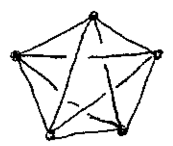
Zadania z Kombinatorycznej Teorii Grup
Lista 6.

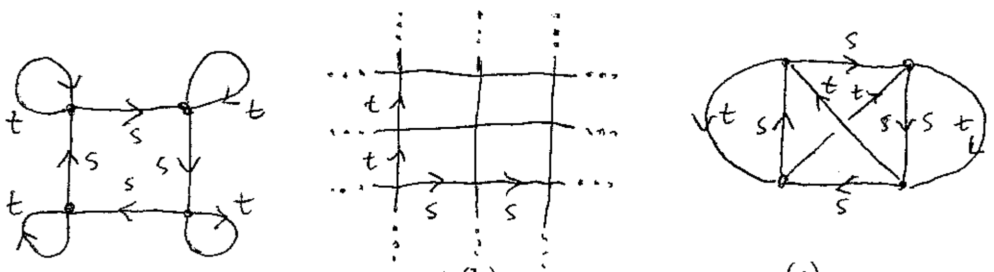
0. Uzasadnij, że jeśli skończony spójny graf zanurza się w płaszczyźnie, to jego rząd spójności jest równy liczbie ograniczonych komponent w dopełnieniu dowolnego zanurzenia.

1. Znajdź kilka różnych drzew maksymalnych oraz wyznacz rangę grupy podstawowej w następującym grafie:



2. Niech X będzie skończonym grafem, T_1, T_2 dwoma drzewami maksymalnymi w X, zaś S_1, S_2 dwoma bazami grupy podstawowej $\pi(X, v)$ kanonicznie wyznaczonymi przez drzewa T_1, T_2. Identycznościowy automorfizm grupy $\pi(X, v)$ interpretujemy jako izomorfizm $h : F_{S_1} \to F_{S_2}$. Opisz izomorfizm h w przypadku, gdy drzewa T_1, T_2 różnią się tylko jedną krawędzią.

3. Dobierając drzewa maksymalne w następujących grafach



(a) (b) (c)

znajdź bazowe układy generatorów dla podgrup grupy wolnej $\langle s, t \,|\, - \rangle$ opisanych tymi grafami jako nakryciami grafu

$X =$ 

4. Znajdź nakrycia grafu X z poprzedniego zadania odpowiadające (a) podgrupie $\langle s \rangle$, (b) jądru homomorfizmu na nieskończoną grupę cykliczną $\langle a \,|\, - \rangle$ wyznaczonego przez $s \to a, t \to 0$.

5. Wyznacz, posługując się nakryciami, bazy wszystkich podgrup indexu 2 w grupie wolnej rangi 3.

6. Uzasadnij przy pomocy nakrycia, że podgrupa w grupie wolnej $\langle s, t \,|\, - \rangle$ generowana przez s^2t^3, s^3t^2 ma rangę 2 i nieskończony indeks, zaś podgrupa generowana przez s, t^2, tst^{-1} ma rangę 3 i skończony indeks (jaki?).

7. Uzasadnij, że każda nietrywialna skończenie generowalna podgrupa normalna w grupie wolnej F_k ma skończony indeks. Wskazówka: skorzystaj z własności symetrii nakrycia odpowiadającego podgrupuie normalnej.

8. Uzasadnij, że grupa krawędziowa spójnego grafu nie zmienia się pod wpływem następujących operacji:
   (a) podział dowolnej krawędzi na dwie krawędzie składowe;
   (b) dodanie do grafu jednego nowego wierzchołka i jednej nowej krawędzi łączącej dodany wierzchołek z dowolnym "starym" wierzchołkiem grafu.

