

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: nauczycielska

Patrycja Kumaszka

O kilku rodzajach regularnych parkietaży płaszczyzny

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2015

Oświadczam, że pracę licencjacką wykonałam samodzielnie i zgłaszam ją do oceny.

Data Podpis autora pracy:

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data Podpis opiekuna pracy:

Spis treści

Wstęp	Błąd! Nie zdefiniowano zakładki.
1. Podstawowe pojęcia dotyczące parkietaży	- 5 -
2. Parkietaże foremne	- 7 -
2.1. Oznaczenia parkietaży foremnych.....	- 7 -
2.2. Klasyfikacja parkietaży foremnych	- 8 -
2.3. Parkietaże foremne są parkietażami z płaską grupą symetrii.....	- 11 -
3. Parkietaże półforemne	- 12 -
3.1. Oznaczenia parkietaży półforemnych.....	- 12 -
3.2. Klasyfikacja parkietaży półforemnych	- 13 -
3.3. Parkietaże półforemne są parkietażami z płaską grupą symetrii.....	- 24 -
4. Parkietaże odbiciowe.....	- 25 -
4.1. Klasyfikacja parkietaży odbiciowych.....	- 26 -
4.1.1. Klasyfikacja parkietaży odbiciowych z samymi parzystymi wierzchołkami.....	- 27 -
4.1.2. Klasyfikacja parkietaży odbiciowych z co najmniej jednym nieparzystym wierzchołkiem	- 33 -
4.2 Parkietaże odbiciowe są parkietażami z płaską grupą symetrii	- 48 -
Bibliografia	- 49 -

Wstęp

„Niejednego Czytelnika może zdziwi, że kafelki terakotowe lub marmurowe, po których co dzień przebiega szybko (...), mogą być przedmiotem matematycznych rozważań...”

Szczepan Jeleński

Niniejsza praca dotyczy klasyfikacji kilku szczególnie regularnych rodzajów parkietaży płaszczyzny. Dokładnie zbadane zostały trzy typy parkietaży zbudowanych z wielokątów: parkietaże foremne, półforemne i odbiciowe.

Praca napisana jest w sposób elementarny, przystępny i zrozumiały nawet dla mało zaawansowanego matematycznie czytelnika. Może być lekturą zarówno dla uczniów szkół gimnazjalnych jak i studentów kierunków ścisłych.

Rozdział pierwszy ma charakter wprowadzający i zawiera podstawowe definicje, których poznanie pomoże odbiorcy w lepszym zrozumieniu później omawianych zagadnień. Podczas pisania tego rozdziału, opierano się o treści zawarte w książce [2] Romualda Tarczewskiego pt. „Topologia form strukturalnych”. Kolejna część poświęcona jest najbardziej klasycznemu z rodzajów parkietaży, czyli parkietom foremnym. Następnie, omówione są parkietaże półforemne. Należy zaznaczyć, iż pomysł na przeprowadzenie dowodu na sklasyfikowanie wszystkich parkietaży półforemnych, został zaczerpnięty z książki [1] Szczepana Jeleńskiego pt. „Śladami Pitagorasa”. W pracy dyplomowej dowód przedstawiono starannie i znacznie go rozbudowano. W ostatnim rozdziale omówiono parkietaże odbiciowe. Jest to temat mało rozpowszechniony lecz możliwe, iż jednocześnie szczególnie wart uwagi. Podczas pisania tego rozdziału nie wspomagano się żadną literaturą, dlatego też wszystkie treści jak i dowody, które się w nim znalazły, są owocami pracy autorki, wspartej ogromną pomocą oraz fachową poradą opiekuna niniejszej pracy licencjackiej, prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego.

1. Podstawowe pojęcia dotyczące parkietaży

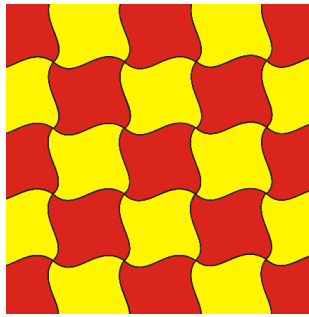
Na początku chciałabym wprowadzić kilka podstawowych definicji. Czym więc jest parkietaż?

Definicja 1.1. *Parkietaż to pokrycie płaszczyzny płytkami ściśle do siebie przylegającymi i niezachodzącymi na siebie.*

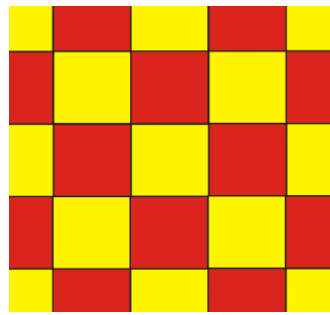
Definicja wyklucza możliwość powstawania dziur między płytkami.

Definicja 1.2. *Parkietaż wielokątowny to taki parkietaż, który utworzony jest z płytek wielokątowych, przylegających do siebie ściśle całymi bokami.*

Definicja ta różni się od poprzedniej tym, że wymusza użycie płytek wielokątowych, a wcześniej ich kształt mógł być dowolny.

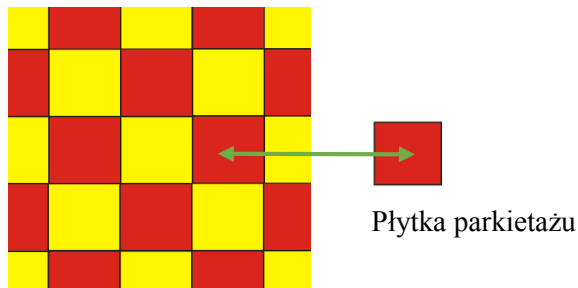


Parkietaż



Parkietaż wielokątowny

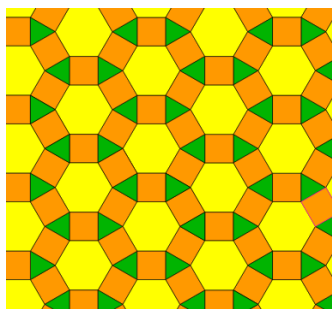
Definicja 1.3. *Płytką parkietażu to element tworzący parkietaż.*



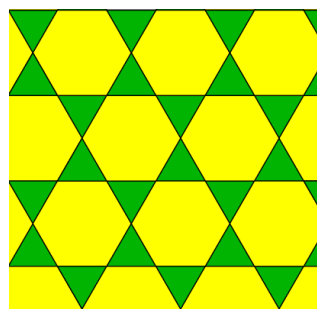
Definicja 1.4. *Przystawanie płytek parkietażu oznacza, że każda płytka w parkietażu jest tej samej wielkości i tego samego kształtu.*

Parkietaż zaprezentowany powyżej, jest przykładem parkietażu, w którym występują płytki przystające (wszystkie są kwadratami).

Definicja 1.5. *Parkietaż n -płytkowy to parkietaż, który utworzony jest z n typów różnych płytek.*

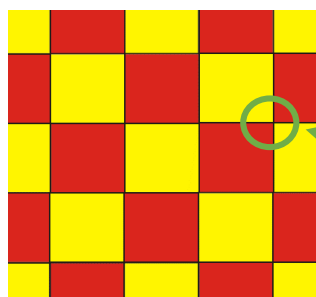


Parkietaż wielokątowy trzyplýtkowy



Parkietaż wielokątowy dwuplýtkowy

Definicja 1.6. *Wierzchołek parkietażu to punkt styku wierzchołków płytek wielokątowych, tworzących dany parkietaż.*

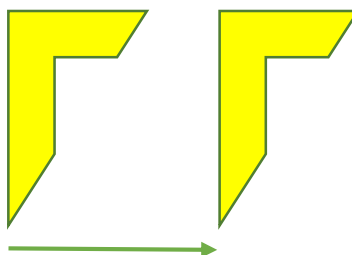


wierzchołek parkietażu

Definicja 1.7. *Przystawanie wierzchołków parkietażu oznacza, że w wierzchołkach tego parkietażu schodzą się takie same typy płytek wielokątowych i w tej samej kolejności.*

Definicja 1.8. *Parkietaż z płaską grupą symetrii to parkietaż, którego wzór jest zachowany przez translację w dwóch różnych kierunkach.*

Translacja jest jednym z rodzajów izometrii, czyli zachowuje kształt i rozmiar wszystkich figur. To przekształcenie, które wszystkie punkty płaszczyzny przesuwa równolegle o ustalony wektor.

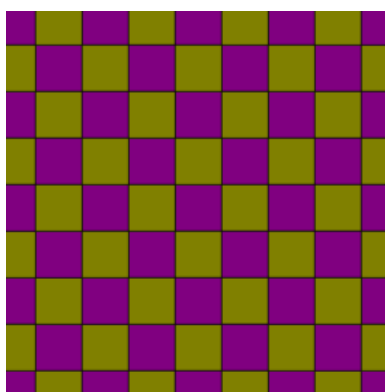


2. Parkietaże foremne

W tym rozdziale wprowadzimy pojęcie parkietażu foremnego. Znajdziemy wszystkie rodzaje takich parkietaży na płaszczyźnie, a na końcu sprawdzimy czy posiadają płaską grupę symetrii.

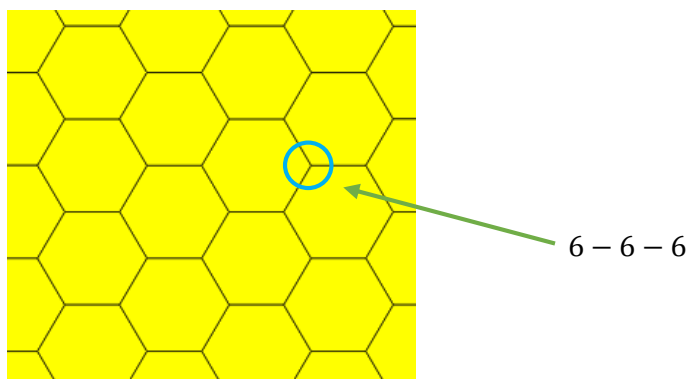
Definicja 2.1. *Parkietaż foremny to parkietaż wielokątowy składający się z przystających wielokątów foremnych, których jednakowa liczba schodzi się w każdym wierzchołku parkietażu.*

Parkietaż utworzony z płytek w kształcie przystających kwadratów, jest przykładem parkietażu foremnego i najbardziej klasycznym przykładem parkietażu w ogóle.



