Wyobraźnia, która nas tak mami i prowadzi na błędne drogi, jest jeszcze i z tego powodu zdradliwa, że wiedzie czasami do prawdy.

Z Pascala [1]

Rozdział IX

Metoda niepodzielnych • Trzy sposoby obliczania pola koła • Kepler: zasada pól i beczki • Zasada Cavalieriego • Cykloida Robervala • Czy trzeba to tłumaczyć niepodzielnymi? • W stronę myślenia magicznego • Kartezjusz • Uzupełnienie: ścisłe obliczenia pól pod x^n pochodzące od Cavalieriego i Fermata • Przypisy

Metoda niepodzielnych obliczania pól, objętości i innych wielkości geometrycznych, wywodząca się od Demokryta, przeszła do nas w postaci i z argumentacją taką, jaką nadał jej wczesny wiek siedemnasty, kiedy to na krótki okres kilku dziesiątków lat zapanowała w matematyce. Później została zarzucona na rzecz całki, a rozwój matematyki nie nalegał ani na dalsze jej doskonalenie, ani na logiczne uzasadnienia. Przetrwała mimo wszystko jako metoda żywa w matematyce nieoficjalnej: znakomitej większości ludzi wykształconych wystarcza uzasadnienie wzoru na pole koła właśnie metodą niepodzielnych, a dla inżynierów i fizyków jest nadal tym, co łączy ich wyobrażenienia z abstrakcją matematyczną, jakiej wymaga współczesne ujęcie analizy matematycznej.

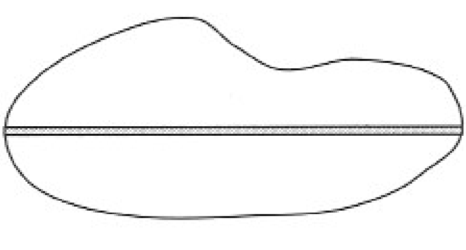
Jeśli chcemy zdać sobie sprawę z pola figury krzywoliniowej — takiej jak na rysunku 1 — dzielimy tę figurę na równoległe do siebie paski, na tyle wąskie, by można je było uważać za prostokąty.

Postulatem atomistów matematycznych jest to, że dla danej figury dostatecznie wąskie paski są rzeczywiście prostokątami.

Paski, o których mowa, nazywane są niepodzielnymi.

Metoda niepodzielnych nie zlicza tych niepodzielnych pasków, bo postulat nie wskazuje na stopień rozdrobnienia, przy którym uzyskuje się niepodzielność. Te niepodzielne paski próbuje się ułożyć inaczej, tak by tworzyły inną figurę, której pole jest znane, lub uważane za znane.

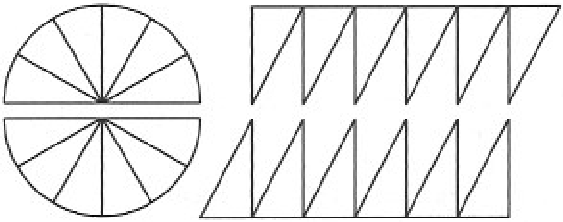
Nie zawsze muszą to być paski.



Rys. 1

Oto trzy w rozmaitym stopniu niezależne „dowody" na to, że *pole koła o promieniu r jest równe polu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych r i l, gdzie l jest długością okręgu koła.*

1. Półokrąg dzielimy na łuki na tyle drobne, by móc je uważać za prostoliniowe. Łączymy punkty podziału ze środkiem koła. Dostajemy wycinki kołowe, które uważamy za trójkąty równoramienne o wysokościach r. Rozcinamy półkole wzdłuż promieni będących brzegami powstałych wycinków, tnąc od środka, ale zatrzymując się przed brzegiem koła, by nie naruszyć spoistości figury, którą następnie rozginamy tak, by wierzchołki trójkątów znalazły się na jednej prostej. Robimy to samo z drugim półkolem.

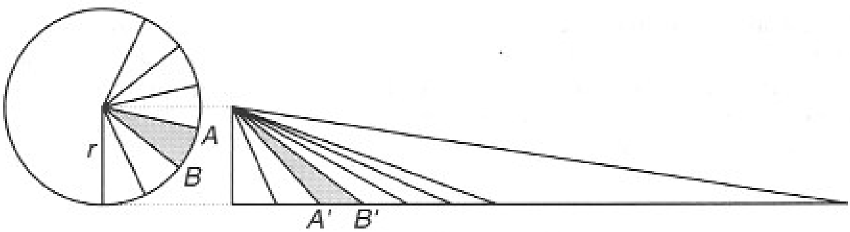


Rys. 2

Powstałe figury składamy ze sobą tak (Rys. 2), że powstała figura, w której rozpoznajemy prostokąt o bokach r i $l/2$. Pole koła jest równe polu tego prostokąta.

