwszym rozdziale będę udowadniała równoważność przez rozkład poszczególnych graniastosłupów. Kluczem do tego będzie podział tych graniastosłupów na bryły odpowiednio do siebie przystające. Przypomnę, że dwie bryły są przystające, jeżeli istnieje izometria przeprowadzająca jedną z brył na drugą. W pierwszych trzech podrozdziałach będę korzystała wyłącznie z izometrii parzystych, czyli z przesunięć lub obrotów. W czwartym podrozdziale użyję izometrii nieparzystej, czyli symetrii środkowej, która jest złożeniem obrotu i lustrzanego odbicia. Zakończeniem tego rozdziału będzie dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1: Dwa graniastosłupy o dowolnych podstawach i równej objętości są równoważne przez rozkład.

W dowodzie tego twierdzenia będę korzystać z lustrzanych odbić (lub inaczej izometrii nieparzystych), dlatego kolejnym rozważanym problemem będzie to, czy wielościany lustrzanie symetryczne są równoważne przez rozkład, bez użycia lustrzanych odbić. Taką równoważność przez rozkład definiujemy następująco:

Definicja: Wielościany W i V są równoważne przez rozkład bez lustrzanych odbić, jeżeli W można podzielić na wielościany W_1, W_2, ..., W_n i V można podzielić na wielościany V_1, V_2, ..., V_n w taki sposób, że dla każdej pary W_i, V_i wielościanów podziału, gdzie $i = 1, 2, ..., n$; istnieje izometria parzysta przeprowadzająca W_i na V_i.

Można zatem zastanawiać się, czy graniastosłupy o równej objętości są równoważne przez rozkład bez lustrzanych odbić. Taka równoważność przez rozkład oznaczałaby fizyczną możliwość rozcinania i składania brył. Przy takim zabiegu używamy wyłącznie izometrii parzystych, czyli przesunięć i obrotów. Rozważaniem i analizą tych problemów zajmę się w drugim rozdziale tej pracy, a dokładniej udowodnię następujące twierdzenia:

Twierdzenie 2: Wielościany lustrzanie symetryczne są równoważne przez rozkład bez użycia lustrzanych odbić.

Twierdzenie 3: Graniastosłupy o równej objętości są równoważne przez rozkład bez lustrzanych odbić.

W całej pracy kilkakrotnie będę korzystała z twierdzenia mówiącego, że równoważność graniastosłupów przez rozkład jest relacją przechodnią, dlatego na zakończenie,
w Dodatku, udowodnię to twierdzenie.

ROZDZIAŁ 1

Głównym celem tego rozdziału jest udowodnienie, że dwa graniastosłupy o tej samej objętości są równoważne przez rozkład. Zaczniemy od pokazania równoważności przez rozkład graniastosłupów prostokątnych o jednakowej wysokości, następnie przeanalizujemy prostopadłościany, równoległościany oraz graniastosłupy trójkątne, co ostatecznie doprowadzi nas do udowodnienia twierdzenia o równoważności przez rozkład dwóch graniastosłupów o dowolnej podstawie i wysokości, ale tej samej objętości.

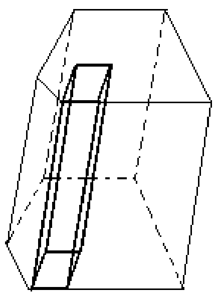
1.1. Graniastosłupy prostokątne o jednakowych wysokościach.

W tym podrozdziale udowodnimy następujący fakt:

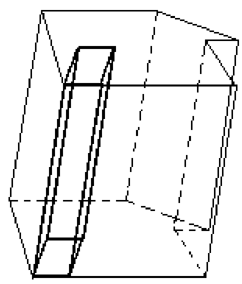
Fakt 1.1.: Graniastosłupy prostokątne o takiej samej objętości i takiej samej wysokości są równoważne przez rozkład.

Weźmy zatem dwa graniastosłupy prostokątne **I** i **II** o dowolnych podstawach, mające równe objętości i równe wysokości.

I



II



Zauważmy, że pola podstaw P_{I} i P_{II} są równe: z $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}}$ wynika, że $P_{\mathrm{I}} \cdot H = P_{\mathrm{II}} \cdot H$, a stąd otrzymujemy, że $P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{II}}$.

Z twierdzenia Bolyaia - Gerwiena wynika, że wielokąty W_{I} i W_{II}, które są podstawami odpowiednio graniastosłupa I i II, są równoważne przez rozkład. Dzielimy zatem podstawę graniastosłupa I na wielokąty $W_1, W_2, \ldots, W_n$, a podstawę graniastosłupa II na wielokąty V_1, V_2, ...,V_n. Następnie „rozcinamy” graniastosłup I płaszczyznami prostopadłymi do podstawy, zawierającymi krawędzie tych wielokątów. Po takim podziale graniastosłup I jest zbudowany z n graniastosłupów również prostokątnych.

