10. ELEMENTY ALGEBRAICZNE

Każda liczba wymierna q, a także takie liczby niewymierne, jak $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ są pierwiastkami pewnych wielomianów o współczynnikach wymiernych. Wielomianami tymi są odpowiednio $x-q$, x^2-2, x^3-2. Czy każda liczba ma analogiczną własność? Okazuje się, że nie. Jak udowodnił matematyk niemiecki

F. Lindemann, liczba π wyrażająca stosunek długości okręgu do jego średnicy, nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Podobnie liczba $e \simeq 2,7 \ldots$, którą przyjmuje się za podstawę logarytmu naturalnego, nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Liczbę rzeczywistą (lub zespoloną) nazywamy liczbą algebraiczną, gdy istnieje wielomian (niezerowy) o współczynnikach wymiernych, którego ta liczba jest pierwiastkiem. Jeśli dla danej liczby taki wielomian nie istnieje, to liczbę tę nazywamy liczbą przestępną.

liczba algebraiczna

liczba przestępna

Liczby algebraiczne można z pewnego punktu widzenia traktować jako namiastki liczb wymiernych. Są to pierwiastki równań algebraicznych o współczynnikach wymiernych. Ponieważ każdy wielomian o współczynnikach wymiernych można zamienić na wielomian o współczynnikach całkowitych, mnożąc go przez wspólny mianownik wszystkich współczynników, więc można zmodyfikować określenie liczby algebraicznej jak następuje: *dana liczba jest algebraiczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem pewnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych.*

Wprowadzone poprzednio określenie liczby algebraicznej może być łatwo uogólnione.

Przypuśćmy, że K jest pewnym ciałem, L – jego rozszerzeniem. Element $a \in L$ nazywamy algebraicznym względem ciała K, gdy istnieje niezerowy wielomian o współczynnikach, z ciała K, którego pierwiastkiem jest element a. Jeśli natomiast wielomian taki nie istnieje, to element a nazywamy przestępnym względem ciała K.

element algebraiczny

element przestępny

Jak widać określenie to zależy w sposób istotny od ciała K. I tak np. liczba π jest elementem algebraicznym względem ciała liczb rzeczywistych (jest pierwiastkiem wielomianu $x-\pi$ o współczynnikach rzeczywistych), ale jak wspomnieliśmy wyżej, jest elementem przestępnym względem ciała liczb wymiernych (jest liczbą przestępną).

Oczywiście wielomian, którego pierwiastkiem jest dany element algebraiczny, nie jest wyznaczony jednoznacznie. Liczba $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu x^2-2, ale jest także pierwiastkiem wielomianów: x^4-4, x^3-2x, x^3+x^2-2x-2 itp. Tu możemy bez trudu zauważyć, że każdy z tych wielomianów powstaje przez pomnożenie wielomianu x^2-2 przez jakiś wielomian. Czy jednak $\sqrt{2}$ nie jest pierwiastkiem wielomianu nie będącego takim iloczynem? Wyjaśnimy to w następnych rozdziałach.

Musimy jednak podać najpierw pewne informacje dotyczące arytmetyki wielomianów.

11. WIELOMIANY NIEROZKŁADALNE, STOPIEŃ ELEMENTU ALGEBRAICZNEGO

Istnieją głębokie analogie między arytmetyką wielomianów o współczynnikach z ustalonego ciała a arytmetyką liczb całkowitych. Działania dodawania i mnożenia wielomianów mają własności analogiczne do własności odpowiednich działań na liczbach całkowitych. Podobnie jak w zbiorze liczb całkowitych, również dla wielomianów o współczynnikach z ciała zachodzi jednoznaczność rozkładu. Wielomian stopnia dodatniego nazywamy nierozkładalnym, gdy nie jest on iloczynem wielomianów stopnia niższego. Oczywiście oba czynniki występujące w tym iloczynie mają być wielomianami o współczynnikach z danego ciała.

wielomian nierozkładalny

Rozważmy najprostsze przykłady. Wielomian x^2-2 jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach rzeczywistych $x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, natomiast nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach wymiernych mających stopnie niższe, gdyż takie wielomiany musiałyby być stopnia pierwszego, a zatem rozważany wielomian miałby pierwiastki wymierne.

Podobnie wielomian x^2+1 nie rozkłada się na wielomiany o współczynnikach rzeczywistych, natomiast rozkłada się nad ciałem liczb zespolonych

$$x^2+1 = (x+i)(x-i)$$

Własność nierozkładalności zależy więc nie tylko od wielomianu, ale i od ciała, nad którym tę nierozkładalność badamy. Aby nie powodować nieporozumień, powinniśmy mówić: wielomian w jest nierozkładalny nad ciałem K. Możemy też powiedzieć krócej, w jest nierozkładalny tylko wtedy, gdy wiadomo jakie ciało mamy na myśli.