Ten „dowód" jest na tyle przekonujący, że Ganesza — matematyk hinduski z XV wieku — miał poprzestać na podziale półkoli na sześć części [2].

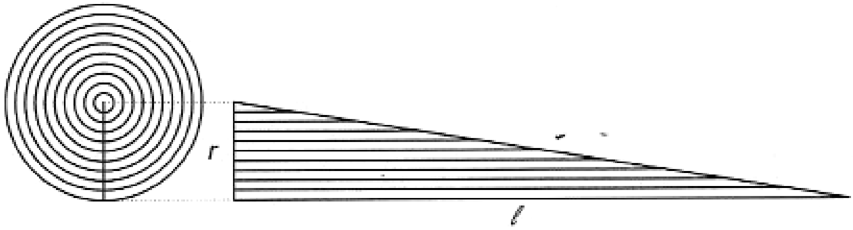
2. Koła dzielimy — podobnie jak poprzednio — na wycinki na tyle wąskie, by móc je uważać za trójkąty o wysokości r, równej promieniowi koła. Weźmy pod uwagę trójkąt prostokątny o przyprostokątniach r i l, gdzie l jest obwodem koła. Podział okręgu koła przenieśmy na przyprostokątnię l i połączmy punkty podziału z przeciwległym do l wierzchołkiem trójkąta. Powstają trójkąty równe co do pola wycinkom, na jakie podzielone zostało koło, bo podstawy i wysokości trójkątów i odpowiadających im wycinków (które też uważamy za trójkąty) są równe. Jeden z takich trójkątów i odpowiadający mu odcinek (o podstawach $A'B'$ i AB) zaznaczone są na rysunku 3. Wniosek: pole zbudowanego trójkąta, które jest równe $\frac{1}{2} \cdot r \cdot l$, jest równe szukanemu polu koła.



Rys. 3

Rozumowanie pochodzi od Keplera. Znał je Archimedes, ale uważał je za pozamatematyczne [3].

3. Pomyślmy, że koło złożone jest z koncentrycznych z nim okręgów o promieniach zmieniających się od 0 do r (promień rozważanego koła). Rozetnijmy koło wzdłuż jednego z jego promieni i rozprostujmy powstałą w ten sposób wiązkę łuków tak, by powstały odcinki nadal równoległe (Rys. 4); da się to zrobić mechanicznie, jeśli koło ułożymy z koncentrycznych luźno obok siebie ułożonych nitek. Otrzymany trójkąt prostokątny o przyprostokątnych r i l (obwód rozważanego koła), którego pole, równe $\frac{1}{2} \cdot r \cdot l$, jest szukanym polem koła [4].



Rys. 4. Sposób Torricellego — nieobcy Keplerowi.

Nie możemy odmówić przytoczonym „dowodom" miana rozumowań. Nie są to jednak rozumowania wewnątrz ustalonego systemu matematycznego. Próby ustalenia wspólnej zasady tych rozumowań nie wypadają przekonywająco. Zresztą stosowanie tej niedokładnie opisanej zasady jest w podanych przykładach rozmaite. Wprawdzie ilość części, na które dzielone były figury, były za każdym razem skończone, to jednak w drugim i trzecim rozumowaniu były poddane znacznej deformacji, przy czym trzecie rozumowanie wydaje się być niebezpiecznie bliskie błędu. Tak się mniej więcej wyrażał Cavalierii o podobnego rodzaju obliczeniach Keplera, którymi się niezależnie od tego krytycyzmu zachwycał.

Starożytni znali podobne metody. Archimedes dopełniał je ścisłymi dowodami mieszczącymi się w obrębie pojęć arytmetyki i geometrii Euklidesa. Nie negował jednak wartości tych rozumowań jako heurystycznych, tj. wyprzedzających metodę matematyczną.

Jednak w czasach nowożytnych matematycy zaczęli napotykać coraz większą ilość zadań nieskończonościowych, w których ścisłe metody Archimedesa zaczęły stanowić zbyt duże obciążenie, aby nie myśleć o sposobie ich ominięcia. Często — zobaczymy to na przykładzie Keplera — nie było wiadomo nawet, czy ścisła metoda Archimedesa się stosuje, mimo że metoda niepodzielnych dostarczała wyniku.