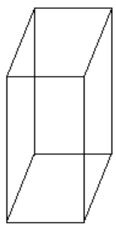
Niech W_i będzie wielokątem podziału podstawy graniastosłupa I, a P_i odpowiadającym temu wielokątowi graniastosłupem prostokątnym. Podobnie Q_i graniastosłupem prostokątnym odpowiadającym wielokątowi V_i. Jeśli $W_i \equiv V_i$, to $P_i \equiv Q_i$ (ponieważ podstawy są przystające, a wysokości równe).

Jak widzimy dwa graniastosłupy prostokątne o jednakowej objętości i wysokości można podzielić na tę samą liczbę wielościanów odpowiednio do siebie przystających, zatem zgodnie z definicją są one równoważne przez rozkład.

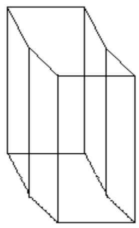
Przykład:

Mamy dwa graniastosłupy A i B o tej samej objętości i wysokości.

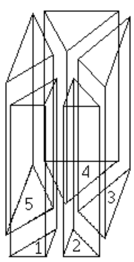
A



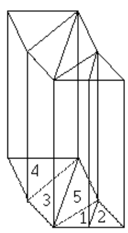
B



Żeby sprawdzić, czy są one równoważne przez rozkład wystarczy pokazać, że z wielościanów otrzymanych po podziale graniastosłupa A można zbudować graniastosłup B. Musimy podzielić podstawy obu graniastosłupów tak, aby otrzymać tę samą liczbę wielokątów odpowiednio do siebie przystających. Taki podział jest możliwy ponieważ z równość wysokości oraz objętości wynika równość pól podstaw, a zatem otrzymujemy równoważność przez rozkład wielokątów, które są podstawami. Dzielimy zatem podstawy na 5 wielokątów. Rozcinamy graniastosłup A płaszczyznami prostopadłymi do podstawy (rys.1). Teraz odpowiednio przesuwając (według podziału podstawy graniastosłupa B) otrzymujemy z graniastosłupa A graniastosłup B (rys. 2), a tym samym pokazujemy równoważność przez rozkład tych graniastosłupów.



rys.1



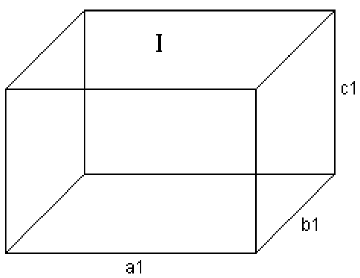
rys.2

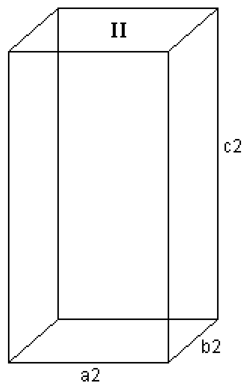
1.2. Prostopadłościany

Przeanalizujemy teraz przypadek, w którym założymy tylko równość objętości prostopadłościanów. Udowodnimy następujący fakt:

Fakt 1.2.: Prostopadłościany o jednakowej objętości są równoważne przez rozkład.

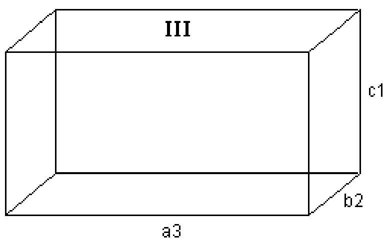
Weźmy prostopadłościanų I i II





Żeby móc skorzystać z informacji jakie do tej pory posiadamy, wprowadzimy pomocniczo prostopadłościan III, który oprócz objętości takiej jak prostopadłościan I i II, będzie miał następującą własność: jedna z krawędzi będzie równa $c1$, a druga, $b2$. Taki prostopadłościan na pewno istnieje, gdyż nietrudno obliczyć, że jego trzeci bok

będzie miał długość $a3 = \dfrac{V}{c1 \cdot b2}$



Rozpatrujemy prostopadłościan I i III.

Z założenia ich objętości są takie same, ale dodatkowo również wysokość $c1$. Zatem na mocy Faktu 1.1. są one równoważne przez rozkład.

Popatrzmy teraz na prostopadłościan II i III
Jeżeli potraktujemy $b2$ jako wysokość tych prostopadłościanów to znów na mocy Faktu 1.1. otrzymamy równoważność przez rozkład tych prostopadłościanów.

Mamy następującą sytuację: prostopadłościan I jest równoważny przez rozkład prostopadłościanowi III, a ten prostopadłościanowi II. Korzystając z przechodniości równoważności przez rozkład (dowód w Dodatku) otrzymujemy równoważność przez rozkład prostopadłościanów I i II.

