

KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 8. PIERWIASTNIKI I CIAŁA ROZKŁADU WIELOMIANÓW

Równania i pierwiastniki

0. Rozwiąż następujące równanie stopnia 2 o współczynnikach zespolonych

$$x^2 + ix - 1 + i = 0.$$

Wskazówka: sprawdź, że $\sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i)$, i wykorzystaj to w rozwiązaniu.

1. Opisz rozszerzenie pierwiastnikowe ciała Q , do którego należy liczba

$$(a) \sqrt[5]{(\sqrt{2} + 1)/(\sqrt[3]{\sqrt{7} - 2 - \sqrt{3}})}, \quad (b) \sqrt{3/2} + i \cdot (2 + \sqrt[4]{1 + \sqrt{12}}).$$

Oszacuj od góry stopień każdej z tych liczb, jako liczby algebraicznej.

2. Uzasadnij, powołując się na wzory Cardano, że pierwiastki dowolnego wielomianu stopnia 3 o współczynnikach konstruowalnych wyrażają się przez liczby wymierne i pierwiastniki.
3. Uzasadnij, że rozwiązania dowolnego równania postaci $ax^6 + bx^3 + c = 0$ oraz $ax^6 + bx^4 + cx^2 + d = 0$ wyrażają się przez pierwiastniki. Znajdź równania innych stopni większych niż 4 (różne od równań $x^n - a = 0$), których rozwiązania wyrażają się przez pierwiastniki. Znajdź takie równania dowolnie dużego stopnia.
4. Podaj przykład wielomianu stopnia 6 o niezerowych współczynnikach wymiernych przy wszystkich potęgach x , którego rozwiązania wyrażają się przez pierwiastniki.
5. Czy można wyrazić za pomocą liczb wymiernych i pierwiastników promień koła, którego pole wynosi $\sqrt[3]{3}$?

Ciała rozkładu wielomianów

6. Uzasadnij, że ciałem rozkładu trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c \in Q[x]$ jest ciało $Q(\sqrt{\Delta})$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.
7. Uzasadnij, że ciałem rozkładu wielomianu $x^3 - 1$ jest ciało $Q(\sqrt{-3})$.
8. Dwa istotnie różne wielomiany nierozkładalne z $Q[x]$, choć mają zawsze rozłączne zbiory pierwiastków, mogą mieć jednakowe ciała rozkładu. Znajdź przykład takich dwóch wielomianów stopnia 2, dla których wspólnym ciałem rozkładu jest $Q(\sqrt{3})$.
9. Uzasadnij, że dla dowolnych $a, b, c \in Q$ ciała rozkładu wielomianów $ax^2 + bx + c$ i $cx^2 + bx + a$ są jednakowe. A jak będzie dla wielomianów $a_nx^n + \dots + a_0$ i $a_0x^n + \dots + a_n$ dowolnego stopnia n ?
10. Uzasadnij, że ciało $Q(\sqrt[4]{2})$ nie jest ciałem rozkładu wielomianu $x^4 - 2$. Wyznacz wszystkie pierwiastki tego wielomianu, i znajdź też jawny opis jego ciała rozkładu.