Jeśli się ma wymienić dwa nazwiska związane z metodą niepodzielnych, to będą to właśnie Johannes Kepler — znany nie tylko z tego tytułu — i Bonaventura Cavalieri, żyjący nieco później, idący w matematyce własną drogą. Jeśli cztery, to trzeba dodać współczesnego Cavalieriemu, znanemu szerszemu ogółowi bardziej z dokonań w zakresie fizyki — Torricellego, i arbitra elegantiarum tej metody — Robervala.

Johannes Kepler szukał w matematyce sposobu rozumienia świata tak, jak niegdyś szukali tego Pitagorejczycy. Tytuły dwu jego dzieł, *Mysterium Cosmographicum* i *Harmonices mundi*, może lepiej oddają światopogląd Keplera niż formuła zamknięta w kilka zdań. Harmonię świata znalazł w swoich prawach ruchów planet. Droga do odkrycia wiodła przez najśmielsze spekulacje ocierające się o teologię, w których astronomia graniczyła z astrologią, i przez obliczenia matematyczne o wielkim znaczeniu ogólnym i wielkiej szczegółowości. Może znalazła tu odbicie epoka, jaką przeżywała ta część Europy: Reformacja rozbudziła umysły, ścieranie się poglądów dotarło do kręgów społecznych będących dotąd poza głównym nurtem zdarzeń. Dysputy przestały być subtelne i uczone, stając się za to powszechnymi i burzliwymi.

Oto zdanie z rozprawy młodego Keplera [**5**]:

„A były głównie trzy problemy, których przyczyn, dlaczego jest tak, a nie inaczej, szukałem, a były to liczba, wielkość i ruch sfer. Odwagi dodała mi owa idealna zgodność pozostających w bezruchu Słońca, gwiazd stałych i przestrzeni pośredniej, z Bogiem-Ojcem, Synem i Duchem Świętym".

Przypomnijmy, jak powściągliwie komentowali swoje rozumowania Bradwardine i Oresme, mimo że problemy teologii były im być może bliższe.

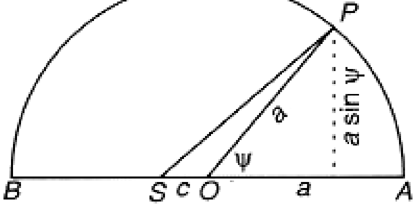
Kepler nie był profesorem żadnego uniwersytetu. Nie był też duchownym. Był nauczycielem matematyki w seminarium protestanckim w Grazu, a później przez dalsze lata matematykiem cesarskim. Mieszkał w Pradze, współpracując tam z Tychonem de Brahe, w Linzu, a także przez kilka lat u Wallensteina w Żaganiu. Pochodził z małego miasteczka Weil w Wirtenbergii.

Obliczenia metodą niepodzielnych stanowią drobną cząstkę wśród odkryć Keplera. Ale pojawiają się także w jego dziele *Astronomia nova* (1609), w którym sformułował i uzasadnił swoje dwa pierwsze prawa ruchu planet.

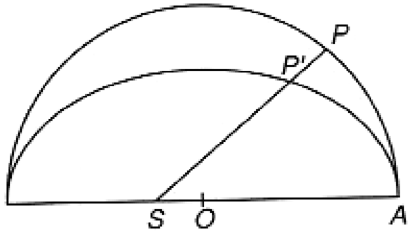
Zgodnie z teorią Kopernika, planeta obiega Słońce po kole, ale Słońce nie znajduje się w środku koła, lecz nieco ekscentrycznie (Rys. 5). Z obserwacji znanych Keplerowi wynikało, że prędkość kątowa planety jest największa w peryhelium, najmniejsza zaś w aphelium. Chcąc ująć tę zależność ilościowo, Kepler stawia hipotezę, według której promień wodzący planety (tj. odcinek łączący planetę ze Słońcem) wymiata w równych czasach równe pola. Jest to późniejsze słynne drugie prawo Keplera (pierwsze pojawi się później). Kepler próbuje je skonfrontować z obserwacją.