2.1. Oznaczenia parkietaży foremnych

Sposób w jaki oznaczamy parkietaże foremne, najłatwiej będzie zaprezentować na przykładzie. Weźmy parkietaż utworzony z przystających płytek w kształcie sześciokątów foremnych. Wierzchołki w tym parkietażu również będą przystające, więc zgodnie z definicją jest to parkietaż foremny. Spójrzmy na jeden z wierzchołków. Stykają się w nim trzy płytki w kształcie sześciokąta. Oznaczenie tego parkietażu jest następujące: $6 - 6 - 6$. Użyte liczby, oznaczają n -kąąt foremny, stąd cyfra 6 w tym konkretnym przypadku. To, ile cyfr jest we wzorze informuje nas o tym, ile wielokątów styka się w jednym wierzchołku. Znow, w wierzchołku rozpatrywanego parkietażu spotykają się trzy sześciokąty foremne, stąd cyfr 6 jest właśnie trzy.



2.2. Klasyfikacja parkietaży foremnych

Wiemy już, jak definiujemy parkietaże foremne. Znamy również ich oznaczenia. Nasuwa się teraz pytanie: ile takich parkietaży jest? Chcemy więc dowiedzieć się, na ile sposobów można wypełnić płaszczyznę przystającymi wielokątami foremnymi.

Na początku sprawdźmy, przy użyciu jakich przystających wielokątów foremnych, szczerlnie wypełnimy płaszczyznę wokół punktu. Wiemy, że kąty wewnętrzne w przystających wielokątach foremnych są równe. Niech n oznacza liczbę kątów wielokąta foremnego, natomiast k – liczbę wielokątów foremnych stykających się w wierzchołku parkietażu, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$.

Spostrzeżenie 2.2.1 *W każdym wierzchołku parkietażu foremnego styka się k kątów równej miary, których suma wynosi 360° .*

Niech α oznacza miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego. Zgodnie ze Spostrzeżeniem 2.2.1 możemy zapisać, że $k \cdot \alpha = 360^\circ$ i dalej, że

$$(2.2.2) \quad \alpha = \frac{360^\circ}{k}.$$

Fakt 2.2.3 *Trójkąt równoboczny jest wielokątem foremnym o najmniejszej mierze kąta wewnętrznego.*

Wynika z tego, że szukana miara kąta α musi spełniać warunek $60^\circ \leq \alpha$. Dodatkowo:

Spostrzeżenie 2.2.4 *Nie istnieje żaden wielokąt foremny, którego kąt wewnętrzny będzie miał miarę większą lub równą 180° .*

Korzystając z Faktu 2.2.3 i Spostrzeżenia 2.2.4, zauważamy, że kątów α musimy szukać w przedziale $60^\circ \leq \alpha < 180^\circ$. Korzystając ze wzoru (2.2.2), dostajemy nierówności

$$60^\circ \leq \frac{360^\circ}{k} < 180^\circ,$$

i dalej

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{k} < \frac{1}{2}.$$

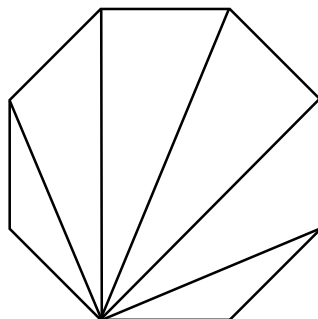
Po przekształceniach otrzymujemy następujące oszacowanie na k :

$$2 < k \leq 6.$$

Z założenia $k \in \mathbb{N}$, czyli $3 \leq k \leq 6$. Sprawdźmy więc, czy w jednym wierzchołku może stykać się odpowiednio 3, 4, 5 lub 6 przystających wielokątów foremnych. Podstawiając k do równania (2.2.2), od razu dostajemy miarę kąta α . Sprawdzamy tym samym, jaką miarę musiałyby mieć kąty wewnętrzne w wielokątach foremnych, gdyby stykało się ich k w jednym punkcie.

$$\begin{array}{ll}
 1^\circ & k = 3 & \alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ, \\
 2^\circ & k = 4 & \alpha = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ, \\
 3^\circ & k = 5 & \alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ, \\
 4^\circ & k = 6 & \alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.
 \end{array}$$

Następnie musimy sprawdzić, czy istnieją wielokąty foremne o miarach kątów wewnętrznych równych czterem powyższym. Wyprowadźmy wzór na miarę kąta wewnętrznego w wielokącie foremnym. W n -kącie foremnym liczba przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka wynosi $n - 3$. Poprowadźmy te przekątne z jednego wierzchołka dowolnego wielokąta foremnego.



Przekątne podzieliły wielokąt na $n - 2$ trójkąty. Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180° , zatem suma miar kątów wewnętrznych wielokąta foremnego, będzie wynosiła $180^\circ \cdot (n - 2)$. Aby obliczyć miarę jednego kąta wewnętrznego wielokąta foremnego, wystarczy podzielić sumę miar wszystkich kątów wewnętrznych, przez liczbę kątów w wielokącie.

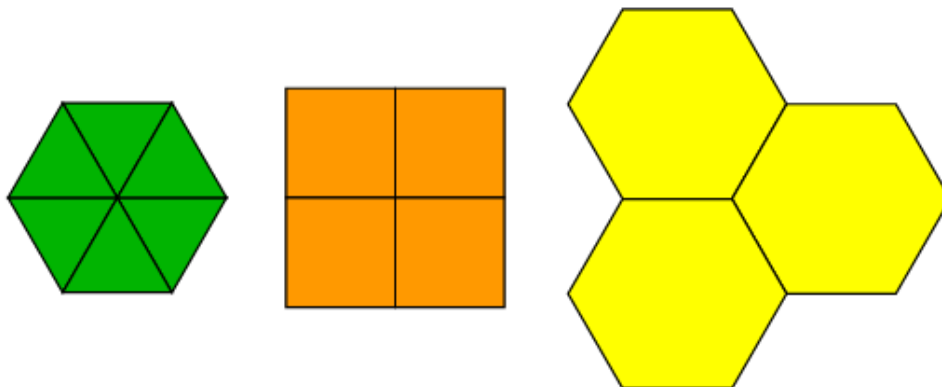
Wniosek 2.2.5 *Miara kąta wewnętrznego w wielokącie foremnym wynosi $\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$.*

Korzystając z powyższego wzoru, możemy sprawdzić, że 60° jest miarą kąta wewnętrznego trójkąta równobocznego, 90° – kwadratu, 120° – sześciokąta foremnego. Sprawdzamy, czy istnieje wielokąt foremny, którego miara kąta wewnętrznego jest równa 72° :

$$\frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n} = 72^\circ.$$

Po obliczeniach dostajemy, że $n = 3\frac{1}{3}$, a więc $n \notin \mathbb{N}$. Taki wielokąt zatem nie istnieje i tym samym wypełnienie płaszczyzny wokół punktu pięcioma przystającymi wielokątami foremnymi jest niemożliwe.

Do tej pory pokazaliśmy, że płaszczyznę wokół punktu można wypełnić szczelnie za pomocą sześciu, czterech oraz trzech takich samych wielokątów foremnych, a dokładniej używając trójkątów równobocznych, kwadratów i sześciokątów foremnych.

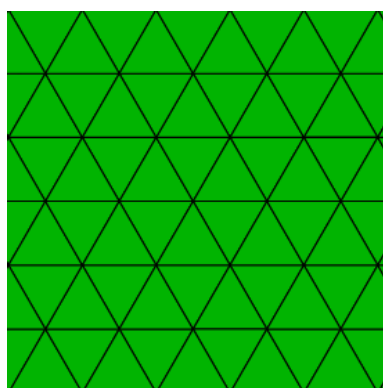


Należałoby sprawdzić, czy gdy będziemy dokładać kolejne płytki wokół pozostałych punktów (wierzchołków wielokąta foremnego), to czy wypełniona szczelnie będzie cała płaszczyzna wokół nich. Jest jednak oczywiste, że tak będzie. Dostajemy trzy jedyne parkietaże foremne.

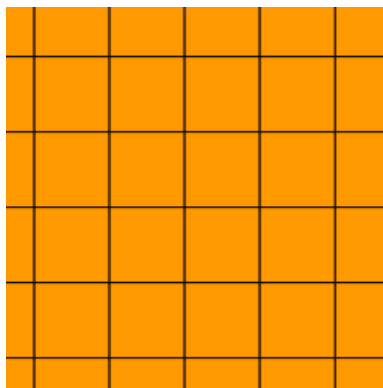
Wniosek 2.2.6 *Istnieją dokładnie trzy parkietaże foremne. Są to parkietaże o następujących oznaczeniach:*

$$3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3, \quad 4 - 4 - 4 - 4, \quad 6 - 6 - 6.$$

