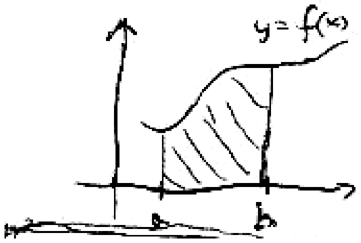
PODEJŚCIE PRZEZ FUNKCJĘ PIERWOTNĄ I CAŁKĘ OZNACZONĄ. (1)



F – funkcja pierwotna do funkcji f, tzn. taka że $F'(x)=f(x)$ dla każdego x

$F = \int f(x)\,dx$ – całka nieoznaczona

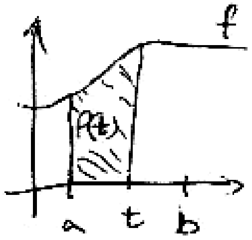
Całka nieoznaczona (czyli funkcja pierwotna) jest określona z dokładnością do stałej.

Całka oznaczona

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a) \quad \text{(to jest definicja)}$$

TWIERDZENIE. Jeśli $f \geq 0$ to pole P figury ograniczonej wykresem f, osią Ox, oraz prostymi $x=a$ i $x=b$ wynosi $\int_a^b f(x)\,dx$.

dowód:

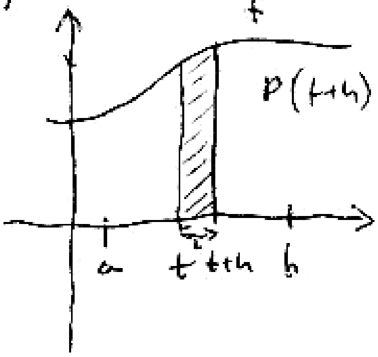


Dla każdego $t \in [a,b]$ oznaczmy przez $P(t)$ pole figury ograniczonej wykresem f, osią Ox oraz prostymi $x=a$ i $x=t$

~~Obliczmy pochodną w ten sposób funkcji: P~~

Wówczas $P(a)=0 \quad P(b)=P$.
Pokażmy że P jest funkcją pierwotną dla f.
W tym celu Obliczmy pochodną funkcji P.

$$P'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h}$$



$$h\cdot\left[\min_{x\in[t,t+h]} f(x)\right] \leq P(t+h)-P(t) \leq h\cdot\left[\max_{x\in[t,t+h]} f(x)\right]$$

$$\min_{x\in[t,t+h]} f(x) \leq \frac{P(t+h)-P(t)}{h} \leq \max_{x\in[t,t+h]} f(x)$$

Gdy $h\to 0$ a f jest ciągła to

$$\max_{x\in[t,t+h]} f(x) \xrightarrow{h\to 0} f(t)$$

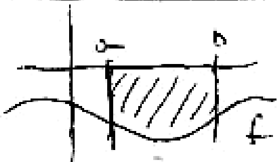
$$\min_{x\in[t,t+h]} f(x) \xrightarrow{h\to 0} f(t)$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach

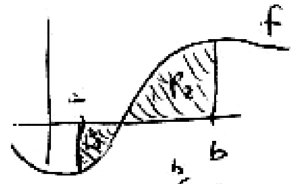
$$P'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = f(t).$$

Przeto P jest funkcją pierwotną dla f, czyli $P = \int_a^b f(x)\,dx$.

UWAGA:



Jeśli $f \leq 0$ to $\int_a^b f(x)\,dx = -P$.

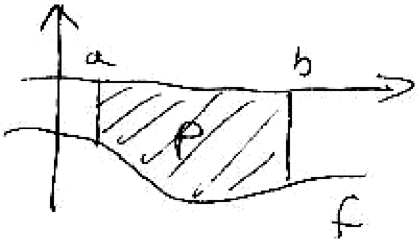


$$\int_a^b f(x)\,dx = P_2 - P_1.$$

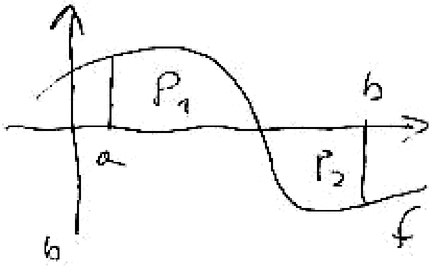
UWAGI.