Przy oznaczeniach jak na rysunku 5, oznaczmy przez ψ kąt jaki tworzy OP z OA. Jeśli przez c oznaczymy długość SO, to pole wycinka ASP, które jest sumą pól trójkąta SOP i wycinka kołowego AOP, jest równe połowie wyrażenia $a \cdot (a \cdot \psi + c \cdot \sin \psi)$. Obserwacja jednak nie potwierdzała, by wyrażenie to miało równe przyrosty w równych czasach.

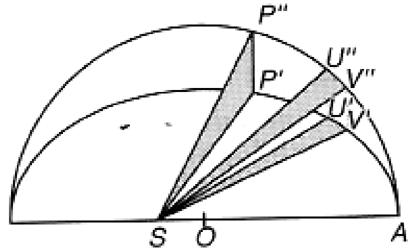
Pewne spekulacje prowadzą Keplera na myśl, że być może planeta znajduje się bliżej, w punkcie P', na tym samym promieniu wodzącym, i że punkty P' układają się w elipsę, której ogniskiem jest Słońce (Rys. 6). Jest to nie tylko poprawka, ale rozwiązanie odpowiadające bardziej harmonii świata niż położenie ekscentryczne Słońca wewnątrz orbity kołowej. Położenie ogniska S na osi dużej peryhelium–aphelium wyznaczają tak pomyślaną elipsę.



Rys. 5. Na rysunku przedstawiona jest hipotetyczna orbita kołowa planety P. Punkt O jest środkiem koła. Słońce S zajmuje stałe położenie ekscentryczne na średnicy łączącej aphelium A z peryhelium B. Aby sprawdzić swoją hipotezę, Kepler powinien znać sposób obliczania ekscentrycznych wycinków kołowych ASP.



Rys. 6



Rys. 7

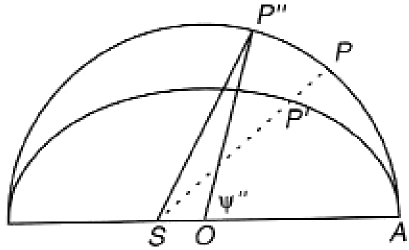
Aby potwierdzić swoją hipotezę dla tak poprawionej orbity, Kepler musi umieć obliczać pola wycinków ASP' elipsy. Pewien prosty pomysł sprowadza to obliczenie do obliczania pól ekscentrycznych wycinków kołowych, ale nie tych co przedtem. Punkt P', hipotetyczne położenie planety na elipsie, rzutuje w kierunku prostopadłym do osi dużej elipsy na rozpatrywany poprzednio okrąg. Dostaje punkt P'' (Rys. 7). Stosunek $SP' : SP''$ jest stały, ten sam dla wszystkich położeń P' planety; jest równy stosunkowi osi małej do osi dużej elipsy.

Kepler wnioskuje: w tym samym stosunku pozostają do siebie pola ASP' i ASP'', wycinków eliptycznego i ekscentrycznego kołowego.

Oto rozumowanie Keplera.

Elipsa jest rzutem koła; dla rozważanych przez nas koła i elipsy rzutowanie to widać, jeśli patrzeć przestrzennie na rysunek 7. Niepodzielne w kształcie wycinków $SU''V''$ na kole są w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej do niepodzielnych $SU'V'$ w kształcie wycinków elipsy i pola tych niepodzielnych są w znanym nam stosunku długości osi elipsy. Stąd pełne wycinki ASP'' i ASP' mają pola też w tym stosunku.

Wystarczy teraz potwierdzić obserwacją, że pola ASP'' zmieniają się jednostajnie w czasie. Ale, jak wspomnieliśmy pole, ASP'' jest proporcjonalne do wielkości $s \cdot \psi'' + c \cdot \sin \psi''$, gdzie ψ'' jest kątem AOP''. Zmiana jednostajna tej właśnie wielkości potwierdzona została obserwacją.



Rys. 8

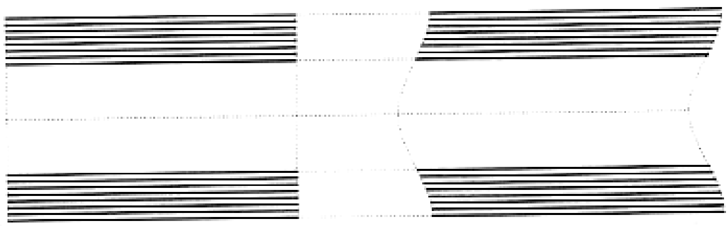
Zostały w ten sposób wypowiedziane i potwierdzone obserwacją pierwsze dwa *prawa Keplera*.