9. Niech $f_i : (Y_i, v_i) \to (X, v)$, dla $i = 1, 2$, będą dwoma spójnymi nakryciami spójnego grafu X indukującymi tą samą podgrupę $H < \pi(X, v)$. Uzasadnij, że zbazowane grafy (Y_i, v_i) są *izomorficzne jako nakrycia*, tzn. istnieje izomorfizm $j : (Y_1, v_1) \to (Y_2, v_2)$ komutujący z f_1, f_2 (czyli taki, że $f_2 j = f_1$).
10. Niech $f : (Y, v') \to (X, v)$ będzie odwzorowaniem nakrywającym spójnych grafów, i niech $G = \pi(X, v)$, $H = f_*(\pi(Y, v')) < G$.
    (A) Dla każdego $u \in f^{-1}(v)$ niech γ_u będzie wybraną drogą w Y od v' do u, i niech $g_u := [f_\# \gamma_u] \in G$. Wykaż, że zbiór $\{g_u : u \in f^{-1}(v)\}$ jest zbiorem reprezentantów prawostronnych warstw H w G. (Daje to bezpośredni dowód faktu, że indeks $[G : H]$ jest równy krotności nakrycia f.)
    (B) Niech $Aut_f Y$ oznacza grupę *automorfizmów nakrywających* nakrycia f, czyli grupę
    $$\{\phi \in Aut(Y) : \phi f = f\}$$
    Uzasadnij, że $Aut_f Y \cong N_G(H)/H$, gdzie $N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ jest *normalizatorem* podgrupy H w grupie G.
11. Pokaż, że każda grupa skończenie generowalna G ma skończenie wiele podgrup ustalonego skończonego indeksu j. Wskazówka: zredukuj to zadanie do przypadku, gdy G jest grupą wolną (skończonej rangi), a następnie wykorzystaj związek podgrup z nakryciami.
12. Pokaż, że dla każdego naturalnego $j > 2$ w grupie F_2 istnieje podgrupa indeksu j, która nie jest normalna.
13. Znajdź podgrupę indeksu 6 w grupie wolnej F_2, o indeksie 2 w swoim normalizatorze w F_2.
14. Niech X_S będzie standardowym grafem z jednym wierzchołkiem, dla którego $\pi(X) = F_S$, i niech (Y, v) będzie nakryciem tego grafu odpowiadającym podgrupie $H < F_S$. Niech T będzie drzewem maksymalnym w Y takim, że dla dowolnego $u \in V_Y$ mamy równośc odległości $d_T(u, v) = d_Y(u, v)$.
    (a) Pokaż, że poddrzewo maksymalne T o powyższej własności zawsze istnieje.
    (b) Uzasadnij, że baza podgrupy H (jako grupy wolnej) otrzymana w standardowy sposób z wykorzystaniem drzewa T jest zredukowana w sensie Nielsena.

    [Zauważ, że zadanie to dowodzi istnienia bazy zredukowanej w sensie Nielsena dla dowolnej, a więc także nieskończenie generowalnej, podgrupy H.]
15. Pokaż, że pull-back morfizmów $f_i : Y_i \to X$ (rozumiany jako graf z odwzorowaniami opisany na wykładzie) spełnia własność uniwersalności. Pokaż też, że własność uniwersalności jednoznacznie charakteryzuje pull-back.
16. Znajdź przykłady par podgrup w grupie wolnej, o dowolnych skończonych kombinacjach rang, dla których w hipotezie Hanny Neumann zachodzą równości. [To pokaże, że nierówność w hipotezie Hanny Neumann jest optymalna.]
17. Uzasadnij następujące wzmocnienie Twierdzenia Halla [udowodnione po raz pierwszy przez Burnsa w 1969 r.]:

    Dla danej skończenie generowalnej podgrupy H w grupie wolnej F i dowolnego skończonego układu elementów $\beta_1, \ldots, \beta_m \in F \setminus H$ istnieje podgrupa skończonego indeksu $G < F$ taka, że H jest wolnym faktorem w G, oraz $\beta_1, \ldots, \beta_m \notin H$

    Wskazówka: zmodyfikuj dowód Twierdzenia Halla przedstawiony na wykładzie.