Na podstawie prawdziwości Faktu 1.2. możemy sformułować następujący wniosek:

Wniosek 1.2.: Prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$ jest równoważny przez rozkład prostopadłościanowi o wymiarach $1 \times 1 \times V$, gdzie $V = a \cdot b \cdot c$ jest liczbą wyrażającą objętość prostopadłościanu $a \times b \times c$.

1.3. Równoległościany

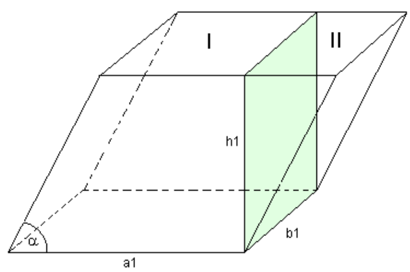
W tej części naszym celem jest udowodnienie następującego faktu:

Fakt 1.3.:Dowolny równoległościan daje się przekształcić w równoważny z nim przez rozkład prostopadłościan o takim samym polu podstawy i takiej samej wysokości.

Dowód rozbijemy na dwa przypadki. W pierwszym przypadku zakładamy, że równoległościan ma jedną parę ścian prostopadłą do podstaw, natomiast w drugim przypadku będzie to zupełnie dowolny równoległościan.

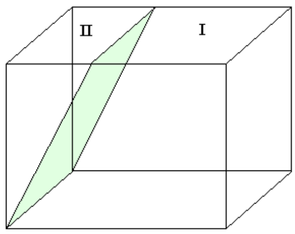
1.3.1. Równoległościan R_1, którego jedna para ścian bocznych jest prostopadła do podstawy.

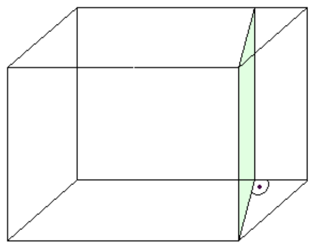
$\boldsymbol{R_1}$



rys. 3

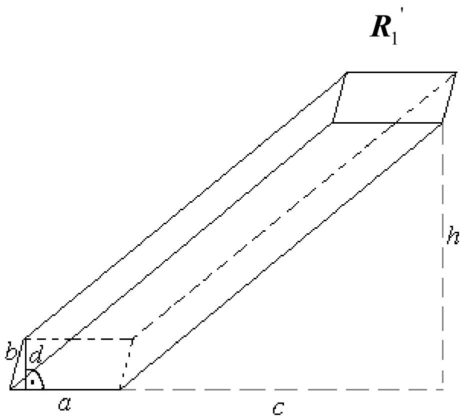
Poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny zawierającej podstawę równoległościanu R_1 w sposób przedstawiony na rysunku 3. Otrzymujemy 2 bryły. Po przesunięciu bryły II otrzymamy graniastosłup prostokątny G_1, mający jako podstawę równoległobok. Widzimy zatem, że równoległościan R_1 jest zbudowany z dwóch brył, które są przystające do dwóch brył tworzących graniastosłup G_1, a stąd wynika, że równoległościan jest równoważny graniastosłupowi, którego podstawą jest równoległobok.





Ponieważ naszym celem jest pokazanie, że równoległościan jest równoważny prostopadłościanowi musimy otrzymany graniastosłup G_1 przekształcić w prostopadłościan. Poprowadźmy zatem płaszczyznę prostopadłą do podstawy przechodzącą przez wysokość równoległoboku (będącego podstawą), łączącą jego dłuższe boki. Płaszczyzna ta podzieli nam graniastosłup na dwie brył, które po przesunięciu utworzą nam prostopadłościan. Mamy zatem następującą sytuację: równoległościan R_1 jest równoważny przez rozkład graniastosłupowi G_1, a ten równoważny przez rozkład prostopadłościanowi. Korzystając z przechodniości równoważności przez rozkład (Dodatek) otrzymujemy równoważność przez rozkład równoległościanu i prostopadłościanu.

Zwróćmy uwagę, że nie zawsze możliwe jest poprowadzenie płaszczyzny prostopadłej, tak jak na rysunku 3. Z taką sytuacją spotykamy się wtedy, gdy kąt nachylenia ścian równoległościanu do płaszczyzny podstawy jest mały, czyli gdy równoległościan jest „bardzo” pochyły, np. tak jak na rysunku 4. Wtedy musimy postąpić w sposób przedstawiony poniżej.



rys. 4

Prowadzimy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny podstawy przechodzącą przez środek wysokości tego równoległościanu. W ten sposób nasz równoległościan został podzielony na dwa identyczne równoległościany. Przesuwamy jeden z nich, np. górny, otrzymując w ten sposób równoległościan, którego krawędzie podstawy mają długość *b* i 2*a*, a jego wysokość wynosi $\frac{1}{2}h$. Tę operację powtarzamy. Postępujemy w ten sposób tak długo, aż będziemy mogli poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do podstawy przechodzącą przez krawędź podstawy dolnej i przecinającą podstawę górną.

