1

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH (ORAZ NIEROZWIĄZALNOŚĆ)

równanie algebraiczne: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$

gdzie x – niewiadome, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – dane współczynniki

n – stopień równania (gdy $a_n \neq 0$).

Wzory na pierwiastki równania stopnia 2 – $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podobne wzory na pierwiastki równania stopnia 3 – wzory Cardano

WYPROWADZENIE

(sztuczka Scypione del Ferro wymyślone ok. r. 1500, opublikowane przez Girolamo Cardano w roku 1545)

Na początek zajmiemy się równaniem postaci

(*) $x^3 + px + q = 0$ gdzie $p \neq 0, q \neq 0$

(przypadek $p=0$ daje $x^3+q=0$ i tu rozwiązanie to $x = \sqrt[3]{-q}$; gdy $q=0$ mamy $x^3+px=0$ więc rozwiązaniem jest $x=0$ a dalsze 2 rozwiązania to $x = \pm\sqrt{-p}$)

- podstawienie $x = u + v$

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

(**) $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$

LEMAT. Dowolną liczbę rzeczywistą (a nawet zespoloną) x_0 można przedstawić w postaci sumy $x_0 = u+v$ w taki sposób, że $3uv = -p$.

Dowód: Szukamy liczb u, v spełniających układ

$$\begin{cases} x_0 = u+v \\ 3uv = -p \end{cases}$$

Rozwiązujemy: $v = x_0 - u$ (z pierwszego równania) i wstawiając do drugiego równania dostajemy

$$3u(x_0-u) = -p$$

$$-3u^2 + 3x_0u + p = 0$$

Za u wystarczy wziąć rozwiązanie tego równania kwadratowego (niezerowe!), a wówczas $v = -\frac{p}{3u}$ $\square$

• Aby rozwiązać równanie $x^3+px+q=0$

wystarczy więc rozwiązać układ równań

$$(***)\quad \begin{cases} 3uv = -p \\ u^3+v^3+q=0 \end{cases}$$

(bo w równaniu (**) dzięki równości $3uv+p=0$ mamy redukcję $3uv(u+v)+p(u+v) = (3uv+p)(u+v)=0$)

a następnie wziąć jako rozwiązanie $x=u+v$.

• Rozwiązujemy układ (***):

z pierwszego równania $v=-\frac{p}{3u}$ i wstawiając do drugiego

mamy $u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0$ lub równoważnie

$$(u^3)^2+qu^3-\frac{p^3}{27}=0 \quad \left(\begin{matrix}\text{równanie kwadratowe} \\ \text{względem } u^3\,!\end{matrix}\right)$$

$$\Delta = q^2+\frac{4p^3}{27}$$

$$u^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2} = -\frac{q}{2}+\sqrt{q^2/4+p^3/27}$$

$$v^3 = -q-u^3 = -\frac{q}{2}-\sqrt{q^2/4+p^3/27}$$

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{q^2/4+p^3/27}}\,,\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{q^2/4+p^3/27}}$$

gdy $\Delta \geq 0$, wyliczamy $x=u+v$ (pierwiastkowanie 3-go stopnia ma sens dla liczb ujemnych)

PRZYKŁAD 1

dla równania $x^3+6x-20=0$

wzory te dają

$$u=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}\,,\quad v=\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$$

↑ pierwiastek 3-go stopnia z liczby ujemnej ma sens

więc rozwiązaniem równania jest liczba

$$x=u+v=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}\,.$$

Okazuje się, że ta liczba x to 2!

Rzeczywiście, $10+\sqrt{108}=10+6\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^3$

czyli $u=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=1+\sqrt{3}$.

Podobnie ~~oraz~~ $10-\sqrt{108}=10-6\sqrt{3}=(1-\sqrt{3})^3$

czyli $v=1-\sqrt{3}$.

Zatem $x=u+v=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$.

I rzeczywiście (!), $x=2$ jest rozwiązaniem równania

$$x^3+6x-20=0\,!$$

PRZYKŁAD 2 (gdy $\Delta < 0$!)

W równaniu $x^3 - 15x - 4 = 0$

mamy rozwiązanie

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

Ale $(2+\sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ oraz
$(2-\sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$, więc

$$x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4.$$

Cardano potrafił to tak zinterpretować – tak narodziły się liczby zespolone jako użyteczne narzędzie w algebrze!

I rzeczywiście, 4 jest rozwiązaniem tego równania

WNIOSEK.

Powyższe wzory można stosować także wtedy, gdy $\Delta < 0$ (równoważnie $q^2/4 + p^3/27 < 0$).

Można też otrzymać rozwiązanie biorąc wszystkie możliwe ZESPOLONE pierwiastki 3-go stopnia, ale trzeba to robić umiejętnie, zgodnie z regułami opisanymi poniżej.

B

Wszystkie 3 pierwiastki równania $x^3 + px + q = 0$

– wzory Cardano

Potrzebujemy zespolonych pierwiastków 3-go stopnia

• PRZYPOMNIENIE ·

Niech $\varepsilon_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ – pierwotny pierwiastek 3-go stopnia z 1.

Jeśli $v = \sqrt[3]{z}$ jest jednym z pierwiastków 3-go stopnia z liczby zespolonej z, to pozostałe dwa pierwiastki to $\varepsilon_3 \cdot v$ oraz $\varepsilon_3^2 \cdot v$.