Astronomowie podkreślają wielką rolę materiału obserwacyjnego, którym dysponował Kepler, a który zawdzięczał Tychonowi de Brahe, z którym współpracował w Pradze. Matematycy zwracają natomiast uwagę na sposób, w jaki Kepler porównywał pola. Ale może jeszcze ważniejszym było przekonanie Keplera o istnieniu idealnego rozwiązania.

W pewnych określonych warunkach obliczenia podobne do tych, które robił Kepler, mogą być oparte na ściśle określonej zasadzie, której sformułowanie pochodzi od Cavalieriego. Możemy ją uważać za konkluzję „rozumowania" przytoczonego na początku rozdziału. Cavalieri jest jednak matematykiem i nie pozwala sobie na taką konkluzję. Ujmuje rozumowanie pozamatematyczne w postulat.

Wyobraźmy sobie talię kart, która w zwykłym położeniu tworzy prostopadłościan (Rys. 9, po lewej), którego objętość liczymy w znany sposób mnożąc pole podstawy przez wysokość. Przesuńmy karty talii tak, że tworzą teraz mało regularny stos (Rys. 9, po prawej). Według Cavalieriego, objętość tego stosu jest taka, jak stosu po lewej.

Zasada Cavalieriego. *Niech będą dane dwie bryły leżące obie między dwiema równoległymi do siebie płaszczyznami. Jeśli przekroje tych brył każdą płaszczyzną równoległą do wspomnianych płaszczyzn mają te same pola, to te bryły mają te same objętości.*



Rys. 9. Zasada Cavalieriego.

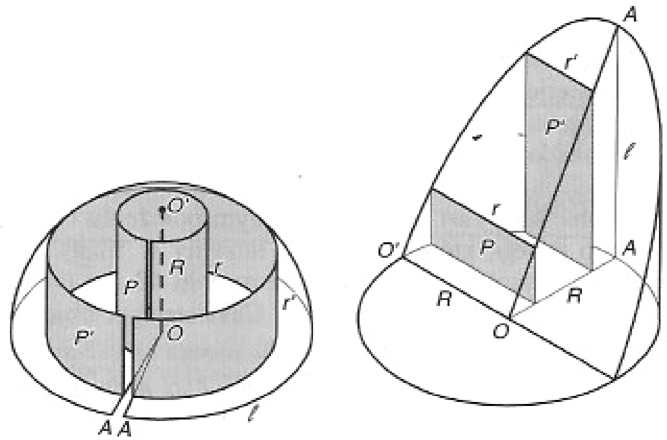
Zasada Cavalieriego nie określa objętości liczbowo, lecz jedynie porównuje dwie bryły co do objętości. Jako aksjomat spełnia wszelkie kryteria ścisłości. Stosowanie zasady jest jednak ograniczone: od bryły, której objętość uważamy za znaną, przechodzimy do następnej, a od tej znowu dalej, co wymaga przy uzyskiwaniu wyników dużej inwencji.

Zdarzyło się, że Kepler zainteresował się obliczaniem objętości beczek. Nie jest to zajęcie dla astronoma, ale pewnego roku był urodzaj na wino.

Zilustrujmy metodę Keplera [6] na najprostszym przykładzie: kuli.

Półkula jest zwojem złożonym z powierzchni bocznych walców (Rys. 10, po lewej). Figura powstająca z połowy walca, o tym samym promieniu podstawy co kula, przez ścięcie go płaszczyzną przechodzącą przez średnicę i punkt na wysokości l równej obwodowi koła wielkiego na tworzącej walca, przeciwległej do tej średnicy (Rys. 10, po prawej), jest stosem ułożonych równolegle prostokątów o polach równych polom odpowiednich wspomnianych wcześniej powierzchni bocznych walców; te prostokąty powstają z tych powierzchni przez ich rozprostowanie, jeśli ten zwój powierzchni uprzednio rozciąć płaszczyzną AOO' (oznaczenie z rysunku 10).

To samo można zobaczyć jeszcze inaczej. Rozciąwszy wpierw półkulę cięciem stanowiącym kwadrant AOO' w płaszczyźnie prostopadłej do podstawy, rozprostowujemy zwój tak, aby oś OO' (Rys. 10, po lewej) pozostawała nieruchoma, a obwód wielkiego koła w podstawie półkuli przybrał postać odcinka (o długości l, na rysunku po prawej). Jest to operacja analogiczna do tej, którą Torricelli przeprowadzał o jeden wymiar niżej utożsamiając co do pola koło i trójkąt.