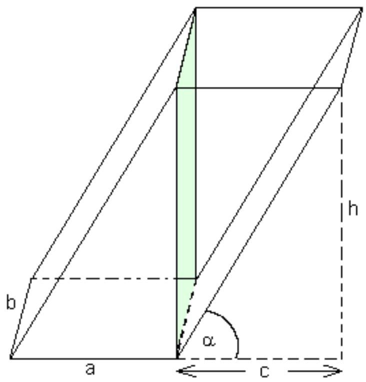
Załóżmy, że nastąpi to po *k*- tym podziale. Otrzymany w ten sposób równoległościan R_1'' będzie miał w podstawie równoległobok o krawędziach długości *b* i $2^k a$, a jego wysokość będzie wynosiła $\frac{1}{2^k}h$ oraz będzie równoważny przez rozkład równoległościanowi R_1'. Prowadzimy zatem płaszczyznę, tak jak na rysunku 3 i przekształcamy równoległościan R_1'', tak jak przekształcaliśmy równoległościan R_1. W ten sposób otrzymujemy równoważność przez rozkład równoległościanu R_1'' i prostopadłościanu P_1 o wymiarach $d \times 2^k a \times \frac{1}{2^k} h$.

Powołując się na Fakt 1.2. otrzymujemy równoważność przez rozkład prostopadłościanu P_1 ($V = d \cdot 2^k a \cdot \frac{1}{2^k} h = d \cdot a \cdot h$) i prostopadłościanu P_2 o wymiarach $d \times a \times h$ ($V = d \cdot a \cdot h$).

Ostatecznie mamy: $R_1^{'} \equiv R_1^{''}$, $R_1^{''} \equiv P_1$, $P_1 \equiv P_2$ (gdzie symbol „≡” oznacza równoważność przez rozkład). Korzystając z przechodniości równoważności przez rozkład (Dodatek) dostajemy równoważność przez rozkład równoległościanu $R_1^{'}$ i prostopadłościanu P_2.

1.3.1’. <u>Liczba cięć równoległościanu $R_1^{'}$ w zależności od jego kąta nachylenia i wysokości.</u>

W powyższym podrozdziale równoległościan $R_1^{'}$ przecinaliśmy kilkakrotnie płaszczyznami po to, by móc poprowadzić przez niego płaszczyznę, tak jak na rys. 3. Można zadać sobie pytanie ile co najmniej takich „cięć” należy wykonać oraz jak wysokość oraz kąt nachylenia do płaszczyzny podstawy wpływają na tę liczbę?



Zanim odpowiemy na te pytania zwróćmy uwagę jak zmieniają się poszczególne parametry po kolejnych cięciach. Niech c będzie parametrem „wychylenia”, czyli długością odcinka zaznaczonego na powyższym rysunku.

Liczba cięć	Wymiary podstawy	Wysokość	Wychylenie
1	$b \times 2a$	$\frac{1}{2}h$	$\frac{c}{2}$
2	$b \times 4a$	$\frac{1}{4}h$	$\frac{c}{4}$
3	$b \times 8a$	$\frac{1}{8}h$	$\frac{c}{8}$
...	...	...	...
k	$b \times 2^k a$	$\frac{1}{2^k}h$	$\frac{c}{2^k}$

Zauważmy, że płaszczyznę prostopadłą do podstaw przechodzącą przez krawędź podstawy dolnej i przecinającą podstawę górną, można poprowadzić, gdy $a \geq c$ (powyższy rysunek przedstawia sytuację dla $a = c$). Po k –tym cięciu długość boku, który początkowo wynosił a, wzrosła do $2^k a$, natomiast odległość c zmalała do $\frac{c}{2^k}$.

Podstawiając te liczby do naszego warunku otrzymujemy $2^k a \geq \frac{c}{2^k}$. Następnie c wyrażamy za pomocą kąta nachylenia i wysokości równoległościanu.

$$tg\alpha = \frac{h}{c} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{h}{tg\alpha} = h \cdot ctg\alpha t$$

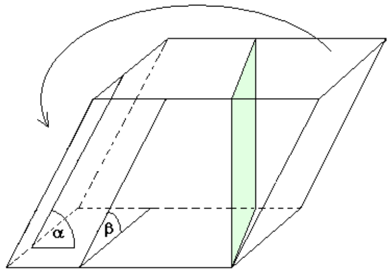
Podstawiając w miejsce c otrzymaną wartość dostajemy

$$2^k a \geq \frac{h \cdot ctg\alpha}{2}$$
$$2^{k+1} a \geq hctg\alpha$$
$$2^{k+1} \geq \frac{h}{a} ctg\alpha$$
$$k+1 \geq \log_2\left(\frac{h}{a} ctg\alpha\right)$$
$$k \geq \log_2\left(\frac{h}{a} ctg\alpha\right) - 1$$