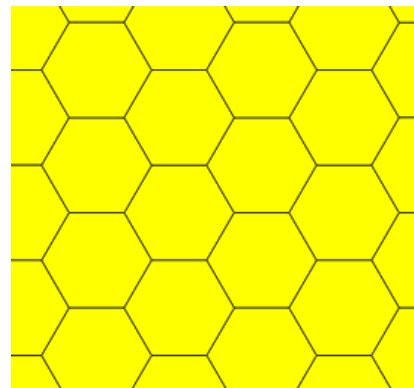
Parkietaże foremne



$$3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3$$



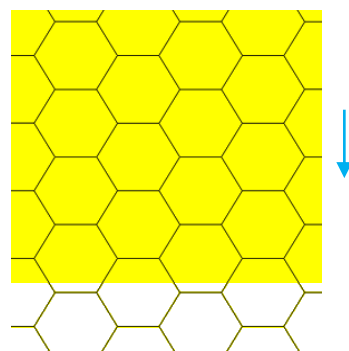
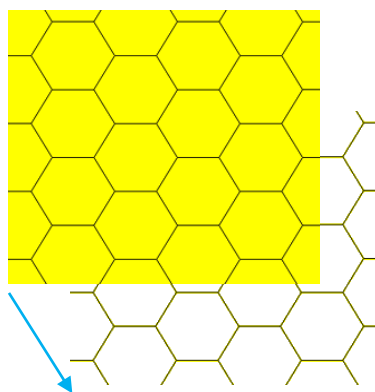
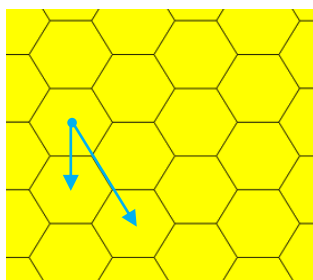
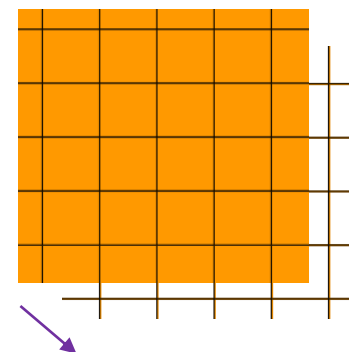
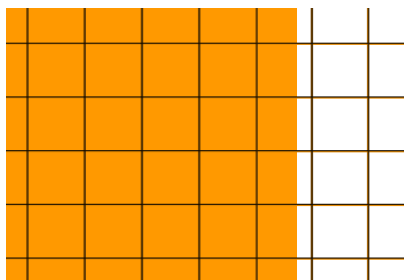
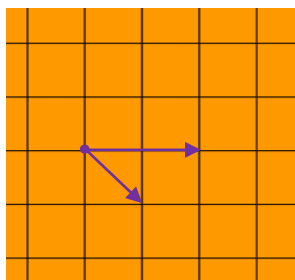
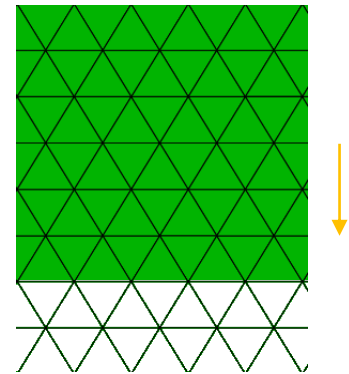
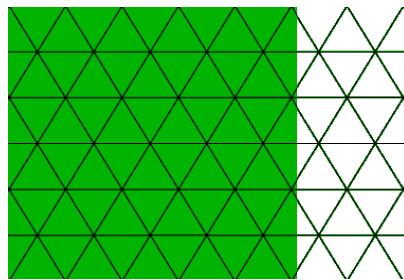
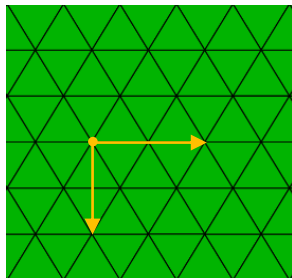
$$4 - 4 - 4 - 4$$



$$6 - 6 - 6$$

2.3. Parkietaże foremne są parkietażami z płaską grupą symetrii

Wszystkie trzy parkietaże foremne posiadają płaską grupę symetrii, ponieważ istnieją dla nich translacje w dwóch różnych kierunkach zachowuje wzór parkietażu. Wektory takich przykładowych par translacji zaprezentowane są na rysunkach poniżej.



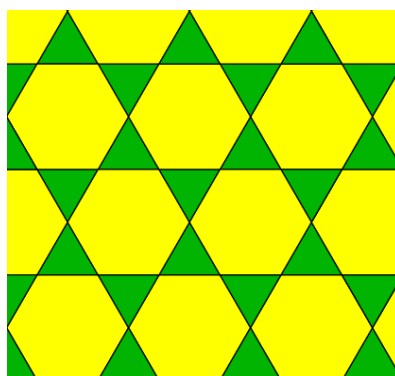
3. Parkietaże półforemne

W tym rozdziale wprowadzimy pojęcie parkietażu półforemnego oraz opiszemy wszystkie takie parkietaże na płaszczyźnie. Na końcu sprawdzimy czy parkietaże półforemne posiadają płaską grupę symetrii.

Definicja 3.1 *Parkietaż półforemny to parkietaż wielokątowy składający się różnych typów wielokątów foremnych, w którym wszystkie wierzchołki są przystające.*

Zgodnie z definicją, zauważamy, że różnica między parkietażami foremnymi a półforemnymi jest taka, że w tych pierwszych mógł występować tylko jeden rodzaj wielokąta, w drugich - możemy już używać różnych wielokątów. Jest to jedyna różnica, ponieważ wciąż wielokąty muszą być foremne oraz wierzchołki przystające.

Parkietaż zaprezentowany poniżej (Rysunek 1) jest utworzony z przystających trójkątów równobocznych oraz sześciokątów foremnych, również o tej samej długości boków. Jest on przykładem parkietażu półforemnego.

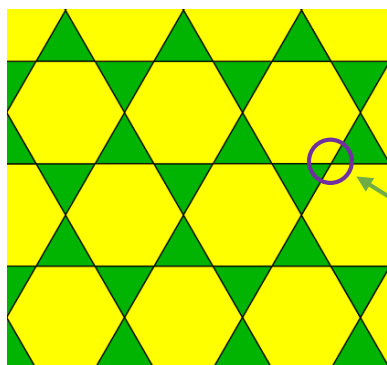


Rysunek 1

3.1. Oznaczenia parkietaży półforemnych

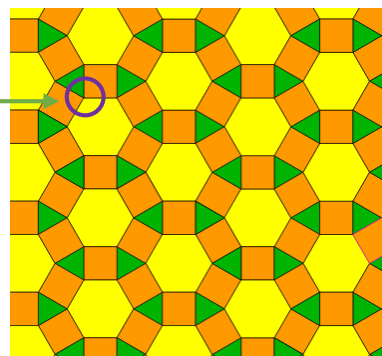
Parkietaże półforemne oznaczamy w sposób analogiczny do foremnych. Wierzchołki są przystające, więc wystarczy opisać wielokąty, które występują kolejno przy jednym, wybranym, wierzchołku parkietażu i będzie to równoważne z oznaczeniem całego parkietażu.

Spójrzmy na parkietaż na Rysunku 2 na następnej stronie. W jego wierzchołkach stykają się wierzchołki dwóch płytek w kształcie sześciokąta foremnego oraz dwóch w kształcie trójkąta foremnego. Ważna przy oznaczaniu parkietaży półforemnych jest kolejność, w jakiej płytki występują po sobie naokoło wierzchołka. Oznaczeniem tego parkietażu jest $3 - 6 - 3 - 6$, ponieważ trójkąty występują na przemian z sześciokątami.



Rysunek 2

3 – 6 – 3 – 6



Rysunek 3

4 – 3 – 4 – 6

Przy oznaczaniu nie jest istotne, od jakiego wielokąta zaczniemy wypisywać pozostałe. Wypisane poniżej oznaczenia do parkietażu zaprezentowanego na Rysunku 3, są sobie równoważne i każde z nich wyznacza dokładnie jeden, ten sam parkietaż.

$$4 - 3 - 4 - 6 \Leftrightarrow 3 - 4 - 6 - 4 \Leftrightarrow 4 - 6 - 4 - 3 \Leftrightarrow 6 - 4 - 3 - 4$$

3.2. Klasyfikacja parkietaży półforemnych

Aby odpowiedzieć na pytanie: ile jest różnych parkietaży półforemnych, musimy najpierw sprawdzić, jakimi kombinacjami różnych wielokątów foremnych, szczerlnie wypełnimy płaszczyznę dookoła jednego punktu. Następnie należy zbadać, czy wokół każdego punktu (wierzchołka wielokąta foremnego) płaszczyzna również będzie wypełniona. Dopiero, gdy ten element będzie zapewniony, będziemy mieli parkietaż.

Spostrzeżenie 3.2.1 *Wokół wierzchołka parkietażu półforemnego skupia się k kątów wewnętrznych wielokątów foremnych, które w sumie mają miarę 360° .*

Liczbę kątów skupiających się w jednym punkcie, możemy oszacować w następujący sposób: $3 \leq k < 6$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Oszacowanie od góry, wynika z tego, że w jednym punkcie może stykać się maksymalnie sześć trójkątów równobocznych. Miara kąta wewnętrznego trójkąta równobocznego wynosi 60° i jest ona najmniejsza ze wszystkich wielokątów foremnych (Fakt 2.2.3), dlatego niemożliwe byłoby ułożenie w jednym wierzchołku parkietażu większej liczby wielokątów foremnych. Przypadek z sześcioma trójkątami równobocznymi w wierzchołku daje parkietaż foremny, dlatego ograniczamy się do szukania możliwych kombinacji maksymalnie pięciu wielokątów foremnych. Oszacowanie od dołu jest następstwem Spostrzeżenia 2.2.4.

Sprawdźmy więc, jakimi kombinacjami niejednakowych wielokątów foremnych można wypełnić płaszczyznę dookoła jednego punktu, używając od trzech do pięciu figur:

1° Przypadek $k = 3$ wielokątów wokół wierzchołka.

Oznaczmy kolejne figury jako n_1 -ką foremny, n_2 -ką foremny oraz n_3 -ką foremny, przy czym $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$ i $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. Korzystając z Wniosku 2.2.5, dodajmy po jednym kącie wewnętrznym z każdego wielokąta foremnego:

$$\frac{(n_1 - 2) \cdot 180^\circ}{n_1} + \frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} + \frac{(n_3 - 2) \cdot 180^\circ}{n_3}.$$

Aby wielokąty szczelnie wypełniły całą płaszczyznę wokół ustalonego punktu, suma ta musi być równa 360° :

$$\frac{(n_1 - 2) \cdot 180^\circ}{n_1} + \frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} + \frac{(n_3 - 2) \cdot 180^\circ}{n_3} = 360^\circ.$$

Po przekształceniu otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{(n_3 - 2)}{n_3} = 2,$$

czyli

$$3 - \left(\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3} \right) = 2.$$

Ostatecznie dostajemy równość w postaci

$$(3.2.2) \quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że $3 \leq n_1 < 6$. Szacowanie z dołu wynika z założeń początkowych, górnie natomiast - bezpośrednio z równości (3.2.2). Dokładniej, gdy przyjmiemy, że $n_1 = 6$, pozostałe wielokąty muszą być również co najmniej sześciokątami foremnymi. Po podstawieniu do równania $n_1 = n_2 = n_3 = 6$ otrzymamy równość. Widać, że n_1 nie może być większe od 6, ponieważ w takim przypadku lewa strona równania będzie zawsze mniejsza od prawej. Złożenie w jednym wierzchołku trzech wielokątów w kształcie sześciokątów foremnych, to poznany wcześniej parkietaż foremny, stąd rozpatrujemy $n_1 < 6$. Sprawdźmy możliwe kombinacje wielokątów, stykających się w jednym wierzchołku, gdy $n_1 = 3$, $n_1 = 4$, $n_1 = 5$.

