KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 7. ZESPOLONE LICZBY KONSTRUOWALNE
i KONSTRUKCJE WIELOKĄTÓW FOREMNYCH.

Ćwiczenia (do samodzielnego przerobienia - nie będą omawiane na zajęciach).

1. Uzasadnij, że następujące liczby są zespolonymi liczbami algebraicznymi, dla każdej z nich znajdując wielomian o współczynnikach całkowitych, którego liczba ta jest pierwiastkiem: $2+i$, $1+i\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+i$.

Zadania.

1. Sprawdź, że jeśli wielomian $W(x)=ax^2+bx+c$ o rzeczywistych współczynnikach a,b,c ma wyróżnik $\Delta=b^2-4ac$ ujemny, to jego pierwiastkami są liczby zespolone $(-b\pm i\sqrt{-\Delta})/2$. Uzasadnij też, że jeśli współczynniki a,b,c są wymierne, to pierwiastki wielomianu W są zespolonymi liczbami konstruowalnymi.
2. Uzasadnij bezpośrednio z definicji, że jeśli z jest liczbą zespoloną konstruowalną, to każdy z jej zespolonych pierwiastków czwartego stopnia jest też konstruowalny. Wskazówka: przedstaw liczbę z w postaci trygonometrycznej, $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, wyraź jej pierwiastki czwartego stopnia w postaci trygonometrycznej, i skorzystaj z definicji konstruowalności dla postaci trygonometrycznej.
3. Znajdź wszystkie cztery zespolone pierwiastki wielomianu x^4+2x^2+4 i sprawdź, że są one konstruowalne. Wskazówka: rozwiąż najpierw równanie kwadratowe z niewiadomą $y=x^2$; znajdź postać trygonometryczną rozwiązań tego równania, by łatwiej obliczyć ich pierwiastki kwadratowe.
4. Uzasadnij, że dla dowolnego wielomianu $x^4+ax^2+b\in Q[x]$ jego wszystkie pierwiastki są liczbami zespolonymi konstruowalnymi.
5. Znajdź wszystkie zespolone liczby algebraiczne stopnia 2 (podaj ich ogólną postać).
6. Uzasadnij, że jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą, zaś $\varepsilon_{2p}=\cos\frac{2\pi}{2p}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{2p}$ jest pierwotnym pierwiastkiem stopnia $2p$ z 1, to stopień liczby ε_{2p} wynosi $p-1$. Przeprowadź następujące kroki uzasadnienia:
   (a) ε_{2p} jest pierwiastkiem wielomianu x^p+1;
   (b) ε_{2p} jest pierwiastkiem wielomianu $Z(p)=\frac{x^p+1}{x+1}$;
   (c) wielomian $Z(x)$ jest nierozkładalny, bo wielomian $\widetilde{Z}(x):=Z(x-1)=\frac{(x-1)^p+1}{(x-1)+1}=\frac{(x-1)^p+1}{x}$ jest nierozkładalny;
   (d) ostateczne konkluzje.
7. Przyjmując, że wiemy jak skonstruować 17-kąt foremny, podaj konstrukcje 34-kąta, 51-kąta i 85-kąta foremnego.
8. Spośród liczb naturalnych od 3 do 100 wykreśl (lub wypisz) te liczby n, dla których nie jest wykonalna konstrukcja n-kąta foremnego. Ile jest takich liczb?
9. Dla jakich naturalnych n liczba $\cos\frac{2\pi}{n}$ jest konstruowalna? A liczba $\sin\frac{2\pi}{n}$?
10. Zbadaj, czy są konstruowalne kąty 12°, 3°, 5°, 2°. Czy jest konstruowalny kąt 75°? Które spośród kątów n°, gdzie n jest liczbą naturalną, są konstruowalne, a które nie są?