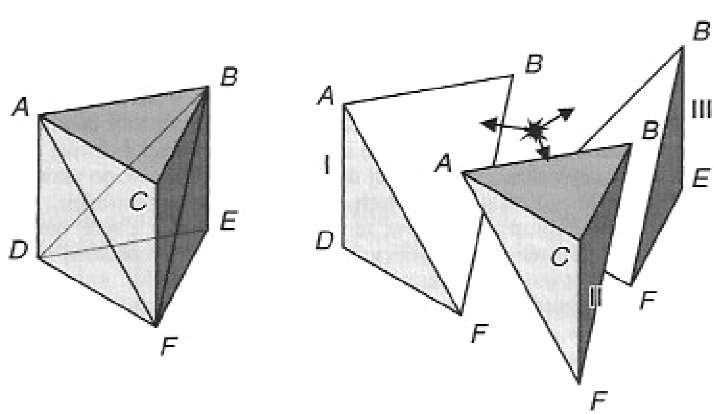
Rys. 10

Rozumowanie Keplera (podobnie jak i inne, prowadzone metodą niepodzielnych) nie daje wyniku liczbowego. Pokazuje się w nim, że objętość kuli jest równa objętości figury uważanej za prostszą.

Cavalieri był — jak widzieliśmy — ostrożniejszy niż Kepler. Nie zapuszczał się w spekulacje, zostawiając je filozofom. Był od piętnastego roku życia zakonnikiem, a większą jego część spędził jako profesor uniwersytetu w Bolonii, dokąd go rekomendował Galileusz. Nazywano go Archimedesem tamtych czasów. Zadręczał się, nie umiejąc znaleźć dowodu dla swojej zasady [7].

Posługując się zasadą Cavalieriego dowodzimy, że objętość stożka jest równa objętości ostrosłupa mającego tę samą co stożek wysokość i podstawę równą mu co do pola. Trzeba jedynie wiedzieć, że pola przekrojów na tym samym poziomie są dla obu figur te same, co wynika stąd, że są one proporcjonalne do kwadratów odległości od wierzchołka.

Stosując tę zasadę można dowieść, że objętość walca jest równa objętości graniastosłupa o tej samej co walec wysokości i o równej mu co do pola podstawie.



Rys. 11. Rozkład graniastosłupa na trzy równe co do objętości ostrosłupy.

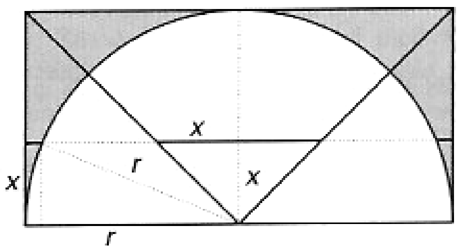
Można także uzyskać wynik ilościowy: *objętość stożka jest równa ⅓ objętości walca o tej samej co stożek podstawie i wysokości.*

Wobec poprzednich uwag, wystarczy umieć podzielić graniastosłup o podstawie trójkątnej na trzy równe co do objętości ostrosłupy, z których co najmniej jeden miałby te same co graniastosłup podstawę i wysokość. Podział pokazany jest na rysunku 11.

Ostrosłupy tego rozkładu są równe co do objętości, ale ostrosłupy I i II nie są przystające i równość ich objętości stwierdzamy posługując się zasadą Cavalieriego. Max Dehn dowiódł, że są graniastosłupy, dla których stosowania tej zasady nie da się uniknąć **[8]**.

A oto objętość kuli metodą Cavalieriego.

Opiszmy na półkuli walec, którego podstawą jest koło wielkie (Rys. 12). Rozważmy figurę (na rysunku zacieniona) będącą dopełnieniem półkuli do walca, oraz stożek o wierzchołku w środku kuli, którego podstawą jest przeciwległa podstawa walca. Niech r będzie promieniem rozważanej kuli.



