GRUPA WOLNA JAKO PODGRUPA W ZNANYCH GRUPACH.

LEMAT [o generowaniu podgrupy wolnej].

Niech G będzie grupą, zaś $X \subset G$ podzbiorem. Załóżmy, że dla dowolnego niepustego zredukowanego słowa $w \neq 1$ nad alfabetem $X \sqcup X^{-1}$ element $g \in G$ reprezentowany słowem w jest nietrywialny (czyli $\neq 1$). Wówczas podgrupa $\langle X \rangle < G$ generowana przez X jest wolna względem X.

Dowód: Mamy surjektywny homomorfizm $\Phi : F_X \to \langle X \rangle$ otrzymany przez przedłużenie odwzorowania inkluzji $\phi : X \to G$ (na podstawie definicji grupy wolnej F_X). Z założenia w LEMACIE, $\ker(\Phi) = \{1\}$. Zatem Φ jest izomorfizmem. $\square$

PRZYKŁAD (ne zastosowanie LEMATU). $\boxed{07}$

Podgrupa $\langle a^3, ab^2 \rangle < F_{\{a,b\}}$ jest wolna względem zbioru $\{a^3, ab^2\} = T$.

<u>Uzasadnienie:</u>

Zauważmy, że dla dowolnych $t, r \in T \cup T^{-1}$, $t \neq r^{-1}$, przy redukowaniu słowa tr nad alfabetem $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ skraca się mniej niż połowa każdego ze słów t, r.

Stąd, w dowolnym zredukowanym nietrywialnym słowie nad $T \cup T^{-1}$, potraktowanym jako słowo nad $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, po dokonaniu redukcji zostanie słowo nietrywialne, czyli nietrywialny element z grupy $F_{\{a,b\}}$. Spełnione są zatem założenia LEMATU. $\square$

GRUPA WOLNA JAKO PODGRUPA W ZNANYCH GRUPACH

(I). LEMAT O PING-PONGU

Grupa G działa przez bijekcje (automorfizmy, izometrie, ...) na zbiorze (przestrzeni) X, zaś $a, b \in G$. Załóżmy, że istnieją podzbiory $Y_1, Y_2 \subset X$ takie że: (1) $Y_1 \not\subset Y_2$, $Y_2 \not\subset Y_1$

(2) $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ $a^n(Y_1) \subsetneq Y_2$ oraz $b^n(Y_2) \subsetneq Y_1$.

Wówczas podgrupa $\langle a, b \rangle$ generowana przez a i b jest wolna względem $\{a, b\}$.

zawieranie się w sposób istotny

<u>Dowód</u>: Wystarczy pokazać, że dowolne niepuste zredukowane słowo nad $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ wyznacza element grupy G który nie jest identycznością na X (czyli jest różny od 1 w G).

Niech w takie zredukowane słowo. Rozważymy przypadki, gdy w zaczyna się od a lub a^{-1} [przypadek dla b lub b^{-1} analogiczny]

1°. $w = a^{m_1} b^{m_2} \dots a^{m_{2k-1}} b^{m_{2k}}$

Wówczas z warunku (2) dostajemy $w(Y_2) \subsetneq Y_2$ (stosując go $2k$ razy)

Stąd $w \neq 1$ w G.

2°. $w = a^{m_1} b^{m_2} \quad b^{m_{2k}} a^{m_{2k+1}}$

Wówczas z (2) dostajemy $w(Y_1) \subsetneq Y_2$.

Ponieważ $Y_1 \not\subset Y_2$, więc $w(Y_1) \neq Y_1$, skąd $w \neq 1$ w G. $\square$

II PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ LEMATU O PING-PONGU.

(1) Niech $G = SL(2,\mathbb{Z})$ - grupa macierzy 2×2 o całkowitych współczynnikach i o wyznaczniku $= 1$ działająca liniowo na $\mathbb{R}^2$.

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}\right]$$

Niech $a_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $b_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1\end{pmatrix}$.

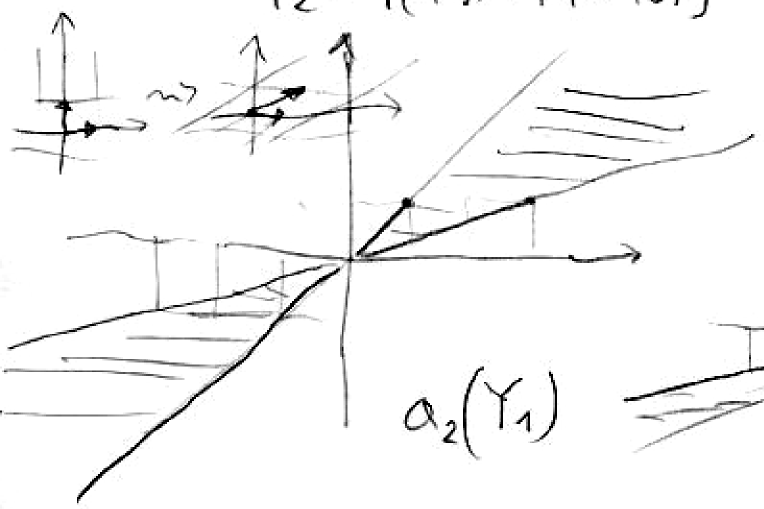
FAKT. a_2, b_2 generują podgrupę wolną w $SL(2,\mathbb{Z})$.