Dowolny wielomian stopnia pierwszego jest nierozkładalny nad każdym ciałem, do którego należą współczynniki tego wielomianu. Jedno z podstawowych twierdzeń arytmetyki wielomianów orzeka, że *każdy wielomian stopnia dodatniego o współczynnikach z ciała K albo jest nierozkładalny, albo jest iloczynem wielomianów nierozkładalnych nad ciałem K.* Ponadto *rozkład wielomianu na czynniki nierozkładalne jest jednoznaczny* w następującym sensie. Jeśli

$$f_1 f_2 \ldots f_m$$

$$g_1 g_2 \ldots g_n$$

Analogicznie można ująć istotę jednoznaczności rozkładu liczby całkowitej na czynniki pierwsze. Każda liczba całkowita rozkłada się na iloczyn liczb pierwszych (ewentualnie zaopatrzonych w znak minus). W rozkładzie takim można oczywiście zmienić porządek czynników, a także dowolne dwa czynniki można zamienić na liczby przeciwne, np. $6 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2 = (-3)\cdot(-2) = (-2)\cdot(-3)$
Jednak każde dwa rozkłady danej liczby całkowitej zawierają tę samą liczbę czynników pierwszych i każdy czynnik pierwszy, występujący w jednym rozkładzie, występuje również w drugim rozkładzie (ewentualnie z przeciwnym znakiem).

są rozkładami pewnego wielomianu na czynniki nierozkładalne nad ciałem K, to

1) $m = n$

2) po ewentualnej zmianie kolejności czynników jednego z tych rozkładów zachodzą równości

$$f_i = c_i g_i \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

gdzie $c_i \in K$.

Określenie to może wydawać się dość skomplikowane, ale nie można go uprościć. Chodzi o to, że (podobnie jak w arytmetyce liczb całkowitych) rozkład na czynniki nierozkładalne nie jest absolutnie jednoznaczny, np. musimy pogodzić się z możliwością zmiany porządku czynników. Tak więc fakt, że

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2-1 = \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(2x-2)$$

nie przeczy jednoznaczności rozkładu.

Możemy teraz sformułować następujące twierdzenie o elementach algebraicznych.

Twierdzenie. *Jeśli a jest elementem algebraicznym względem ciała K, to istnieje wielomian nierozkładalny o współczynnikach z ciała K, którego pierwiastkiem jest a.*
Wielomian ten jest dzielnikiem każdego wielomianu w mającego współczynniki w ciele K i spełniającego warunek $w(a) = 0$.

Dowód. Ponieważ a jest elementem algebraicznym względem ciała K, więc istnieje wielomian f mający współczynniki w ciele K, dla którego $f(a) = 0$. Jeśli f nie jest wielomianem nierozkładalnym nad K, to można go rozłożyć na czynniki nierozkładalne

$$f = f_1 f_2 \ldots f_m$$

Ponieważ

$$f(a) = f_1(a)\cdot f_2(a) \ldots f_n(a)$$

więc z tego, że $f(a) = 0$ wynika, że $f_i(a) = 0$ dla pewnego i. Wobec tego f_i jest wielomianem nierozkładalnym o współczynnikach w ciele K, którego pierwiastkiem jest a.

Niech teraz w będzie wielomianem o współczynnikach z ciała K, dla którego $w(a) = 0$.
Podobnie jak w arytmetyce liczb całkowitych, możemy wyznaczyć iloraz i resztę z dzielenia w przez f_i

$$w = q\cdot f_i + r$$

przy czym r jest wielomianem niższego stopnia niż f_i.

Załóżmy, że r nie jest wielomianem zerowym. Ale ponieważ

$$w(a) = q(a)\cdot f_i(a) + r(a)$$

więc $r(a) = 0$, tj. a byłoby wspólnym pierwiastkiem wielomianów f_i oraz r, byłoby też pierwiastkiem ich największego wspólnego dzielnika. Jednak wobec tego, że f_i jest nierozkładalny oraz nie może być dzielnikiem r (r ma niższy stopień), więc ten największy wspólny dzielnik jest wielomianem stałym, a zatem nie ma pierwiastków. Tak więc założenie, że $r \neq 0$, doprowadziło do sprzeczności. Stąd $w = q\cdot f_i$, tj. f_i dzieli wielomian w. ■

Z twierdzenia tego wynika, że każdy element algebraiczny jest pierwiastkiem wielomianu nierozkładalnego, wyznaczonego jednoznacznie z dokładnością do czynnika stałego. Ten wniosek umożliwia przyjęcie następującego określenia.

stopień elementu algebraicznego

wielomian minimalny

Stopniem elementu algebraicznego a względem ciała K nazywamy stopień wielomianu nierozkładalnego nad ciałem K, którego pierwiastkiem jest a, taki zaś wielomian nierozkładalny nazywamy wielomianem minimalnym elementu a.