- $n_1 = 3$.

Podstawiamy wartość n_1 do wzoru (3.2.2) i dostajemy równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6}.$$

Z ostatniej równości od razu wynika, że $6 < n_2$, a ponieważ $n_2 \leq n_3$, dostajemy także nierówność

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{n_2},$$

a stąd $n_2 \leq 12$. Ostatecznie więc mamy oszacowanie $6 < n_2 \leq 12$.

- $n_1 = 4$.

Wtedy mamy równość

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4}.$$

Z równości tej wynika, że $4 < n_2$, a ponieważ $n_2 \leq n_3$, dostajemy także nierówność

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{n_2},$$

a wtedy $n_2 \leq 8$. Ostatecznie mamy oszacowanie $4 < n_2 \leq 8$.

- $n_1 = 5$.

Znów podstawiamy wartość n_1 do wzoru (3.2.2) i dostajemy równość

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{3}{10}.$$

Z ostatniej równości od razu wynika, że $4 < n_2$, a ponieważ $n_2 \leq n_3$, dostajemy także nierówność

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{n_2}, \quad \text{skąd} \quad n_2 \leq \frac{20}{3} < 7,$$

a stąd $n_2 < 7$. Ostatecznie mamy oszacowanie $4 < n_2 < 7$.

Dla każdego przypadku, podstawiamy wartości n_1, n_2 z podanego przedziału do wzoru (3.2.2), a następnie wyliczamy n_3 . Posługując się tą metodą otrzymujemy dwanaście kombinacji liczb $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, które spełniają równość (3.2.2). Są one następujące:

$$n_1 = 3, 6 < n_2 \leq 12, n_2 \leq n_3$$

- a) $n_1 = 3, n_2 = 7, n_3 = 42,$
- b) $n_1 = 3, n_2 = 8, n_3 = 24,$
- c) $n_1 = 3, n_2 = 9, n_3 = 18,$
- d) $n_1 = 3, n_2 = 10, n_3 = 15,$
- e) $n_1 = 3, n_2 = 11, n_3 = 13,2,$
- f) $n_1 = 3, n_2 = 12, n_3 = 12.$

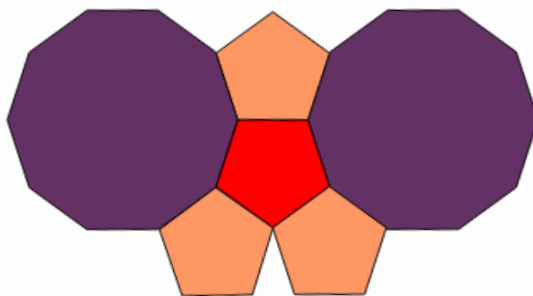
$$n_1 = 4, 4 < n_2 \leq 8, n_2 \leq n_3$$

- g) $n_1 = 4, n_2 = 5, n_3 = 20,$
- h) $n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = 12,$
- i) $n_1 = 4, n_2 = 7, n_3 \approx 9\frac{1}{3},$
- j) $n_1 = 4, n_2 = 8, n_3 = 8.$

$$n_1 = 5, 4 < n_2 \leq 6, n_2 \leq n_3$$

- k) $n_1 = 5, n_2 = 5, n_3 = 10,$
- l) $n_1 = 5, n_2 = 6, n_3 = 7,5.$

Jednak jedynie trzy z wypisanych powyżej kombinacji dają możliwość ułożenia parkietażu, a dokładnie kombinacje z podpunktów f), h) i j). Przykładów e), i) oraz l) w ogóle nie bierzemy pod uwagę, ponieważ $n_3 \notin \mathbb{N}$, co jest sprzeczne z założeniami początkowymi. W pozostałych przypadkach, płaszczyzna dookoła punktu co prawda będzie wypełniona całkowicie konkretnymi trzema wielokątami, ale nie da się tego zespołu figur powtórzyć przy wszystkich wierzchołkach. Spójrzmy niżej, na Rysunek 4, który ilustruje przykład z wierzchołkiem o oznaczeniu $5 - 5 - 10$ (co odpowiada otrzymanej powyżej kombinacji k)). Próbując pokryć płaszczyznę wokół pięciokąta foremnego, zaznaczonego na czerwono, wielokątami zgodnie z powyższym oznaczeniem, widzimy, że przy czterech wierzchołkach tej figury płaszczyzna jest szczelnie wypełniona. Jednak nie da się powtórzyć tego zespołu wielokątów przy piątym wierzchołku zaznaczonego pięciokąta. Wynika z tego, że z podanych wielokątów nie można stworzyć parkietażu, który wokół wszystkich wierzchołków spełniałby zadaną regułę, dotyczącą przystawiania wierzchołków parkietażu.



Rysunek 4

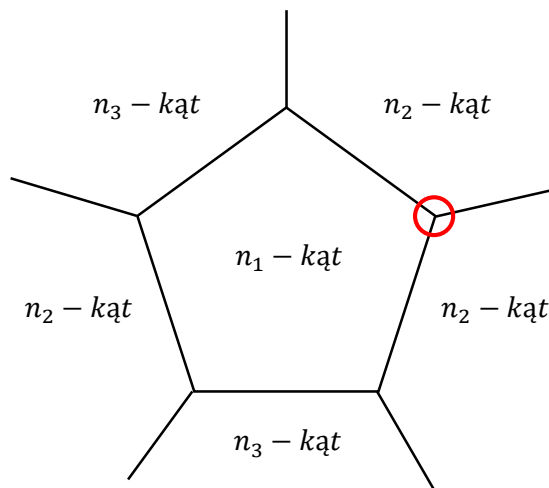
Analogiczna sytuacja występuje w przypadku pozostałych kombinacji, z wyjątkiem f), h) i j). Wynika to z następującej ogólnej obserwacji.

Spostrzeżenie 3.2.3 *Jeżeli jedna z liczb n_1 , n_2 , n_3 jest nieparzysta, a pozostałe dwie są od siebie różne, to nie istnieje parkietaż półforemny o oznaczeniu $n_1 - n_2 - n_3$.*

Uzasadnienie: Niech n_1 będzie liczbą nieparzystą oraz niech $n_2 \neq n_3$. Aby wzór parkietażu był zachowany, n_2 -kąt i n_3 -kąt muszą przylegać do kolejnych boków wielokąta n_1 na przemian. Łatwo jednak zauważyć, iż taka naprzemienność płytek byłaby możliwa tylko wtedy, gdyby n_1 było parzyste. W przeciwnym przypadku, przy jednym wierzchołku n_1 -kąta foremnego układ $n_1 - n_2 - n_3$ nigdy nie wystąpi.

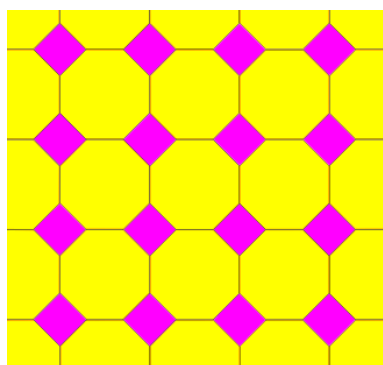
Powyższe uzasadnienie dobrze ilustruje Rysunku 5 widoczny na następnej stronie, na którym przedstawiony jest przypadek gdy $n_1 = 5$.

Zastosowanie Spostrzeżenia 3.2.3 wyklucza przypadki a), b), c), d), g), k).

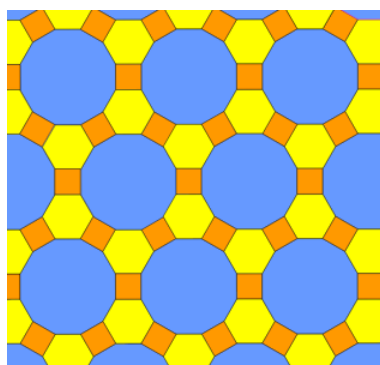


Rysunek 5

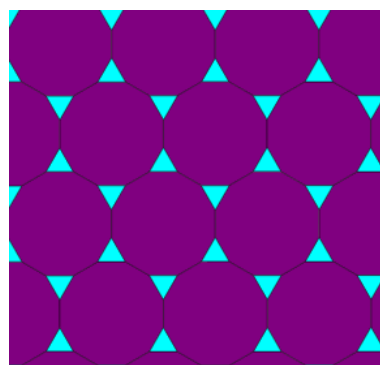
Podsumowując powyższe rozważania, stwierdzamy że parkietaże półforemne z trzema wielokątami foremnymi w jednym wierzchołku to przedstawione na rysunkach poniżej parkietaże 4 – 8 – 8, 4 – 6 – 12 oraz 3 – 12 – 12.



4 – 8 – 8



4 – 6 – 12



3 – 12 – 12

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy w punkcie stykają się cztery wierzchołki wielokątów foremnych.

2° Przypadek $k = 4$ wielokątów wokół wierzchołka.