Dowód: Rozważmy podzbiory

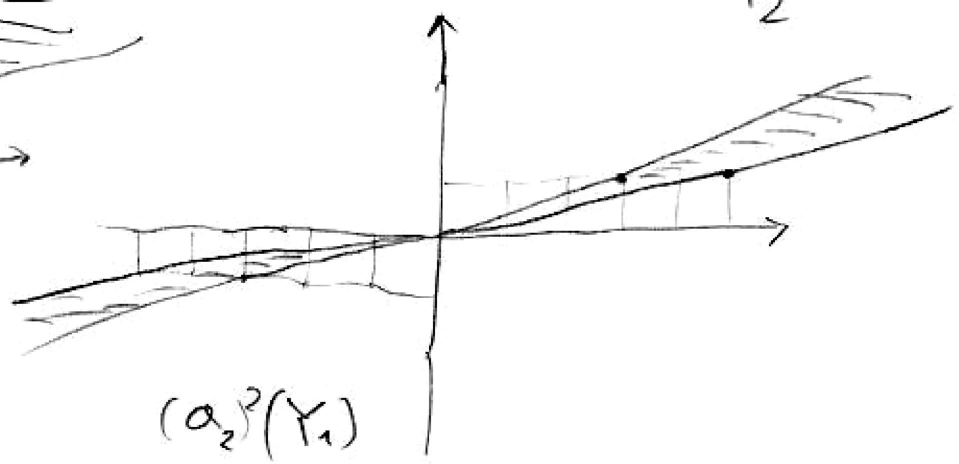
$Y_1 = \{(x,y) : |y| > |x|\}$

$Y_2 = \{(x,y) : |x| > |y|\}$

Y_1 Y_2



$a_2(Y_1)$



$(a_2)^2(Y_1)$

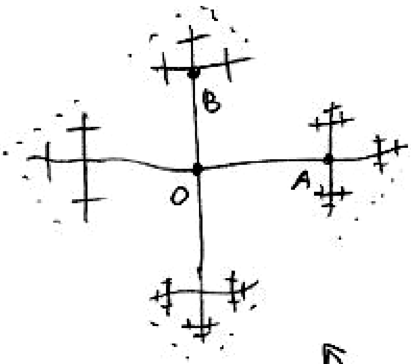
Ogólnie $(a_2)^n(Y_1) \subsetneq Y_2$ dla $n \neq 0$

Podobnie $(b_2)^n(Y_2) \subsetneq Y_1$ dla $n \neq 0$. □

UWAGI. (1) Za pomocą tych samych Y_1, Y_2 pokazuje się, że a_k, b_k dla $k > 2$ generują podgrupę wolną

(2) a_1, b_1 nie generują podgrupy wolnej, gdyż wiadomo że generują całą grupę $SL(2,\mathbb{Z})$, która zawiera elementy skończonego rzędu, a grupa wolna takich nie zawiera (zad. na ćwiczeniach).

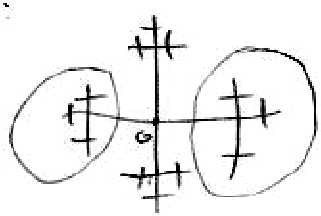
(2) Rozważmy regularne 4-walentne drzewo T_4 oraz jego grupę automorfizmów $\mathrm{Aut}(T_4)$.



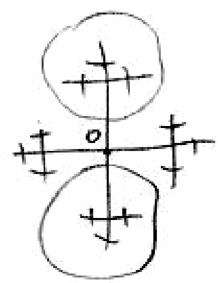
Rozważmy dwa automorfizmy $a, b \in \mathrm{Aut}(T_4)$, oba zachowujące kierunki i zwroty krawędzi dla zanurzenia $T_4 \subset \mathbb{R}^2$ jak obok, jednoznacznie zadane przy powyższym warunku przez $a(O) = A$, $b(O) = B$.

FAKT. a, b generują w $\mathrm{Aut}(T_4)$ podgrupę wolną.

