Zadania z Geometrii Elementarnej 1
Lista 2. Figury mierzalne i ich pole.

1. Uzasadnij, że następujące zbiory są mierzalne, zaś ich pole (czyli miara Jordana) wynosi $P = 0$:
   (a) punkt;
   (b) odcinek;
   (c) okrąg o dowolnym promieniu R.
   Uwaga: do przybliżeń wewnętrznych można użyc pustą figurę wielokątną, której pole wynosi oczywiście 0.
2. Uzasadnij, że pole każdej figury mierzalnej jest nieujemne. Uzasadnij też, że jeśli jedna figura mierzalna zawiera się w drugiej, to jej pole jest niewiększe niż pole tej drugiej.
3. Uzasadnij, że jeśli F jest figurą mierzalną, zaś F' jest figurą podobną do F w skali k, to F' jest także mierzalna, oraz $P(W') = k^2 \cdot P(W)$. Wskazówka: skorzystaj z tej samej zależności dla pól podobnych figur wielokątnych (wyprowadzonej na wykładzie).
4. Oblicz, metodą jak dla całego koła, pole wycinka koła o promieniu R mającego kąt α pomiędzy dwoma ograniczającymi go promieniami koła.
5. Uzasadnij, że pole (miara Jordana) sumy dwóch rozłącznych zbiorów mierzalnych jest równe sumie ich pól.
6. Uzasadnij, że
   (a) suma
   (b) przekrój
   dwóch zbiorów mierzalnych (w sensie Jordana) jest zbiorem mierzalnym.
7. Uzasadnij, że dla dowolnych dwóch zbiorów mierzalnych F i H zachodzi wzór
$$P(F \cup H) = P(F) + P(H) - P(F \cap H).$$
8. Oblicz (ale nie z definicji, tylko wykorzystując poprzednie zadania, np. 1, 4 i 5) pole obu cześci koła o promieniu R (odcinków koła) powstałych z podziału tego koła cięciwą o długości d. We wzorze mogą się pojawić funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.
9. Uzasadnij, że następujące figury są mierzalne, i mazją pole równe zero:
   (a) sume nieskończenie wielu odcinków
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1] \times \{\frac{1}{n}\};$$
   (b) suma brzegów nieskoczonej rodziny kwadratów
$$[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
   (c) dowolna nieskończona łamana $A_0A_1A_2\ldots$ w której suma długości odcinków
$$\sum_{i=0}^{\infty} |A_iA_{i+1}|$$
   jest skończona (tzn szereg jest zbieżny);
   (d) zbiór wszyskich punktów postaci $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$, dla wszystkich n i m naturalnych.
10. Uzasadnij, że dywan Sierpińskiego jest figurą mierzalną, zaś jego miara Jordana to 0.