Zatem najmniejsza liczba cięć potrzebna do przekształcenia równoległościanu R_1' wynosi: $\log_2\left(\frac{h}{a} ctg\alpha\right) - 1$

1.3.2. Dowolny równoległościan

W tym podrozdziale pokażemy, że dowolny równoległościan, a więc taki, którego ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod dowolnym kątem, jest równoważny przez rozkład prostopadłościanowi.



rys. 5

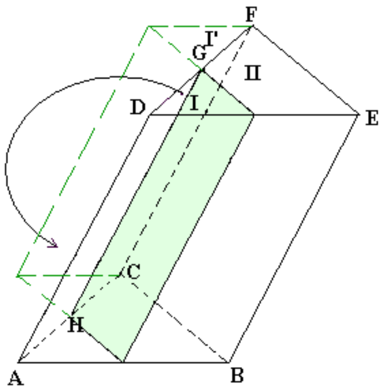
Jeżeli jest to możliwe przecinamy równoległościan płaszczyzną prostopadłą do podstawy (tak jak na rysunku 5). Otrzymaną bryłę przesuwamy w ten sposób, aby otrzymać równoległościan, którego 2 ściany są prostopadłe do podstawy, a zatem dalej postępujemy tak jak w punkcie 1.3.1. W ten sposób z równoległościanu otrzymamy graniastosłup prostokątny, czyli równoległościan będzie równoważny przez rozkład graniastosłupowi prostokątnemu.

Jeżeli obydwa kąty nachylenia są na tyle małe, że nie jest możliwe takie poprowadzenie płaszczyzny, postępujemy tak jak w punkcie 1.3.1 dla trudniejszego przypadku, a następne w sposób przedstawiony dla przypadku, w którym jedna para ścian bocznych jest prostopadła do podstaw. Zatem dowolny równoległościan możemy podzielić na pewną liczbę wielościanów, z których następnie można zbudować graniastosłup prostokątny, a to oznacza, że dowolny równoległościan jest równoważny przez rozkład graniastosłupowi prostokątnemu.

1.4. Graniastosłup trójkątny

Ostatnim krokiem przed dowodem twierdzenia 1 jest uzasadnienie następującego faktu:

Fakt 1.4.: Graniastosłup trójkątny jest równoważny równoległościanowi o takiej samej objętości i wysokości.



Aby przekształcić graniastosłup trójkątny w równoległościan przecinamy go płaszczyzną dzielącą go na dwa wielościany (I i II). Płaszczyzna ta musi być równoległa do jednej ze ścian bocznych tego graniastosłupa, np. do CBEF, oraz musi przechodzić przez środek krawędzi DF. Stosując symetrię środkową do bryły I względem punktu M, będącego środkiem odcinka HG, otrzymamy bryłę I' taką, że suma $II \cup I'$ jest równoległościanem.

1.5. Dowolny graniastosłup

Korzystając z powyższych podrozdziałów i obserwacji, których dokonaliśmy udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1: Dwa graniastosłupy o dowolnych podstawach i równej objętości są równoważne przez rozkład.

Dowód:

Weźmy dowolne dwa graniastosłupy G_1 i G_2 o jednakowej objętości. Podzielmy teraz podstawy graniastosłupa G_1 na k trójkątów, graniastosłupa G_2 na m trójkątów, a następnie budujemy na nich graniastosłupy o krawędziach bocznych równoległych do krawędzi bocznych wyjściowych graniastosłupów. W ten sposób G_1 jest zbudowany z k graniastosłupów trójkątnych, a G_2 z m graniastosłupów trójkątnych. Zgodnie z punktem 1.3.4 każdy graniastosłup trójkątny jest równoważny równoległościanowi o tej samej wysokości. Można zatem stwierdzić, że G_1 jest równoważny bryle składającej się z k równoległościanów, a G_2 równoważny bryle składającej się z m równoległościanów. Korzystając z punktu 1.3.3 mówiącym o równoważności przez rozkład równoległościanów i prostopadłościanów otrzymujemy z G_1