PRZYPADEK I – $q^2/4 + p^3/27 \geq 0$

Potrzebujemy 3 par pierwiastków 3-go stopnia z liczb

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{q^2/4 + p^3/27} \quad \text{oraz} \quad -\frac{q}{2} - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}$$

Jedna taka para spełniająca układ (**) to

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}, \quad u_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

– rzeczywiste pierwiastki

Kolejne pary muszą spełniać równanie $u_i v_i = -\frac{p}{3} = u_1 v_1$.

Jeśli więc $u_2 = \varepsilon_3 \cdot u_1$ to $v_2 = \frac{1}{\varepsilon_3} \cdot v_1 = \varepsilon_3^2 \cdot v_1$

i podobnie, jeśli $u_3 = \varepsilon_3^2 u_1$ to $v_3 = \frac{1}{\varepsilon_3^2} v_1 = \varepsilon_3 \cdot v_1$.

VERTE →

Dostajemy więc rozwiązanie:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

$$x_2 = \varepsilon_3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \varepsilon_3^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

$$x_3 = \varepsilon_3^2 \cdot \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \varepsilon_3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

Gdy $q^2/4 + p^3/27 > 0$

mamy 1 pierwiastek rzeczywisty

i 2 pierwiastki zespolone nierzeczywiste.

PRZYPADEK 2 - $q^2/4 + p^3/27 < 0$

8

Szukamy 3 par pierwiastków stopnia 3 z liczb

$$-\frac{q}{2} + i\sqrt{-q^2/4 - p^3/27} \quad \text{oraz} \quad -\frac{q}{2} - i\sqrt{-q^2/4 - p^3/27}$$

spełniających relację $u \cdot v = -\frac{p}{3}$.

Pierwiastkujemy sprzężone liczby zespolone, i żeby ilorazy były rzeczywiste, to pierwiastki w każdej parze też muszą być sprzężone ($v_1 = \overline{u_1}$, $v_2 = \overline{u_2}$, $v_3 = \overline{u_3}$).

Za u_i bierzemy kolejno 3 pierwiastki 3-go stopnia z liczby $-\frac{q}{2} + i\sqrt{q^2/4 - p^3/27}$ i dostajemy

$$x_i = u_i + v_i = u_i + \overline{u_i} = 2\,\mathrm{Re}\,u_i$$

$$x_1, x_2, x_3 = 2\,\mathrm{Re}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - p^3/27}}$$

↑ kolejne 3 zespolone pierwiastki 3-go stopnia

Wszystkie 3 pierwiastki są rzeczywiste!

OGÓLNE RÓWNANIE 3-GO STOPNIA – SPROWADZENIE DO POPRZEDNIEGO PRZYPADKU SZCZEGÓLNEGO

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad /:a$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

$$x^3+Bx^2+Cx+D=0$$

$$\left(x+\frac{B}{3}\right)^3-3x\left(\frac{B}{3}\right)^2-\left(\frac{B}{3}\right)^3+Cx+D=0$$

$$\left(x+\frac{B}{3}\right)^3-x\left[\frac{B^2}{3}+C\right]+\left[D-\frac{B^3}{27}\right]=0$$

$$\left(x+\frac{B}{3}\right)^3-\left(x+\frac{B}{3}\right)\left[\frac{B^2}{3}+C\right]+\frac{B^3}{9}+\frac{BC}{3}+D-\frac{B^3}{27}=0$$

$$\left(x+\frac{B}{3}\right)^3-\left(x+\frac{B}{3}\right)\left[\frac{B^2}{3}+C\right]+\left[\frac{2}{27}B^3+D-\frac{BC}{3}\right]=0$$

$$y=x+\frac{B}{3}$$

$$y^3+Py+Q=0$$

Rozwiązania y_1, y_2, y_3

Potem $x_i=y_i-\frac{B}{3}$.

TROSZKĘ HISTORII

Scipione del Ferro (1465 – 1526) – ok. 1500 wymyślił

Girolamo CARDANO (1501 – 1576)

Niccolo FONTANA zwany TARTAGLIA (ok. 1500 – 1577)

też równania stopnia 4 § Lodovico FARRARI (1522 – 1565)

[S. Kulczycki „Opowieści z dziejów liczb", wydanie III.]
, Monstra nie z tego świata

pierwszy raz pojawiły się pierwiastki z liczb ujemnych,

czyli liczby urojone i zespolone !

SZUKANO PODOBNYCH WZORÓW DLA RÓWNAŃ WYŻSZYCH RZĘDÓW – BEZSKUTECZNIE.

Joseph Louis Lagrange [1736 – 1813] ~ 1770

Paolo Ruffini (1765 – 1822) ~ 1800

Carl Friedrich GAUSS ~ 1799

Niels ABEL (1802 – 1829) ~ 1825

Evariste GALOIS (1811 – 1832) ~ 1830

Pierre WANTZEL (1814 – 1848) ~ 1837

- Zaczęli podejrzewać, że ogólne wzory nie istnieją,
- przeformułowali problem tak, by wykazać nieistnienie wzorów:

czy dla równań o współczynnikach wymiernych ich pierwiastki muszą w jakikolwiek sposób wyrażać się przez pierwiastniki ?