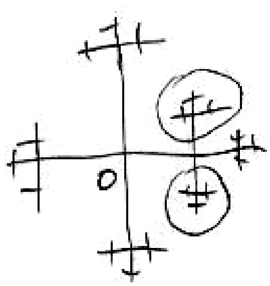
Dowód:



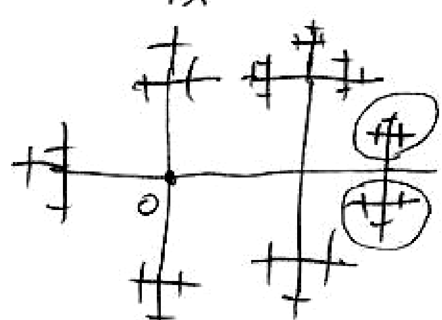
Y_2



Y_1



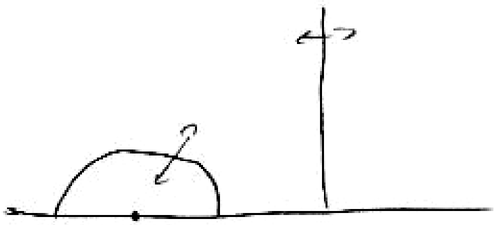
$a(Y_1) \subsetneq Y_2$



$a^2(Y_1) \subsetneq Y_2$ itd $\square$

Standardowe działanie grupy wolnej F_2 na drzewie.

(3) Niech $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ będzie grupą izometrii płaszczyzny hiperbolicznej. W modelu półpłaszczyzny Poincarégo jest to grupa przekształceń półpłaszczyzny generowane przez odbicia względem prostych „pionowych" oraz inwersje względem okręgów o środku na brzegu półpłaszczyzny [czyli odbicie względem prostych hiperbolicznych].



Rozważmy cztery proste L_1, L_2, L_3, L_4 w H^2 ograniczające cztery parami rozłączne półprzestrzenie P_1, P_2, P_3, P_4.

Niech S_i oznacza odbicie hiperboliczne względem L_i.

FAKT. Izometrie S_1S_2 i S_3S_4 generują podgrupę wolną w grupie $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Dowód: Niech $Y_1 = P_3 \cup P_4$, $Y_2 = P_1 \cup P_2$.

Zauważmy że $S_1S_2(Y_1) \subsetneq P_1 \subset Y_2$.

Ponieważ $S_1S_2(P_1) \subsetneq P_1$, więc również

$$(S_1S_2)^n(Y_1) \subsetneq P_1 \subset Y_2 \quad \text{dla } n > 1$$

Podobnie pokazuje się że $(S_1S_2)^n(Y_1) \subsetneq P_2 \subset Y_2$ dla $n<0$.

I analogicznie S_3S_4. □

III ZANURZENIE GRUPY WOLNEJ W PRODUKT SKOŃCZONYCH GRUP PERMUTACJI.

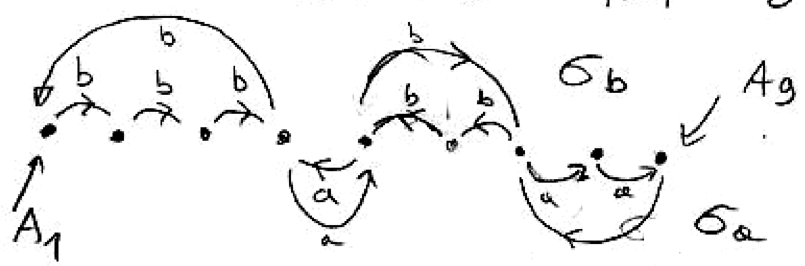
Pokażmy, że grupa wolna F_2 jest podgrupą w odpowiednio dobranym produkcie $\prod_{i=1}^{\infty} Sym(n_i)$ grup permutacji (skończonych!).

Niech w będzie zredukowanym niepustym słowem reprezentującym pewien niejednostkowy element w grupie $F_2 = F_{\{a,b\}}$.

- Określimy homomorfizm $h_w : F_2 \longrightarrow Sym(|w|+1)$ taki że $h_w(w) \neq 1$.

Rozważmy ustawiony w ciąg zbiór $|w|+1$ punktów. Opiszemy permutacje σ_a i σ_b tego zbioru, które obieramy jako obrazy generatorów a i b z F_2, $h_w(a) = \sigma_a$, $h_w(b) = \sigma_b$.

PRZYKŁAD. $w = a^2 b^{-2} a^{-1} b^3$ $\quad |w| = 8$



$$h_w(w) = h_w(a^2 b a^{-1} b^3) = \sigma_a^2 \sigma_b^{-2} \sigma_a^{-1} \sigma_b^3$$

$$h_w(w)(A_1) = A_9, \quad h_w(w) \neq 1.$$

- Zredukowane słowa na $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ ustawmy w ciąg (w_i). Bierzemy produkt $\prod_{i=1}^{\infty} Sym(|w_i|+1)$ oraz homomorfizm

$$h = \prod_{i=1}^{\infty} h_{w_i} : F_2 \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} Sym(|w_i|+1).$$ Jest on 1-1.

UWAGI:

(1) Posiadanie injektywnego homomorfizmu w produkt skończonych grup permutacji implikuje (a nawet jest równoważne) następującej własności grupy G, zwanej rezydualną skończonością:

DEF. G jest rezydualnie skończona jeśli $\forall g \in G \setminus \{1\}$ istnieje homomorfizm $h_g : G \to H$ w pewną grupę skończoną taki, że $h_g(g) \neq 1$.

WNIOSEK. Grupa wolna F_2 (a także jej podgrupy F_k i $F_{\aleph_0}$) jest rezydualnie skończona.