k prostopadłościanów, a z G_2 *m* prostopadłościanów. Następnie sprowadzamy każdy z *k* prostopadłościanów o wymiarach $a \times b \times h$, gdzie *a*, *b*, *h* – dowolne liczby, do prostopadłościanu o wymiarach $1 \times 1 \times V$, gdzie $V = a \cdot b \cdot h$ jest liczbą równą objętości prostopadłościanu $a \times b \times h$. Takie przekształcenie jest możliwe, gdyż na mocy Wniosku 1.2. wiemy, że te prostopadłościany są równoważne przez rozkład. Tak przekształcone prostopadłościany łączymy w jeden większy o wymiarach $1 \times 1 \times V_{G_1}$. Podobnie przekształcamy, a następnie łączymy *m* prostopadłościany z G_2. Ostatecznie graniastosłup G_1 jest równoważny prostopadłościanowi $1 \times 1 \times V_{G_1}$, gdzie V_{G_1} jest liczbą równą objętości graniastosłupa G_1, a G_2 jest równoważny prostopadłościanowi $1 \times 1 \times V_{G_2}$, gdzie V_{G_2} jest liczbą równą objętości graniastosłupa G_2. Ponieważ założyliśmy, że objętość tych graniastosłupów jest jednakowa (oznaczymy ją symbolem V_0) otrzymujemy, że G_1 jest równoważny prostopadłościanowi $1 \times 1 \times V_0$ i G_2 jest równoważny prostopadłościanowi $1 \times 1 \times V_0$. Korzystając z przechodniości równoważności przez rozkład otrzymujemy, że G_1 jest równoważny przez rozkład G_2.

ROZDZIAŁ 2

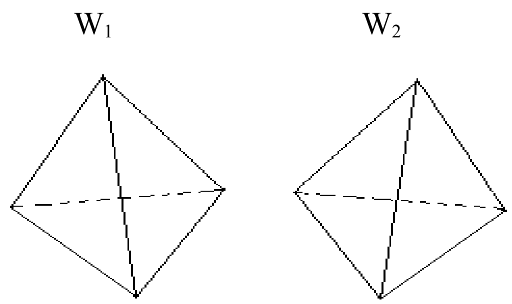
W tym rozdziale udowodnimy, że wielościany lustrzanie symetryczne są równoważne przez rozkład bez użycia lustrzanego odbicia (definicja we wstępie). Pierwszym krokiem będzie pokazanie, że czworościany lustrzanie symetryczne są równoważne przez rozkład bez lustrzanego odbicia, a następnie wykorzystanie tej informacji do dowodu ogólnego przypadku.

W poprzednim rozdziale w dowodzie Faktu 1.4. korzystaliśmy ze złożenia lustrzanego odbicia i obrotu (symetria środkowa), dlatego powrócimy również do pokazania równoważności przez rozkład graniastosłupów, ale tym razem bez korzystania z odbicia lustrzanego.

2.1. Czworościany lustrzanie symetryczne.

W tym podrozdziale udowodnimy następujący fakt:

Fakt 2.1. Dwa czworościany lustrzanie symetryczne względem siebie są równoważne przez rozkład bez użycia odbicia lustrzanego.

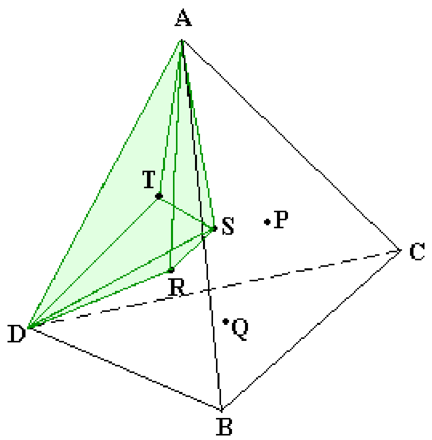


Jednym ze sposobów pokazania, że te czworościany są równoważne przez rozkład bez użycia odbicia lustrzanego jest rozłożenie każdego czworościanu na bryły, z których każda jest lustrzanie symetryczna względem pewnej płaszczyzny, która ją przecina. Będziemy mieli wtedy następującą sytuację, czworościan W_1, który jest lustrzanym odbiciem W_2 będzie jednocześnie sumą brył lustrzanie symetrycznych. Rozbijmy zatem W_1 na wielościany P_1, P_2, ..., P_k tak, aby każdy P_i był lustrzanie symetryczny. W sposób analogiczny rozbijmy W_2 na P_1', P_2', ..., P_k'. Niech Φ oznacza izometrię nieparzystą (lustrzana symetria) nakładającą W_1 na W_2, wtedy otrzymujemy

$\Phi(P_i) = P_i'$. Oznaczmy również przez Ψ_i lustrzaną symetrię P_i', czyli $\Psi_i(P_i') = P_i'$. Składając te dwa przekształcenia otrzymujemy $\Psi_i \circ \Phi(P_i) = P_i'$. Korzystając z własności izometrii, mówiącej o tym, że złożenie dwóch izometrii nieparzystych daję izometrię parzystą, wiemy, że P_i został przekształcony na P_i' bez użycia odbicia lustrzanego. Wystarczy więc znaleźć sposób rozłożenia czworościanu na bryły lustrzanie symetryczne. Sposób ten przedstawimy poniżej, w punkcie 2.2.