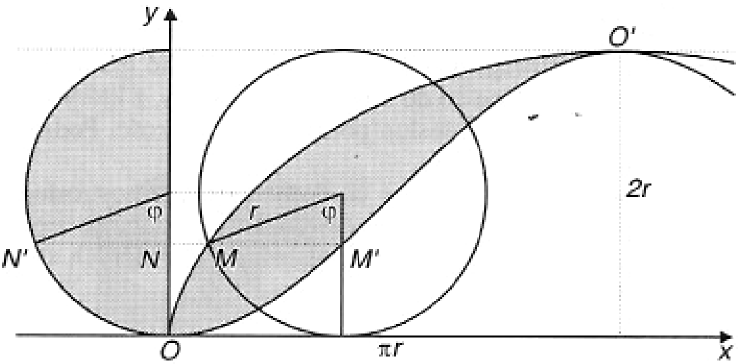
Rys. 12. Objętość kuli liczył już w podobny sposób Archimedes, również metodą niepodzielnych, ale nieco inaczej; uzupełniał rozumowanie ścisłym dowodem metodą wyczerpywania.

Płaszczyzna równoległa do podstawy walca w odległości x od wierzchołka stożka przecina stożek wzdłuż koła o promieniu x, a dopełnienie półkuli wzdłuż pierścienia zawartego między pobocznicą walca i okręgiem na powierzchni kuli, którego kwadrat promienia jest równy $r^2 - x^2$. Oba przekroje, ze stożkiem i dopełnieniem półkuli, są — co łatwo widać — równe co do pola. Na mocy zasady Cavalieriego, objętość stożka i dopełnienia półkuli są równe. Ponieważ objętość stożka jest równa ⅓ objętości walca (to wiemy z poprzednich obliczeń), więc objętość półkuli jest równa ⅔ objętości walca.

A oto obliczenie Robervala, pola zamkniętego cykloidą **[9]**.

Koło toczy się po prostej. Zaznaczmy na okręgu tego koła punkt. Jego tor to cykloida.

Przyjmijmy, że w chwili początkowej zaznaczony przez nas punkt, oznaczmy go przez M, leży na prostej, po której toczy się koło. Przyjmijmy tę prostą za oś odciętych,a początkowe położenie O punktu M za jej początek. Punkt M rusza z punktu O z prędkością zero. Tor punktu M ma tu pewną osobliwość: jest prostopadły do osi odciętych. Kiedy koło się przetoczy o pół obwodu, punkt M zajmie położenie najwyższe; jego rzędna jest równa $2r$, a odcięta wspomniane pół obwodu koła, tj. $\pi \cdot r$; przez r oznaczyliśmy promień toczącego się koła. W tym najwyższym punkcie prędkość punktu M jest największa i jest pozioma. Łuk cykloidy zatoczony do tej chwili jest zawarty w prostokącie OO' (Rys. 13), którego boki są równe $2r$ i $\pi \cdot r$, i którego pole jest przez to równe dwóm połowom toczącego się koła.



Rys. 13. Cykloida Robervala

Położenie punktu M jest wyznaczone przez kąt φ, o jaki przetoczyło się koło. Wraz z punktem M rozważmy punkt M' będący rzutem punktu M na średnicę toczącego się koła, prostopadłą do osi odciętych. Punkt M' zakreśla w czasie ruchu punktu M krzywą łączącą punkty O i O'; współrzędne punktu M' są do odczytania z rysunku i wynoszą:

$$x = r \cdot \varphi, \quad y = r \cdot (1 - \cos \varphi).$$

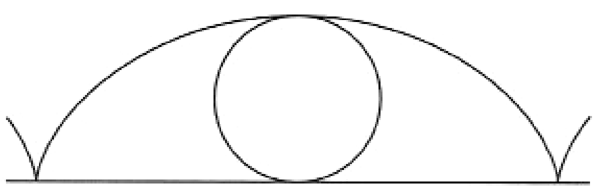
Stąd równanie krzywej:

$$y = r \cdot (1 - \cos (x/r)).$$

Jest to łuk sinusoidy (!) od swojego minimum w O do maksimum w O'. Dzieli on prostokąt OO' na połowy, wycinając z pola pod cykloidą obszar w kształcie skrzydła (zacieniony na rysunku 13).

Ale pole tego skrzydła jest równe połowie pola toczącego się koła (!). Składa się ono bowiem z odcinków MM', które zapełnią półkole (zcieniowane na rysunku 13), jeśli je zsunąć równolegle do osi odciętych (odcinek MM' na odcinek $N'N$). Wnioskując tak, stosujemy zasadę Cavalieriego.

Dalszy rachunek jest prosty: pole pod połową cykloidy jest równe połowie prostokąta OO', tj. polu toczącego się koła, plus jeszcze połowa pola tego koła (w postaci skrzydła). Równe jest więc $3/2$ tego pola. Pole pod całym łukiem cykloidy równe jest trzem polom toczącego się koła.