Tak jak poprzednio oznaczmy figury jako n_1 -kąt foremny, n_2 -kąt foremny oraz n_3 -kąt foremny i n_4 -kąt foremny przy czym $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ i $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$. Rozważmy po jednym kącie wewnętrznym z każdego z tych czterech wielokątów i dodajmy je do siebie. Przyrównujemy tą sumę do 360° :

$$\frac{(n_1 - 2) \cdot 180^\circ}{n_1} + \frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} + \frac{(n_3 - 2) \cdot 180^\circ}{n_3} + \frac{(n_4 - 2) \cdot 180^\circ}{n_4} = 360^\circ.$$

Po przekształceniach, ostatecznie otrzymujemy poniższą równość

$$(3.2.4) \quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1.$$

Ponieważ $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ otrzymujemy następującą nierówność:

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} = \frac{4}{n_1},$$

a wtedy $n_1 \leq 4$. Ale gdy $n_1 = 4$ to $4 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ i widać, że równość (3.2.4) może zachodzić tylko dla $n_2 = n_3 = n_4 = 4$. Przypadek ten, czyli gdy $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4$, wyznacza parkietaż foremny utworzony z kwadratów. Ponieważ nie jest to parkietaż półforemny, ostatecznie mamy oszacowanie $3 \leq n_1 < 4$, a to daje równość $n_1 = 3$. Pozostaje nam jedynie sprawdzić możliwe kombinacje wielokątów, kiedy pierwszy z nich jest trójkątem, czyli gdy $n_1 = 3$.

W tej sytuacji, równość (3.2.4) przybierze postać

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1,$$

skąd

$$(3.2.5) \quad \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3}.$$

Ponadto dlatego że $n_2 \leq n_3 \leq n_4$, dostajemy także nierówność

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} = \frac{3}{n_2},$$

skąd

$$n_2 \leq \frac{9}{2} < 5.$$

Ostatecznie więc mamy oszacowanie $3 \leq n_2 < 5$.

Dalej szacujemy n_3 , przy dwóch możliwych do przyjęcia wartościach dla n_2 .

- $n_2 = 3$.

Podstawiamy wartość n_1 do wzoru (3.2.5) i dostajemy równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3},$$

skąd

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3}.$$

Dodatkowo, ponieważ $n_3 \leq n_4$, dostajemy także nierówność

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_3} = \frac{2}{n_3},$$

a wtedy $n_3 \leq 6$. Ostatecznie dostajemy oszacowanie $3 \leq n_3 \leq 6$.

- $n_2 = 4$.

Wtedy równość (3.2.5) przybiera postać

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3},$$

skąd

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{5}{12}.$$

Dodatkowo, ponieważ $4 = n_2 \leq n_3 \leq n_4$, dostajemy nierówność

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_3} = \frac{2}{n_3}, \quad \text{skąd} \quad n_3 \leq \frac{24}{5} < 5.$$

Ostatecznie więc mamy wtedy równość $n_3 = 4$.

Podstawiamy oszacowane wartości n_1, n_2, n_3 do równości (3.2.4) i następnie wyliczamy n_4 . Wszystkie możliwe kombinacje liczb $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$, które spełniają równość (3.2.4) to:

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 3, \quad 3 \leq n_3 \leq 6, \quad n_3 \leq n_4 \qquad n_1 = 3, \quad n_2 = 4, \quad n_3 = 4, \quad n_3 \leq n_4$$

$$\text{a')} \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 3, \quad n_4 \text{ nie istnieje}, \qquad \text{e')} \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 4, \quad n_3 = 4, \quad n_4 = 6.$$

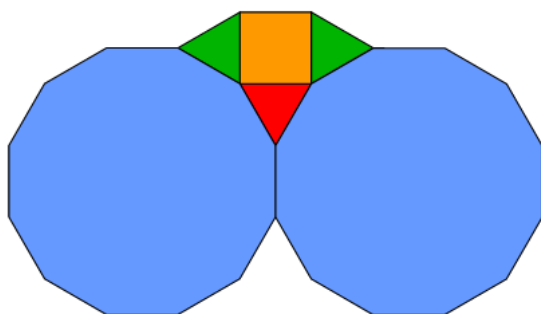
$$\text{b')} \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 4, \quad n_4 = 12,$$

$$\text{c')} \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 5, \quad n_4 = 7,5,$$

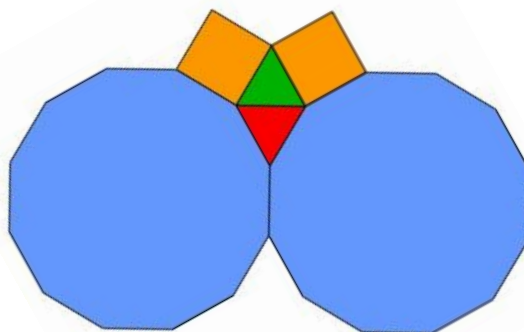
$$\text{d')} \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 6, \quad n_4 = 6.$$

W podpunkcie a') dostajemy równość $0 = \frac{1}{n_4}$ co jest sprzeczne. W podpunkcie c')

otrzymujemy $n_4 \notin \mathbb{N}$, więc tego przypadku również nie bierzemy pod uwagę. Pozostałe kombinacje wielokątów należy rozpatrzyć ze względu na kolejność ułożenie figur wokół jednego wierzchołka parkietażu. Wielokąty z podpunktu b') możemy ułożyć wokół wierzchołka parkietażu na dwa różne sposoby, a dokładnie w kolejności 3 – 4 – 3 – 12 oraz 3 – 3 – 4 – 12. W obu przypadkach spróbujemy pokryć fragment płaszczyzny wielokątami, które wskazane są w oznaczeniach oraz zadanej przez te oznaczenia kolejności, wokół czerwonego trójkąta równobocznego zgodnie z wybranym symbolem.



Rysunek 6



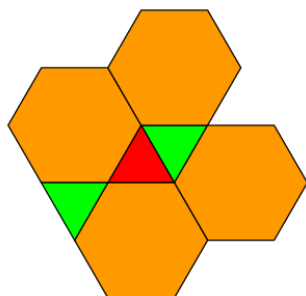
Rysunek 7

Na powyższych ilustracjach widać, że przy dwóch wierzchołkach zaznaczonego trójkąta płaszczyzna jest szczelnie wypełniona przy użyciu odpowiednich figur. Jednak w trzecim

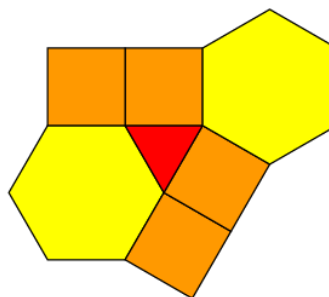
wierzchołku stykają się trójkąt i dwa dwunastokąty foremne, co jest sprzeczne z przystawaniem wierzchołków parkietażu z Definicji 3.1. Taka sama sytuacja występuje w obu przypadkach. Nie istnieje zatem parkietaż ani o oznaczeniu $3 - 4 - 3 - 12$ (Rysunek 6), ani $3 - 3 - 4 - 12$ (Rysunek 7).

Zajmijmy się teraz konfiguracją wielokątów z podpunktu d'). Tak jak poprzednio, wielokąty przy wierzchołku można ułożyć w dwóch różnych kolejnościach, mianowicie $3 - 6 - 3 - 6$ i $3 - 3 - 6 - 6$. Kombinacja $3 - 6 - 3 - 6$ daje parkietaż, który pokazany jest na następnej stronie na Rysunku 10. Nie istnieje jednak parkietaż o oznaczeniu $3 - 3 - 6 - 6$, ponieważ znów nie da się powtórzyć tego samego układu figur przy trzecim wierzchołku czerwonego trójkąta (Rysunek 8).

Sytuacja powtarza się, gdy rozważymy kombinację z ostatniego podpunktu, tzn. e'). Te konkretne wielokąty foremne można ułożyć wokół wierzchołka w kolejności $3 - 4 - 6 - 4$ oraz $3 - 6 - 4 - 4$. Pierwszy układ figur daje parkietaż, który zaprezentowany jest poniżej na Rysunku 11 na następnej stronie. Drugi wariant ułożenia wielokątów, o oznaczeniu $3 - 6 - 4 - 4$, nie tworzy parkietażu. Powód jest taki sam jak poprzednio, czyli nie jest możliwe powtórzenie tych samych wielokątów w identycznej kolejności w każdym wierzchołku, co jest warunkiem koniecznym do tego, aby parkietaż był półforemny. Na Rysunku 9 widać, jak przy jednym wierzchołku czerwonego trójkąta spotykają się wielokąty w innej kolejności niż zadana wzorem, a dokładnie trójkąt, kwadrat, sześciokąt foremny i kwadrat, zamiast trójkąt, sześciokąt foremny, kwadrat, kwadrat.

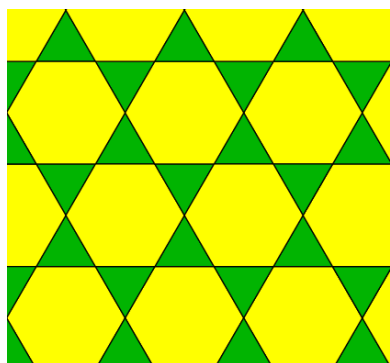


Rysunek 8



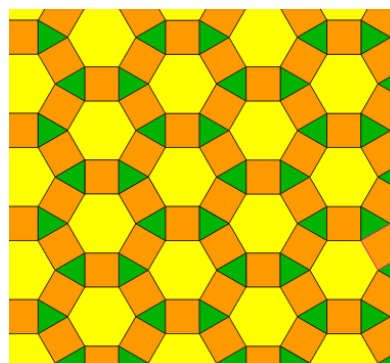
Rysunek 9

Podsumowując powyższe rozważania, stwierdzamy, że jedyne parkietaże półforemne z czterema wielokątami foremnymi w jednym wierzchołku to parkietaże z Rysunków 10 i 11.



$3 - 6 - 3 - 6$

Rysunek 10



$3 - 4 - 6 - 4$

Rysunek 11

Do rozpatrzenia pozostał ostatni przypadek czyli, gdy w punkcie stykać się będzie pięć wierzchołków wielokątów foremnych.

3° Przypadek $k = 5$ wielokątów wokół wierzchołka.