(1) Jeśli $f<0$ to pole P wynosi

$$P = -\int_a^b f(x)\,dx$$



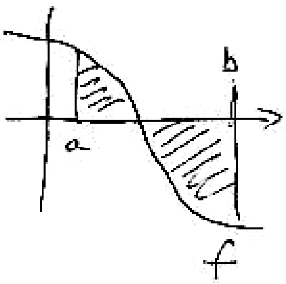
(2) Ogólnie, wyrażenie $\int_a^b f(x)\,dx$ jest różnicą pola części figury ponad osią Ox i pola części figury pod osią Ox



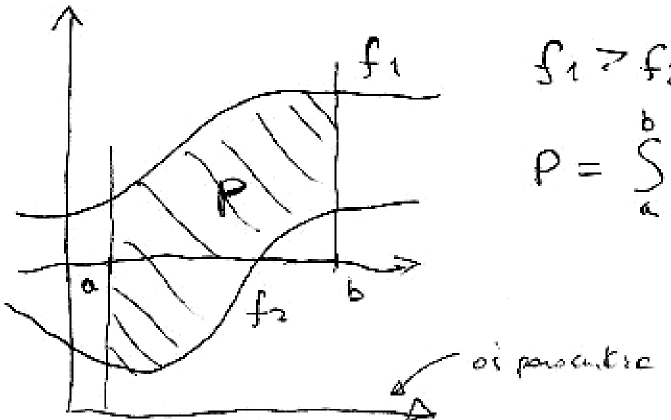
$$\int_a^b f(x)\,dx = P_1 - P_2$$

(3) Jeśli chcemy obliczyć pole to musimy obliczyć całkę

$$\int_a^b |f(x)|\,dx .$$



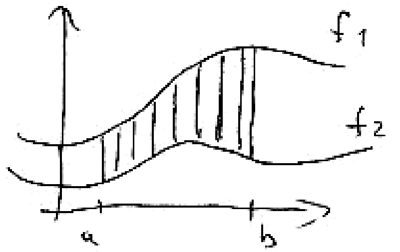
POLE OBSZARU OGRANICZONEGO WYKRESAMI DWÓCH FUNKCJI



$f_1 > f_2$

$$P = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

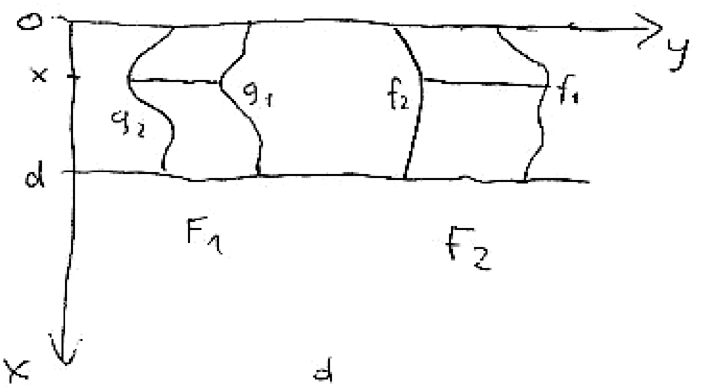
INTERPRETACJA: Całkowane są długości odcinków przekroju



PRZYKŁADY:

19.37 19.46.

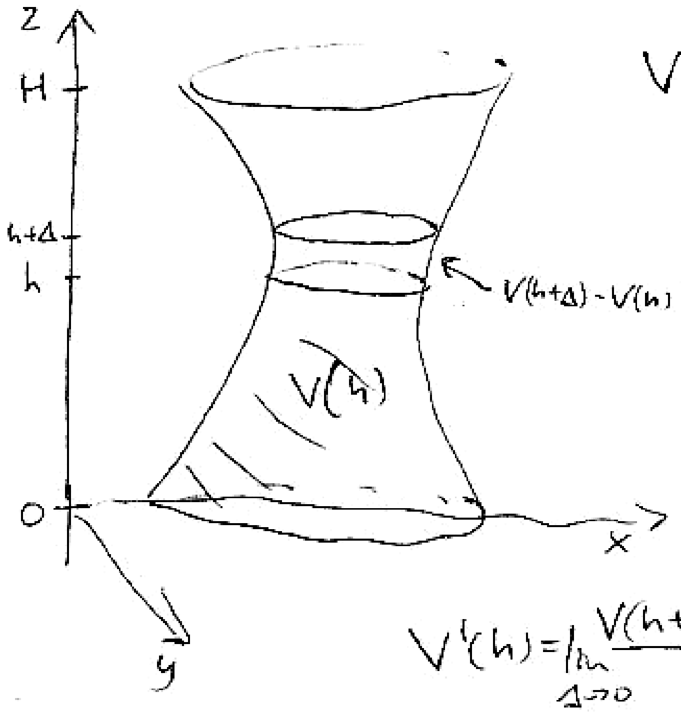
DOWÓD ZASADY CAVALIERI'EGO DLA FIGUR PŁASKICH



$f_1(x) - f_2(x) = g_1(x) - g_2(x)$ dla $x \in [0, d]$.

$$P(F_2) = \int_0^d [f_1(x) - f_2(x)]\,dx = \int_0^d [g_1(x) - g_2(x)]\,dx = P(F_1).$$

OBJĘTOŚCI



$V(h)$ - objętość części bryły ograniczonej od góry płaszczyzną $z=h$.