2.2. Rozkład dowolnego czworościanu na bryły lustrzanie symetryczne.

Niech S będzie środkiem kuli wpisanej w czworościan ABCD, a punkty P, Q, R, T punktami styczności tej kuli ze ścianami czworościanu. Łączymy wierzchołki czworościanu ze środkiem kuli i z punktami P, Q, R, T, a te z S – środkiem kuli. Jedną z powstałych w ten sposób brył jest bryła DRSTA (rys. 6). Pokaże, że bryła DRSTA jest symetryczna względem płaszczyzny DSA.



Zauważmy, że prosta zawierająca odcinek DA jest częścią wspólną płaszczyzn DAB i DAC, a punkt S leży wewnątrz kąta dwuściennego, który tworzą te płaszczyzny. Punkt R jest rzutem punktu S na płaszczyznę DAB, a punkt T rzutem punktu S na płaszczyznę DAC. Długości odcinków SR i ST są jednakowe, ponieważ jest to promień kuli. Płaszczyzna DAS jest zatem dwusieczną kąta dwuściennego w tym czworościanie o krawędzi DA. Stąd wynika, że punkty T i R są punktami symetrycznymi względem tej płaszczyzny. Stąd otrzymujemy, że cała bryła DRSTA jest symetryczna względem płaszczyzny DSA. Podobnie pozostałe bryły, które powstają w analogiczny sposób, są lustrzanie symetryczne względem odpowiednich płaszczyzn. Postępując w ten sposób pokazujemy, że dowolny czworościan ABCD jest zbudowany z 6 brył lustrzanie symetrycznych: DRSTA względem płaszczyzny ASD, ASRPB względem płaszczyzny ABS, ASTPC względem płaszczyzny ACS, SPQBC względem płaszczyzny BCS, STRBD względem płaszczyzny BDS oraz STQCD względem płaszczyzny CDS.

2.3. Wielościany lustrzanie symetryczne

Korzystając z tego, że każdy wielościan możemy rozciąć na czworościany oraz z informacji zawartych w podrozdziałach 2.1. i 2.2. udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2: Wielościany lustrzanie symetryczne są równoważne przez rozkład bez użycia lustrzanych odbić.

Dowód:

Weźmy dwa wielościany W_{I} i W_{II}, takie, że W_{I} jest lustrzanym odbiciem W_{II}. Dzielimy je na czworościany $W_1, W_2, ..., W_n$ oraz $W_1', W_2', ..., W_n'$, odpowiednio, w ten sposób, by W_i był lustrzanie symetryczny do W_i'. Mamy zatem następującą sytuację: W_{I} jest zbudowany z czworościanów W_i , które na podstawie Faktu 2.1. są równoważne przez rozkład bez odbicia lustrzanego czworościanom W_i', z których jest zbudowany wielościan W_{II}. Zatem wielościany W_{I} i W_{II} są równoważne przez rozkład bez lustrzanego odbicia.

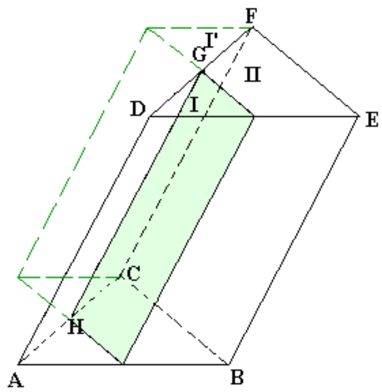
2.4. Równoważność przez rozkład graniastosłupów

W pierwszym rozdziale, kiedy dowodziliśmy równoważności przez rozkład graniastosłupów, korzystaliśmy z lustrzanych odbić. Teraz nasuwa się pytanie, czy skoro pokazaliśmy, że wielościany lustrzanie symetryczne są równoważne przez rozkład bez lustrzanego odbicia, to czy można pokazać, że każde dwa graniastosłupy o jednakowej objętości są równoważne przez rozkład bez lustrzanego odbicia. Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3: Graniastosłupy o równej objętości są równoważne przez rozkład bez lustrzanych odbić.

Dowód:

Weźmy dwa graniastosłupy G_1 i G_2, takie, że $V_{G_1} = V_{G_2}$, gdzie V jest objętością. Podzielmy teraz podstawy graniastosłupa G_1 na k trójkątów, graniastosłupa G_2 na m trójkątów, a następnie budujemy na nich graniastosłupy o krawędziach bocznych równoległych do krawędzi bocznych wyjściowych graniastosłupów. W ten sposób G_1 jest zbudowany z k graniastosłupów trójkątnych, a G_2 z m graniastosłupów trójkątnych. W rozdziale 1 pokazaliśmy, że graniastosłup trójkątny jest równoważny przez rozkład równoległościanowi dzięki symetrii środkowej, czyli złożeniu obrotu i lustrzanego odbicia. Teraz pokażemy to bez lustrzanych odbić.