Zachowajmy oznaczenie z poprzednich przypadków oraz dodatkowo wprowadźmy piątą wielokąt foremny: n_5 -kąąt foremny przy czym $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$ oraz $n_1, \dots, n_5 \in \mathbb{N}$. Dodajmy po jednym kącie wewnętrznym z każdego wielokąta foremnego i przyrównajmy tą sumę do 360° :

$$\frac{(n_1 - 2) \cdot 180^\circ}{n_1} + \frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} + \dots + \frac{(n_5 - 2) \cdot 180^\circ}{n_5} = 360^\circ.$$

Wykonując kilka przekształceń ostatecznie dochodzimy do poniższej równości

$$(3.2.6) \quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}.$$

Zauważmy, że $n_1 = 3$, ponieważ $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$, a z tego wynika następująca nierówność

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} \leq \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} = \frac{5}{n_1}, \quad \text{skąd} \quad n_1 \leq \frac{10}{3} < 4.$$

Podstawiamy $n_1 = 3$ do równości (3.2.6) i dostajemy

$$(3.2.7) \quad \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{7}{6}.$$

Dalej szacujemy n_2 i dochodzimy do tego, że $n_2 = 3$, ponieważ $3 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$, a wtedy

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} = \frac{4}{n_2}, \quad \text{skąd} \quad n_2 \leq \frac{24}{7} < 4.$$

Podstawiamy wyliczone n_2 do równości (3.2.7) i otrzymujemy

$$(3.2.8) \quad \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6}.$$

n_3 również będzie równe 3, ponieważ $3 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$ i dalej

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} \leq \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_3} = \frac{3}{n_3}, \quad \text{skąd} \quad n_3 \leq \frac{18}{5} < 4.$$

Podstawiamy $n_3 = 3$ do równości (3.2.8) i otrzymujemy

$$(3.2.9) \quad \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2}.$$

Dalej szacujemy n_4 i dostajemy zakres $3 \leq n_4 \leq 4$, ponieważ $3 \leq n_4 \leq n_5$, a wtedy

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} \leq \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{n_4}.$$

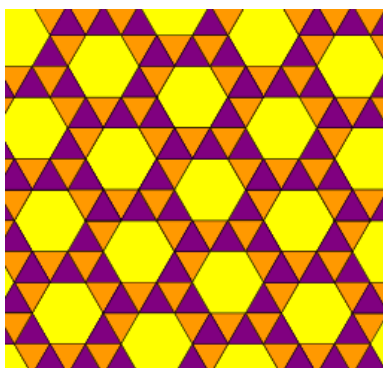
Podstawiamy $n_4 = 3$ i $n_4 = 4$ do równości (3.2.9) i otrzymujemy dwie możliwe kombinacje pokrycia płaszczyzny dookoła jednego punktu pięcioma wielokątami foremnymi:

a") $n_1 = n_2 = n_3 = 3, n_4 = 3, n_5 = 6,$

b") $n_1 = n_2 = n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 4.$

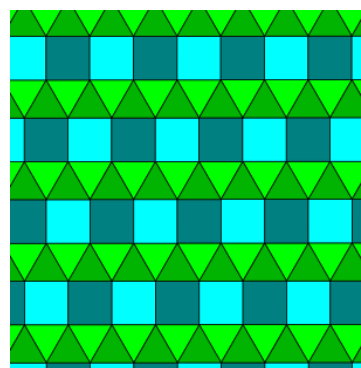
Wielokąty foremne z podpunktu a") można ułożyć wokół wierzchołka tylko w jeden sposób i będą one wyznaczały parkietaż półforemny o oznaczeniu $3 - 3 - 3 - 3 - 6$ (Rysunek 12). Natomiast figury z drugiego punktu, można już ułożyć na dwa różne sposoby. W jednym przypadku wielokąty wyznaczą wierzchołek o oznaczeniu $3 - 3 - 3 - 4 - 4$, a w drugim, gdy zmienimy kolejność ich występowania: $3 - 4 - 3 - 4 - 3$. Oba powyższe przypadki konfiguracji wielokątów wyznaczają parkietaż i są zilustrowane kolejno na Rysunkach 13 i 14.

Podsumowując rozważania w przypadku 3° , parkietaże półforemne z pięcioma wielokątami foremnymi w jednym wierzchołku to parkietaże z Rysunków 12,13 i 14.



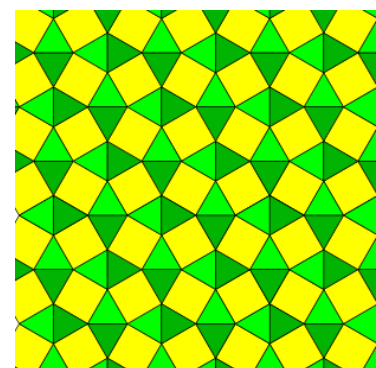
3 - 3 - 3 - 3 - 6

Rysunek 12



3 - 3 - 3 - 4 - 4

Rysunek 13



3 - 4 - 3 - 4 - 3

Rysunek 14

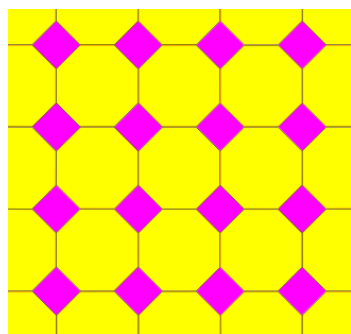
Rozpatrzyliśmy już wszystkie przypadki. Możemy wyciągnąć następujący wniosek:

Wniosek 3.2.9 *Istnieje dokładnie osiem parkietaży półforemnych. Są to parkietaże o następujących oznaczeniach:*

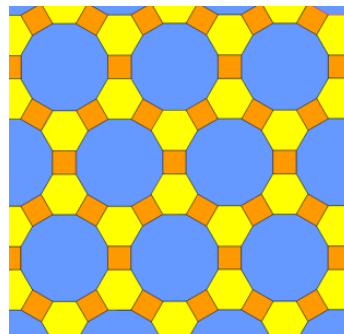
$$3-6-3-6, \quad 3-4-6-4, \quad 4-8-8, \quad 4-6-12, \quad 3-12-12, \\ 3-3-3-3-6, \quad 3-3-3-4-4, \quad 3-4-3-4-3.$$

Wszystkie parkietaże półforemne są zilustrowane poniżej.

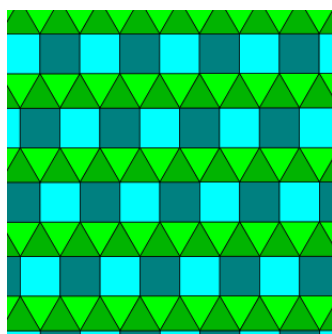
Parkietaże półforemne



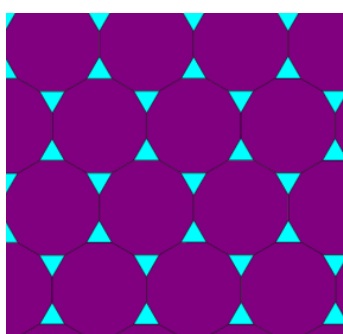
4-8-8



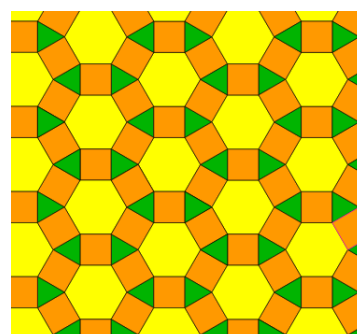
4-6-12



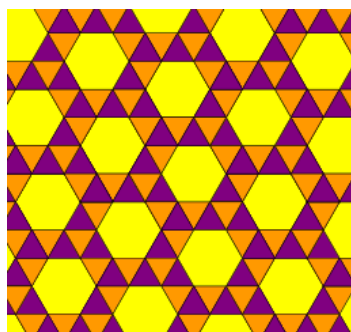
3-3-3-4-4



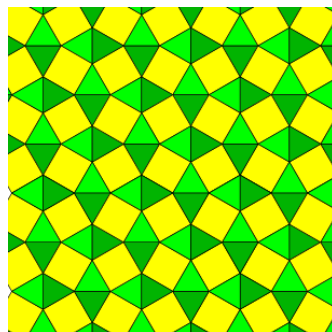
3-12-12



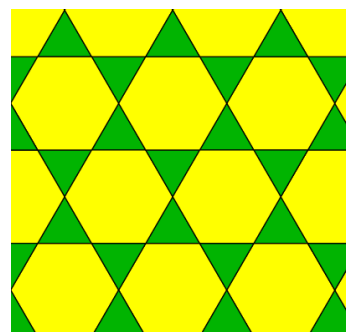
3-4-6-4



3-3-3-3-6



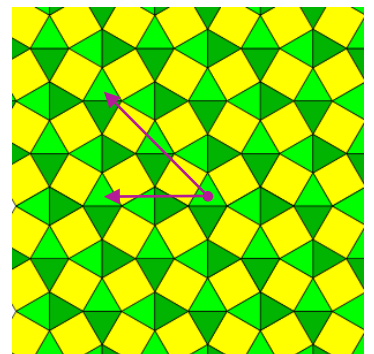
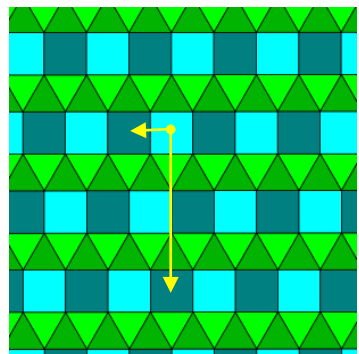
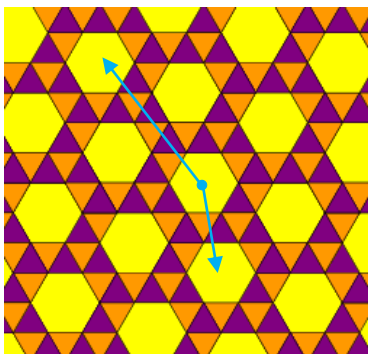
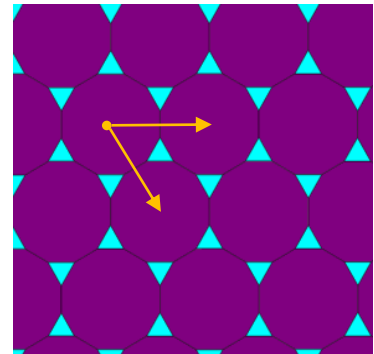
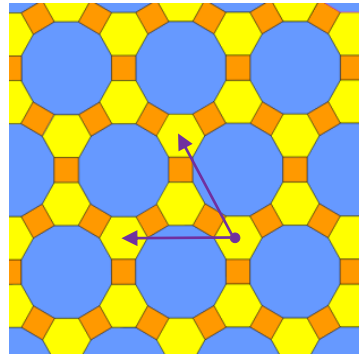
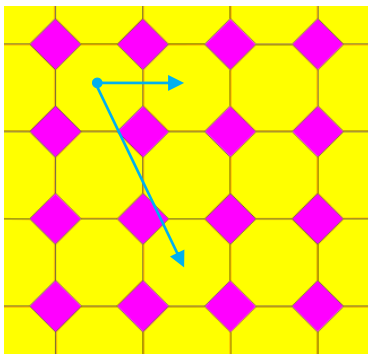
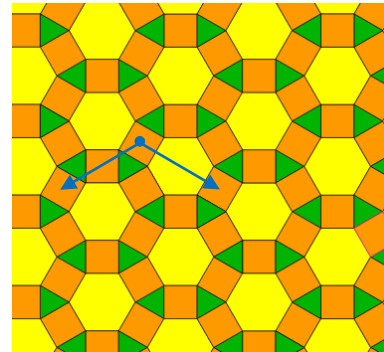
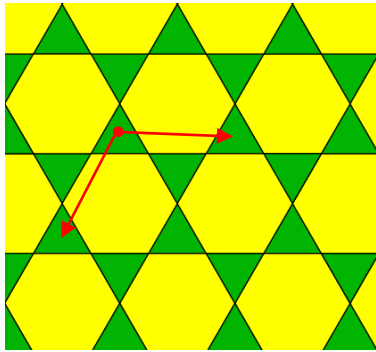
3-4-3-4-3