Rys. 14

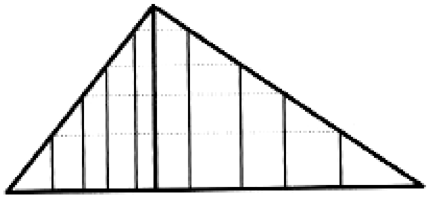
To obliczenie Robervala jest bodaj najbardziej efektownym przykładem stosowania metody niepodzielnych. Można to jeszcze podkreślić przez odpowiednie podsumowanie wyniku. Pole pod pełnym łukiem cykloidy rozbije się na trzy równe części, jeśli toczące się koło ustawić w jej środku (Rys. 14).

Przestrogą przed nieprawidłowym stosowaniem metody niepodzielnych jest następujący przykład dany przez samego Cavalieriego.

Trójkąt jest podzielony wysokością na dwie nierówne części (Rys. 15).

Każda część składa się z tej samej ilości równych odcinków. Wniosek. Części mają równe pola.

Ten paradoks znał również Bradwardine **[10]**.



Rys. 15

Zasadę Cavalieriego można uogólnić nie wymagając, by pola przekrojów obu brył były (na tych samych poziomach) równe, lecz żeby pozostawały w ustalonej proporcji. Wtedy objętości brył będą w tej samej proporcji. Tego rodzaju zasada (zastosowana o jeden wymiar niżej) mogłaby być podstawą dla obliczeń Keplera pól wycinków eliptycznych.

Można by zasadę Cavalieriego rozszerzyć jeszcze bardziej tak, by mogła być podstawą dla sposobów stosowanych przez Torricellego i Keplera przy ustalaniu pola koła i objętości beczek. Należałoby w tym celu *uznać* pojawiające się tu przekształcenia (polegające na rozprostowywaniu zwojów) za nie zmieniające pól i objętości. Zasadę Cavalieriego i jej modyfikacje możnaby więc traktować jako przedłużenie zbioru zasad porównywania pól i objętości przyjętych w geometrii elementarnej.

Było już powiedziane: metoda Cavalieriego nie jest metodą obliczania, lecz metodą porównywania.

Figurę porównujemy co do pola lub objętości z figurą bardziej znaną. Przy odpowiedniej pomysłowości możemy ciągiem takich porównań uzyskać bardzo wiele, jak o tym świadczy przykład obszaru pod cykloidą przekształconego na trzy tarcze kołowe. Nie jest to metoda uniwersalna, ale jednak wystarczająca, by mogła się rozwinąć w dyscyplinę matematyczną.

Obecnie, zasada Cavalieriego oraz przekształcenia Keplera i Torricellego stanowią fragment teorii całki. Przekształcenia odpowiadają wzorom na zamianę zmiennych w całce, a zasada Cavalieriego odpowiada twierdzeniu Fubiniego o zamianie całki podwójnej na iterowaną.

Cavalieri i jemu współcześni studiują i znają Archimedesa. Dążą do osiągnięcia ścisłości jego rozumowań, ze skutkiem, jak jeszcze będzie okazja zobaczyć (w uzupełnieniu do tego rozdziału), nie zawsze negatywnym. Wydają się wszakże całkiem oderwani od przeszłości im bliższej. A może ją znają, ale nie nawiązują do niej. Oto przecież trzy stulecia wcześniej Calculatores i Oresme sformułowali prawo, według którego wielkości mające to samo tempo wzrostu są w każdym stadium tego wzrostu równe, jeśli wzrost zaczynał się od zera. Wszystkie obliczenia Keplera i Torricellego, łącznie z zasadą Cavalieriego, można uważać za zastosowania tej zasady scholastyków: tempo wzrostu objętości dwu talii kart, ustawionej równo i przesuniętej (Rys. 9) jest to samo. Cavalieri zresztą zna to uzasadnienie **[11]**, ale nie ośmiela się uznać je za uzasadnienie swej metody. Przemilczają tą zależność i historycy matematyki. Ba! Przemilczy tę zależność Newton, mimo że będzie ona w przypadku jego Calculusu miejscami dosłowna.

Metody niepodzielnych rozwinięte w wieku siedemnastym były wielkim postępem. Ale nie stanowiły przewrotu. Szły po linii zakreślonej w starożytności i przemyślanej na nowo przez filozofów średniowiecza. Przekroczony został punkt, w którym zatrzymali się starożytni, kiedy zabrakło Archimedesa. Ale kierunek rozwoju pozostał.