$V:[0,H]\to\mathbb{R}$ funkcja

$V(0)=0$, $V(H)=\mathbf{V}$ - objętość całej bryły

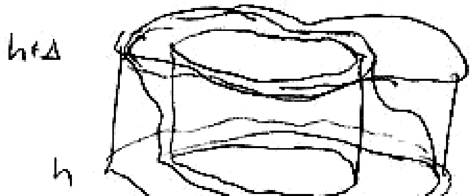
Obliczmy pochodną funkcji V:

$$V'(h)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{V(h+\Delta)-V(h)}{\Delta}$$

$S(t)$ - rzut przekroju bryły płaszczyzną $z=t$ na płaszczyznę Oxy [a także jego pole]

$\overline{S}_{[h,h+\Delta]}$ - suma rzutów $S(t)$ po wszystkich $t\in[h,h+\Delta]$ [a także pole tej sumy]

$\underline{S}_{[h,h+\Delta]}$ - przekrój rzutów $S(t)$ po wszystkich $t\in[h,h+\Delta]$ [a także pole tego przekroju]



$$\underline{S}_{[h,h+\Delta]}\cdot\Delta\leq V(h+\Delta)-V(h)\leq\overline{S}_{[h,h+\Delta]}\cdot\Delta$$

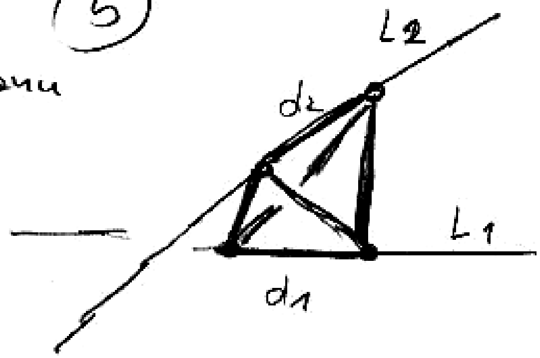
$$\underline{S}_{[h,h+\Delta]}\leq\frac{V(h+\Delta)-V(h)}{\Delta}\leq\overline{S}_{[h,h+\Delta]}$$

Dla figur o dostatecznie regularnym brzegu mamy

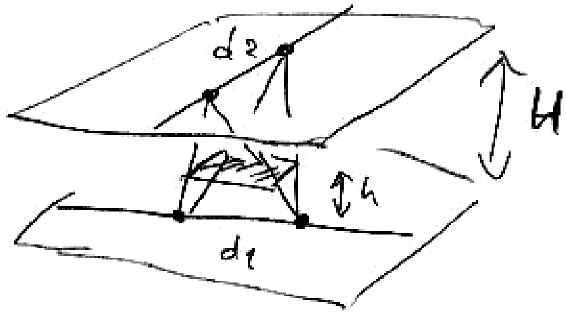
$$\lim_{\Delta\to 0}\underline{S}_{[h,h+\Delta]}=\lim_{\Delta\to 0}\overline{S}_{[h,h+\Delta]}=S(h)$$

a wtedy $V'(h)=\lim\frac{V(h+\Delta)-V(h)}{}=S(h)$.

ZADANIE. Oblicz objętość czworościanu gdy wiadomo, że jedna z par przeciwległych boków zawarta jest w prostych skośnych w przestrzeni, leżących w odległości H od siebie (czyli na równoległych płaszczyznach oddalonych o H), przy czym kierunki tych prostych różnią się o kąt $\alpha \in (0°, 180°)$, zaś długości boków zawartych w tych prostych wynoszą d_1 i d_2.



Przekrój na wysokości $h \in [0, H]$ jest równoległobokiem o bokach długości:



$$a = \frac{h}{H} d_2 \qquad \frac{H-h}{H} d_1 = b$$

Zaś kąt pomiędzy sąsiednimi bokami wynosi α.