3-6-3-6

3.3. Parkietaże półforemne są parkietażami z płaską grupą symetrii

Każdy parkietaż półforemny posiada płaską grupę symetrii, ponieważ istnieją dla nich takie dwie translacje w dwóch różnych kierunkach, które zachowują wzór parkietażu. Wektory takich przykładowych par translacji zaprezentowane są na rysunkach poniżej.

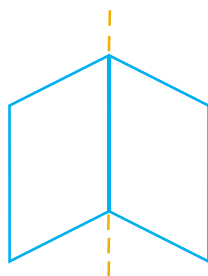


4. Parkietaże odbiciowe

Ten rozdział poświęcony jest parkietom odbiciowym. Sklasyfikujemy wszystkie rodzaje takich parkietów na płaszczyźnie oraz sprawdzimy czy posiadają płaską grupę symetrii.

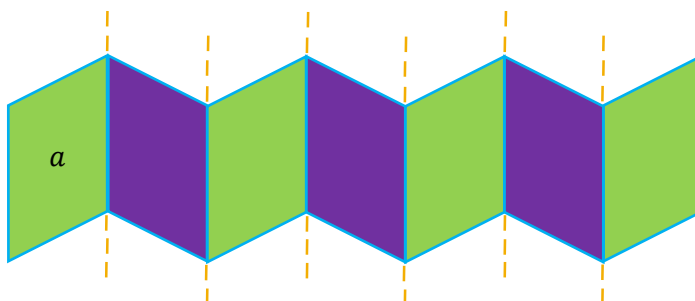
Definicja 4.1 *Parkiet odbiciowy to parkiet wielokątowy, w którym każde dwie płytki mające wspólny bok, są do siebie symetryczne względem osi zawierającej ten bok.*

Przykład płytek, które są do siebie symetryczne względem osi zawierającej bok, zaprezentowany jest na Rysunku 15. Widzimy, że są one swoim lustrzanym odbiciem.



Rysunek 15

Gdy powtórzmy czynność i kolejne płytki również będziemy odbijać od siebie względem osi zawierającej bok, zauważymy, że każde dwie przylegające do siebie płytki są przystające. Z przechodniości, każde dwie w takim ciągu kolejno odbijanych płytek są przystające.

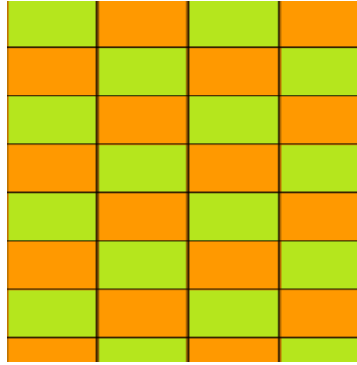


Rysunek 16

Z przechodniości przystawania możemy wywnioskować, że każda płytka w ciągu jest przystająca do wyjściowej płytki a . Ponieważ od każdej płytki odbiciowego parkietu, do każdej innej płytki, można przejść za pomocą podobnego ciągu kolejno odbijanych płytek, wszystkie płytki w odbiciowym parkiecie są przystające. Wynika z tego, że Definicja 4.1 wymusza użycie tylko jednej płytki. Zapiszmy spostrzeżenie:

Spostrzeżenie 4.2 *Wszystkie płytki w parkiecie odbiciowym są przystające.*

Parkiet utworzony z płytek w kształcie przystających prostokątów (Rysunek 17), jest przykładem parkietu odbiciowego.



Parkietaż odbiciowy

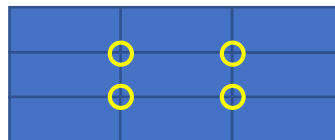
Rysunek 17

4.1. Klasyfikacja parkietażu odbiciowych

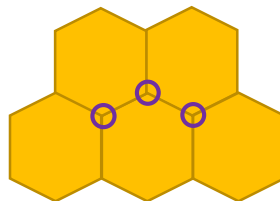
Aby znaleźć wszystkie parkietáže odbiciowe, zbadamy, w jaki sposób, zgodnie z regułą odbiciową, zapełnić płytkami fragment płaszczyzny wokół jednego punktu. Będziemy odbijać wielokąt względem boków wychodzących z ustalonego wierzchołka i obserwować, czy tworzy się częściowy parkietaż wokół tego konkretnego wierzchołka.

Parkietáže odbiciowe można sklasyfikować ze względu na typy wierzchołków jakie w nich występują. Powstaną tym samym trzy grupy tych parkietażu, które posiadają:

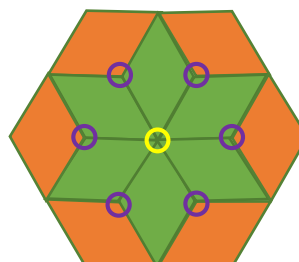
- tylko wierzchołki parzyste (czyli takie, w których spotyka się nieparzysta liczba płytek), np.:



- tylko wierzchołki nieparzyste (czyli takie, w których spotyka się nieparzysta liczba płytek), np.:

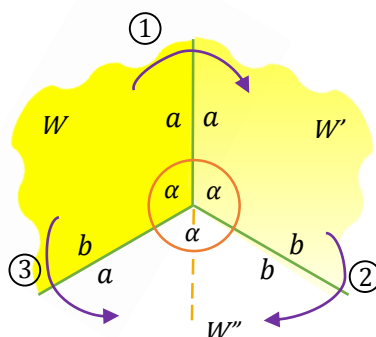


- wierzchołki parzyste oraz nieparzyste, np.:



Przyjrzyjmy się bliżej wierzchołkom nieparzystym.

Będziemy posilkować się Rysunkiem 18. Weźmy dowolny wielokąt W i oznaczmy długości jego boków przy kącie α jako a i b . Odbijmy ten wielokąt względem osi zawierającej bok a (strzałka ①). Wielokąt W' , który powstał po odbiciu również odbijamy, tym razem względem osi zawierającej bok b (strzałka ②) i dostajemy tym samym wielokąt W'' . Boki powstałego wielokąta, zgodnie z regułą odbiciową, powinny stykać się z bokami tej samej długości. Widać jednak, że przy jednym ramieniu kąta α , bok długości a , styka się z bokiem długości b . Oznacza to, że aby wielokąt tworzył parkietaż odbiciowy musi zachodzić równość $a = b$. Co więcej, płytkę W można przeprowadzić na pozycję płytki W'' także za pomocą pojedynczego odbicia, względem osi zawierającej bok b (strzałka ③). Aby odbita w ten sposób płytką W pokrywała się z płytką W'' , płytką W'' musi być osiowo symetryczna względem dwusiecznej kąta α . To samo dotyczy również płytek W i W' .



Rysunek 18

Spostrzeżenie 4.1.1 *W parkietażu odbiciowym, w którym występuje wierzchołek z nieparzystą liczbą płytek, dwusieczna kąta przy tym wierzchołku jest osią symetrii płytki przyległej do tego wierzchołka.*

W dalszej części rozdziału sklasyfikujemy te parkietaże odbiciowe, których wszystkie wierzchołki są parzyste. W kolejnym podrozdziale zajmiemy się klasyfikacją wszystkich pozostałych, czyli takich w których występuje przynajmniej jeden wierzchołek nieparzysty.

4.1.1. Klasyfikacja parkietaży odbiciowych z samymi parzystymi wierzchołkami

W tym podrozdziale postaramy się znaleźć wszystkie parkietaże odbiciowe z samymi wierzchołkami parzystymi. Weźmy płytkę n -kątną i jej kąty oznaczmy jako α_i , przy czym $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$. Oczywiście jest, że wszystkie kąty stykające się w jednym wierzchołku parkietażu odbiciowego mają równą miarę, dlatego aby otrzymać miarę jednego z nich dzielimy, kąt pełny na liczbę tych kątów w wierzchołku. Miara kąta α_i będzie wtedy równa:

$$\alpha_i = \frac{360^\circ}{k_i},$$

gdzie k_i oznacza liczbę płytek stykających się w wierzchołku kąta α_i .

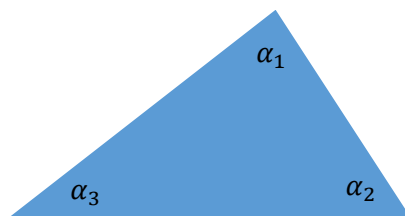
Ponieważ rozważamy przypadek parzystych wierzchołków, k_i będzie parzyste. Zapiszmy zatem, że $k_i = 2p_i$, gdzie $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$, $p_i \in \mathbb{N}$ oraz $p_i \geq 2$. Powyższy wzór przyjmie wtedy postać:

$$(4.1.1.1) \quad \alpha_i = \frac{360^\circ}{2p_i}.$$

Sprawdźmy jaką płytką, użytą parzyście wiele razy, można bez dziur i nakładania wypełnić fragment płaszczyzny wokół każdego jej wierzchołka. Oznaczmy figury jako n -kąty, przy czym $n \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq 3$.