Może się zdarzyć, że dla pewnego elementu można bez trudu znaleźć wielomian o współczynnikach z danego ciała, którego pierwiastkiem jest ten element, natomiast sprawdzenie czy jest to wielomian nierozkładalny lub znalezienie jego rozkładu na czynniki nierozkładalne może sprawić trudności. Na przykład, aby wykazać, że liczba $x_0 = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest algebraiczna, obliczamy

$$x_0^2 = 2+2\sqrt{6}+3$$

$$x_0^2-5 = 2\sqrt{6}$$

$$x_0^4-10x_0^2+25 = 24$$

$$x_0^4-10x_0^2+1 = 0$$

Zatem rozważana liczba jest pierwiastkiem wielomianu

$$x^4-10x^2+1$$

Okazuje się, że wielomian ten jest nierozkładalny nad ciałem liczb wymiernych, stąd wynika, że liczba x_0 jest liczbą algebraiczną stopnia czwartego. Dowód nierozkładalności tego wielomianu jest jednak dość uciążliwy. Niestety nie istnieją kryteria pozwalające w łatwy sposób odróżnić wielomiany rozkładalne od nierozkładalnych nad danym ciałem K. Kryteria takie potrafimy podać w przypadku ciała liczb rzeczywistych i ciała liczb zespolonych (wynikają one z zasadniczego twierdzenia algebry). W przypadku ciała liczb wymiernych Q dogodne jest

kryterium Eisensteina. *Jeśli wielomian* $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_1 x + a_0$ *ma współczynniki całkowite oraz istnieje liczba pierwsza* p *spełniająca warunki*

Symbol $a|b$ oznacza, że a jest dzielnikiem elementu b.

$$p \nmid a_n, \quad p|a_{n-1}, \ldots, p|a_1, \quad p|a_0, \quad p^2 \nmid a_0$$

to wielomian f *jest nierozkładalny nad ciałem* Q.

Przykłady

1. Dla każdej liczby naturalnej n wielomian $x^n - 2$ jest nierozkładalny nad ciałem Q (liczba pierwsza 2 spełnia wymagania kryterium Eisensteina). Wynika stąd, że liczba $\sqrt[n]{2}$ jest liczbą algebraiczną stopnia n.

2. Do wielomianu $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ nie można bezpośrednio zastosować kryterium Eisensteina. Pytanie o rozkładalność nad ciałem Q tego wielomianu jest jednak równoważne z pytaniem o rozkładalność nad Q wielomianu otrzymanego przez podstawienie $x = y+1$, tj. wielomianu

$$(y+1)^4 + (y+1)^3 + (y+1) + (y+1) + 1 =$$
$$= y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^3 + 3y^2 + 3y + 1 + y^2 + 2y + 1 +$$
$$+ y + 1 + 1 = y^4 + 5y^3 + 10y^2 + 10y + 5$$

Do tego wielomianu możemy zastosować kryterium Eisensteina, przyjmując $p = 5$.
Ponieważ

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

więc pierwiastkami wielomianu

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

są różne od 1 pierwiastki piątego stopnia z liczby 1.
Wykazaliśmy w ten sposób, że liczby zespolone

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{5}, \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

są liczbami algebraicznymi stopnia czwartego.
Ponadto zauważmy, że jeśli wielomian stopnia większego od 1 ma pierwiastek a w ciele K, to dzieli się przez $x-a$, jest więc wielomianem rozkładalnym.
Natomiast z rozkładalności wielomianu nad K nie wynika istnienie pierwiastka w ciele K, np. wielomian x^4+1 nie ma oczywiście pierwiastków rzeczywistych, choć

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

Jedynie dla wielomianów stopnia nie większego od 3 istnienie rozkładu pociąga za sobą istnienie choćby jednego czynnika stopnia pierwszego, a więc istnienie pierwiastka w ciele K.

Zadania

11.1 Rozłożyć na czynniki nierozkładalne a) nad ciałem liczb wymiernych, b) nad ciałem liczb rzeczywistych, c) nad ciałem liczb zespolonych następujące wielomiany:

x^3+1, x^3+2, x^4-1, x^4-2, x^4+1

11.2 Określić stopnie następujących liczb algebraicznych:

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $2+\varepsilon$, gdzie

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

11.3 Określić krotność każdego z pierwiastków następujących wielomianów:

$(x^2-1)^2(x^3-1)$,

$(x^2-3x+2)^2(x^2+x-6)^2$

pierwiastek wielokrotny

W rozumowaniu powyższym wykorzystaliśmy fakt, że a jest pierwiastkiem wielomianu f, gdy f jest podzielny przez $x-a$.
Pierwiastek a nazywamy wielokrotnym, gdy f dzieli się przez pewną potęgę wielomianu $x-a$. Dokładniej, element a jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu f, gdy f dzieli się przez $(x-a)^k$, ale nie dzieli się przez $(x-a)^{k+1}$.
Wielomian

$$(x-2)^2(x+1)^3(x-5)$$

ma dwukrotny pierwiastek 2, trzykrotny pierwiastek -1, jednokrotny (pojedynczy) pierwiastek 5.