Tak jak w podrozdziale 1.4 przecinamy graniastosłup trójkątny płaszczyzną dzielącą go na dwa wielościany (I i II). Płaszczyzna ta musi być równoległa do jednej ze ścian bocznych tego graniastosłupa, np. do CBEF, oraz musi przechodzić przez środek krawędzi DF. Na podstawie Twierdzenia 2 wielościan I jest równoważny przez rozkład bez lustrzanego odbicia wielościanowi I’, który powstał z przekształcenia wielościanu I przez złożenie lustrzanej symetrii i obrotu. Wielościan I’ oraz wielościan II dają równoległościan. Zatem graniastosłup trójkątny jest równoważny przez rozkład bez użycia lustrzanego odbicia równoległościanowi.

Kontynuując dowód, G_1 zbudowany z k graniastosłupów trójkątnych jest równoważny przez rozkład bez lustrzanych odbić bryle składającej się z k równoległościanów, a G_2 zbudowany z m graniastosłupów trójkątnych bryle składającej się z m równoległościanów. Postępujemy tak jak w dowodzie Twierdzenia 1, a więc następne przekształcenia tych brył dokonujemy wyłącznie za pomocą izometrii parzystej, a więc bez lustrzanych odbić

Tym samym pokazaliśmy, że graniastosłupy o tej samej objętości są równoważne przez rozkład bez lustrzanych odbić.

DODATEK

Podczas dowodzenia równoważności przez rozkład graniastosłupów kilkakrotnie korzystaliśmy, bez uzasadniania, z przechodniości równoważności przez rozkład. Następujące twierdzenie wyraża tę przechodniość.

Twierdzenie: Jeżeli dwa wielościany są równoważne przez rozkład trzeciemu wielościanowi, to te dwa wielościany są równoważne przez rozkład.

Twierdzenie to można również zapisać następująco:
Niech G_1, G_2, G_3 będą wielościanami. Jeżeli G_1 jest równoważny przez rozkład G_2 oraz G_3 jest równoważny przez rozkład G_2, to G_1 jest równoważny przez rozkład G_3.
Dodatek ten ma na celu przedstawienie dowodu powyższego twierdzenia.
Dowód:

Weźmy trzy wielościany G_1, G_2, G_3 spełniające nasze założenie. Równoważność wielościanów G_1 i G_2 oznacza, że możemy rozciąć G_1 na bryły W_1, W_2, ..., W_k, a G_2 na bryły W_1', W_2', ..., W_k' tak, że $W_i = W_i$' dla $i = 1, 2, ..., k$. Podobnie z równoważności przez rozkład G_2 i G_3 otrzymujemy rozkład G_2 na bryły V_1, V_2, ..., V_m oraz rozkład G_3 na bryły V_1', V_2', ..., V_m', gdzie $V_j = V_j$' dla $j = 1, 2, ..., m$. Zwróćmy uwagę, że wielościan G_2 raz został pocięty na bryły W_i, z których można zbudować G_1 oraz za pomocą innego podziału został rozcięty na bryły V_j wchodzące w skład wielościanu G_3. Jeżeli znajdziemy taki podział G_2, aby z otrzymanych brył dało się zbudować zarówno G_1 jak i G_3, to otrzymamy równoważność przez rozkład G_1 i G_3.
Taki podział istnieje - wystarczy, że nałożymy na siebie rozcięcia G_2, które dokonaliśmy by pokazać jego równoważność przez rozkład z G_1 oraz z G_3. Po takim rozcięciu otrzymujemy bryły Z_1, Z_2, ..., Z_s. Teraz musimy rozciąć każdą bryłę W_i z wielościanu G_1 według nowego podziału G_2. W ten sposób wielościan G_1 został rozcięty na bryły $Z_1', Z_2', ..., Z_s'$ odpowiednio przystających do Z_1, Z_2, ..., Z_s. Podobnie postępujemy z wielościanem G_3, rozcinamy każdą bryłę V_i, według nowego podziału i otrzymujemy, że G_3 jest zbudowany z brył $Z_1'', Z_2'', ..., Z_s''$ odpowiednio przystających do Z_1, Z_2, ..., Z_s. Zatem zarówno bryły $Z_1', Z_2', ..., Z_s'$ jak i bryły $Z_1'', Z_2'', ..., Z_s''$ są przystające do Z_1, Z_2, ..., Z_s, co na podstawie przechodniości relacji przystawania daje

nam przystawanie brył Z_i'do Z_i'', dla i = 1, 2, ..., s. W ten sposób dokonaliśmy podziału wielościanu G_1 i G_3 na bryły odpowiednio do siebie przystające, co oznacza, że te wielościany są równoważne przez rozkład.

BIBLIOGRAFIA

[1] Michał Szurek, „Opowieści matematyczne", Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1987.

[2] „Problemy Hilberta", pod redakcją Witolda Więsława, Instytut Historii Nauki PAN, Warszawa 1997.

[3] Aniela Ehrenfeucht, „Ciekawy czworościan", Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1966.