Zatem pole przekroju na poziomie h to

$$P(h) = a \cdot b \sin\alpha = \frac{h}{H} d_2 \frac{H-h}{H} d_1 \sin\alpha$$

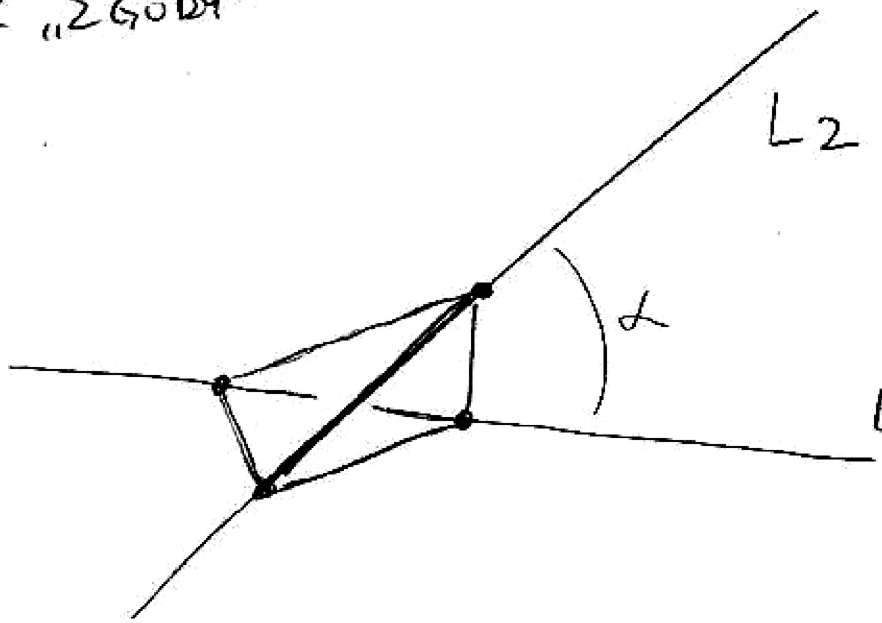
W takim razie objętość czworościanu wynosi:

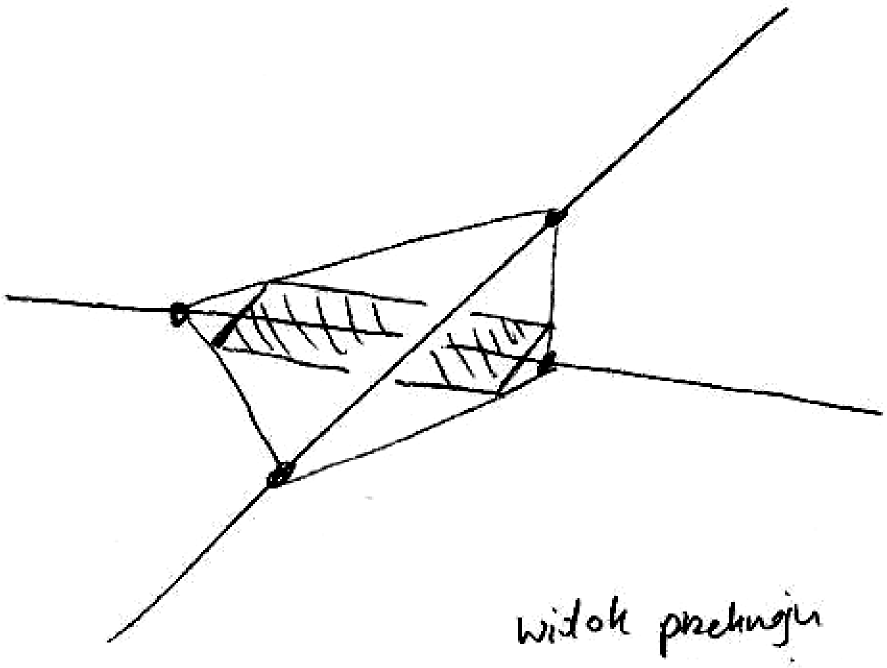
$$V = \int_0^H \frac{h}{H} d_2 \frac{H-h}{H} d_1 \sin\alpha \, dh = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{H^2} \int_0^H h(H-h)\, dh =$$

$$= \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{H^2} \left[\int_0^H h \cdot H \, dh - \int_0^H h^2 \, dh \right] = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{H^2} \left[\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right] =$$

$$= \boxed{\frac{d_1 d_2 \sin\alpha \cdot H}{6}}$$

WIDOK „Z GÓRY"





widok przekroju
– – na poziomie $h \in [0, H]$