Zadania z Geometrii Elementarnej 1
Lista 3. Pole powierzchni brył obrotowych.

0. Sprawdź, że wzór $P = 2\pi\rho\lambda$ na pole pierścienia stożkowego (gdzie ρ jest promieniem rdzenia, zaś λ jest długością tworzącej [pobocznicy] pierścienia) stosuje się również do następujących figur: powierzchnia boczna walca, pierścień na płaszczyźnie zawarty pomiędzy dwoma współśrodkowymi okręgami, powierzchnia boczna stożka (nie ściętego).
1. Z kwadratu utworzono dwie bryły obrotowe, obracając go wokół prostej przechodzącej przez
   (a) środki przeciwległych boków, (b) dwa przeciwległe wierzchołki.
   Która z tych dwu brył ma mniejsze pole powierzchni? A jaka będzie odpowiedź na analogiczne pytanie dla sześciokąta foremnego?
2. Bryła B powstaje przez obrót w przestrzeni sześciokąta foremnego o boku a wokół osi zawierającej jeden z jego boków. Oblicz pole powierzchni bryły B. Zrób to samo dla ośmiokąta foremnego.
3. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej przez obrót wokół osi Oy trójkąta o wierzchołkach:
   (a) $A(1,0), B(3,0), C(2,2)$, (b) $A(1,0), B(2,1), C(2,-1)$, (c) $A(2,0), B(3,1), C(4,-1)$.
4. Kwadrat o boku $2a$ umieszczono na płaszczyźnie w ten sposób, że jego środek znajduje się w odległości $d > a\sqrt{2}$ od osi Oy, a następnie utworzono bryłę obrotową B obracając ten kwadrat wokół osi Oy.
   (a) Wylicz pole powierzchni bryły B w przypadku, gdy boki kwadratu są równoległe i prostopadłe do osi Oy, oraz w przypadku gdy boki te są nachylone pod kątem $45°$ do osi Oy.
   (b) Uzasadnij, że pole powierzchni bryły B jest stałe, niezależnie od kąta nachylenia boków kwadratu do osi Oy.
5. Sformułuj i uzasadnij uogólnienie własności z punktu (b) poprzedniego zadania dla przypadków gdy kwadrat jest zastąpiony przez:
   (a) dowolny prostokąt;
   (b) dowolny wielokąt foremny.
6. Figurę płaską będącą sumą dwóch kół o promieniu r i o środkach odległych o r obrócono w przestrzeni wokół prostej przechodzącej przez środki obu tych kół. Oblicz pole powierzni tak utworzonej bryły obrotowej.
7. Figura F jest sumą koła o promieniu r oraz trójkąta równobocznego o boku $2r$ którego jeden wierzchołek pokrywa się ze środkiem koła. Oblicz pole powierzchni bryły obrotowej powstałej przez obrót figury F wokół jej osi symetrii.
8. Na płaszczyźnie Oxy dana jest łamana $A_0A_1\ldots A_n$, przy czym każdy punkt A_i ma współrzędne (i, y_i), $y_i > 0$. Oblicz pole powierzchni obrotowej otrzymanej przez obrót tej łamanej w przestrzeni wokół osi Ox.
9. Dla danej kuli o promieniu r znajdź:
   (a) stożek wpisany w tą kulę o maksymalnym polu powierzchni całkowitej;
   (b) stożek na niej opisany, o najmniejszym polu powierzchni całkowitej.
10. Na paszczynie dana jest prosta L, punkt O w odległości d od tej prostej, oraz koło K o promieniu $r < d$ i środku O. Oblicz pole powierzchni bryły obrotowej, zwanej *torusem*, powstałej przez obrót koła K w przestrzeni, wokół prostej L.
    Wskazówki:
    (1) Rozważ $2n$-kąty foremne opisane na kole K, o dwóch bokach prostopadłych do L.
    (2) Przejdź do granicy, przy $n \to \infty$, z polem powierzchni kawałkami stożkowych otrzymanych przez obrót powyższych $2n$-kątów wokół prostej L.
11. Koło K z poprzedniego zadania podzielono na dwa półkola prostą równoległa do L, i półkole pliższe L nazwano P_1, zaś półkole dalsze - P_2. Powierzchnię Σ_1 utworzono przez obrót P_1 wokół L, zaś powierzchnię Σ_2 analogicznie za pomocą P_2. Oblicz pola powierzchni Σ_1 i Σ_2.

Twierdzenie Pappusa-Guldina

Niech Γ będzie krzywą bez samoprzecięć na płaszczyźnie Oxy, o długości L, i niech C będzie środkiem ciężkości tej krzywej. Niech P_Γ będzie powierzchnią obrotową otrzymaną z krzywej Γ przez obrót w przestrzeni wokół osi Oy, i niech d będzie odległościa punktu C os osi Oy. Twierdzenie Pappusa-Guldina mówi, że pole powierzchni P_Γ wynosi $2\pi dL$, czyli jest równe iloczynowi długości krzywej Γ oraz długości okręgu zakreślonego przez środek ciężkości S w obrocie wokół osi Oy.

12. Sprawdź, że dla przykładów z zadań 2 i 3 Twierdzenie Pappusa-Guldina rzeczywiście zachodzi (za krzywą Γ bierzemy łamaną będącą brzegiem odpowiedniego wielokąta).

Rozważmy łamaną $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_n$ bez samoprzecięć, i oznaczmy przez d_i długości jej składowych odcinków, $d_i = |A_{i-1}A_i|$, zaś przez S_i środki tych składowych odcinków. Środkiem ciężkości łamanej Γ nazywamy taki punkt C, dla którego

$$d_1 \cdot \overrightarrow{CS_1} + \ldots d_n \cdot \overrightarrow{CS_n} = 0$$

13. Uzasadnij, za pomocą rachunku we współrzędnych, że punkt C o powyższej własności zawsze istnieje, i jest jednoznacznie określony. (Przyjmij oznaczenia na współrzędne punktów S_i.)
14. Pokaż, że gdy Γ jest brzegiem trójkąta, to na ogół środek ciężkości Γ nie pokrywa się ze środkiem cieżkości trójkąta (czyli punktem przecięcia jego środkowych).
15. Udowodnij Twierdzenie Pappusa-Guldina dla dowolnej łamanej Γ jak wyżej, rozłącznej z osią Oy, i obracanej wokoł tej osi. Wskazówka: skorzystaj z powyższej charakteryzacji środka ciężkości łamanej Γ i z tego, że rzut prostokątny sumy wektorów na oś Ox jest równy sumie ich rzutów.
16. Posługując się Twierdzeniem Pappusa-Guldina, oraz wzorem na pole powierzchni wycinka sfery, wyznacz środki ciężkości:
    (a) połówki okręgu,
    (b) ćwiartki okręgu,
    (c) dowolnego łuku okręgu o kącie środkowym $\theta < \pi$.