A) Niech $n = 3$, czyli rozpatrujemy parkietaż odbiciowy o wszystkich wierzchołkach parzystych utworzony z trójkątów.

Weźmy dowolny trójkąt i oznaczmy jego kąty, w taki sposób jak na Rysunku 19.



Rysunek 19

Fakt 4.1.1.2 Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180° .

Korzystając z Faktu 4.1.1.2 możemy zapisać, że

$$(4.1.1.3) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ.$$

Dodatkowo, miarę każdego z kątów trójkąta możemy wyznaczyć, korzystając ze wzoru (4.1.1.1) i zapisać je jako:

$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{2p_1}, \quad \alpha_2 = \frac{360^\circ}{2p_2}, \quad \alpha_3 = \frac{360^\circ}{2p_3}, \quad \text{gdzie } p_1 \leq p_2 \leq p_3.$$

Podstawiając te dane do wzoru (4.1.1.3) otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{360^\circ}{2p_1} + \frac{360^\circ}{2p_2} + \frac{360^\circ}{2p_3} = 180^\circ.$$

Po przekształceniach doprowadzamy równość do poniższej postaci:

$$(4.1.1.4) \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1.$$

Ponieważ $p_1 \leq p_2 \leq p_3$ dostajemy poniższą nierówność

$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} = \frac{3}{p_1},$$

a stąd $2 \leq p_1 \leq 3$.

Obliczmy teraz p_2 i p_3 , kolejno dla wartości $p_1 = 2$ oraz $p_1 = 3$.

i) $p_1 = 2$.

Podstawiamy wartość p_1 do wzoru (4.1.1.4) i otrzymujemy równość

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{2}.$$

Patrząc na ostatnią równość, widać, że $2 < p_2$, a ponieważ $p_2 \leq p_3$, dostajemy także nierówność

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{p_2},$$

a stąd $p_2 \leq 4$. Ostatecznie więc dostajemy oszacowanie $2 < p_2 \leq 4$.

Podstawiamy zatem $p_2 = 3$, a następnie $p_2 = 4$ do równości (4.1.1.4) i obliczamy p_3 . Dostajemy dwa możliwe rozwiązania:

a) $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 6,$

b) $p_1 = 2, p_2 = 4, p_3 = 4.$

Wartości te podstawiamy do wzoru (4.1.1.1) i otrzymujemy miary wszystkich kątów dwóch możliwych trójkątów:

$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 2} = 90^\circ, \quad \alpha_2 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 3} = 60^\circ, \quad \alpha_3 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 6} = 30^\circ$$

oraz $\alpha_1 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 2} = 90^\circ, \quad \alpha_2 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 4} = 45^\circ, \quad \alpha_3 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 4} = 45^\circ.$

Parkietaze odbiciowe powstałe z tych dwóch rodzajów trójkątów, zilustrowane są na kolejnej stronie na Rysunkach 20 i 21.

ii) $p_1 = 3$.

Podstawiamy wartość p_1 do wzoru (4.1.1.4) i otrzymujemy równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{2}{3}.$$

Ponadto, dlatego że $p_2 \leq p_3$, dostajemy także nierówność

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{p_2},$$

a stąd $p_2 \leq 3$. Ostatecznie dostajemy oszacowanie $3 = p_1 \leq p_2 \leq 3$, czyli $p_2 = 3$.

Podstawiamy $p_1 = p_2 = 3$ do równości (4.1.1.4) i otrzymujemy wartość $p_3 = 3$. Prowadzi to nas do trzeciego rozwiązania w ramach rozpatrywanego przypadku A):

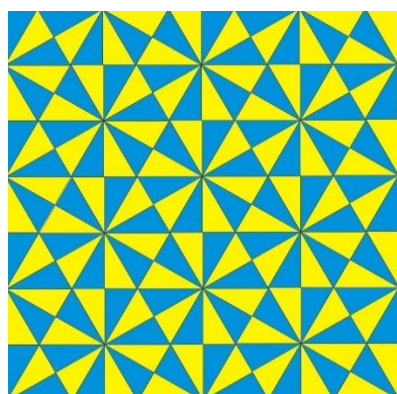
$$c) \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 3.$$

Podstawiamy wyliczone wartości do wzoru (4.1.1.1) i miary kątów przybierają postać

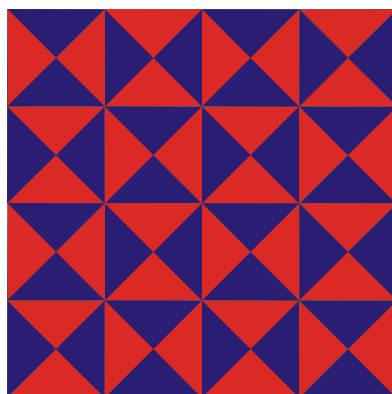
$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 3} = 60^\circ, \quad \alpha_2 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 3} = 60^\circ, \quad \alpha_3 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 3} = 60^\circ.$$

Dostajemy trójkąty równoboczne, z których utworzymy znany nam już parkietaż foremny z oznaczeniem $3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3$, widoczny na Rysunku 22.

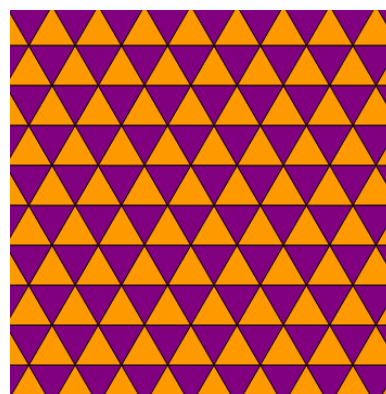
Otrzymaliśmy trzy możliwe powstałe z trójkątów parkietaże odbiciowe, z samymi parzystymi wierzchołkami:



Rysunek 20



Rysunek 21



Rysunek 22

Następnie sprawdzimy, czy istnieje parkietaż odbiciowy z wyłącznie parzystymi wierzchołkami, zbudowany z czworokątnych płytek.

B) Niech $n = 4$.

Weźmy dowolny czworokąt i oznaczmy jego kąty jako $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Fakt 4.1.1.5 Suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie wynosi 360° .

Korzystając z Faktu 4.1.1.5 możemy zapisać, że

$$(4.1.1.6) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ.$$

Miarę każdego z kątów czworokąta możemy zapisać, korzystając ze wzoru (4.1.1.1) w następujący sposób:

$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{2p_1}, \quad \alpha_2 = \frac{360^\circ}{2p_2}, \quad \alpha_3 = \frac{360^\circ}{2p_3}, \quad \alpha_4 = \frac{360^\circ}{2p_4},$$

gdzie $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$.

Podstawiając te dane do wzoru (4.1.1.6) otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{360^\circ}{2p_1} + \frac{360^\circ}{2p_2} + \frac{360^\circ}{2p_3} + \frac{360^\circ}{2p_4} = 360^\circ$$

Po przekształceniach doprowadzamy powyższą równość do postaci:

$$(4.1.1.7) \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = 2.$$

Chcemy oszacować p_1 . Wiemy, że $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$, więc dostajemy nierówność

$$2 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} = \frac{4}{p_1},$$

a stąd $p_1 \leq 2$, czyli $p_1 = 2$. Sprawdźmy, jakie wartości będą przyjmowały pozostałe p_i .

Podstawiamy wartość p_1 do wzoru (4.1.1.7) i otrzymujemy równość:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = 2, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{3}{2}.$$

Dodatkowo, ponieważ $p_2 \leq p_3 \leq p_4$, dostajemy poniższą nierówność

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} \leq \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} = \frac{3}{p_2},$$

a stąd $p_2 \leq 2$, więc tak naprawdę $p_2 = 2$. Po podstawieniu tej wartości do równości (4.1.1.7) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{3}{2}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = 1.$$

Dalej szacujemy p_3 i dochodzimy do tego, że $p_3 = 2$, ponieważ $2 \leq p_3 \leq p_4$, a wtedy

$$1 = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} \leq \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_3} = \frac{2}{p_3}.$$

Podstawiamy oszacowane wartości $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ do równości (4.1.1.7) i obliczamy, że $p_4 = 2$. Dostajemy, więc jedno możliwe rozwiązanie, gdzie $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2$. Po podstawieniu tych danych do wzoru (4.1.1.1), otrzymujemy odpowiednie miary kątów w czworokącie:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{360^\circ}{2 \cdot 2} = 90^\circ.$$

Wynika z tego, iż wszystkie kąty w płytce czworokątnej muszą być proste. Możemy wyciągnąć następujący wniosek:

Wniosek 4.1.1.8 *Dowolna prostokątna płytka tworzy parkietaż odbiciowy.*

Z Wniosku 4.1.1.8 wynika kolejny:

Wniosek 4.1.1.9 *Jest nieskończenie wiele parkietaży odbiciowych utworzonych z prostokątnych płytek, bo kształt takiej prostokątnej płytki jest dowolny.*

Przykład jednego z takich parkietaży zaprezentowany jest na stronie 26 na Rysunku 17.

Przeprowadźmy analogiczny dowód i dowiedzmy się czy istnieje jakiś parkietaż odbiciowy ze wszystkimi wierzchołkami parzystymi, zbudowany z przystających n -kątów, gdzie $n \geq 5$.

C) Niech $n \geq 5$.

Oznaczmy kąty wielokąta jako $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Taki sam tok rozumowania, który posłużył do wyprowadzenia Wniosku 2.2.5, daje następujący ogólny wzór na sumę kątów wewnętrznych w n -kącie:

$$(4.1.1.10) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Ta jak poprzednio, miarę każdego z kątów n -kąta możemy zapisać, posługując się wzorem (4.1.1.1), w następujący sposób:

$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{2p_1}, \dots, \alpha_n = \frac{360^\circ}{2p_n}, \quad \text{gdzie} \quad p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n.$$

Podstawiając te dane do wzoru (4.1.1.10) otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{360^\circ}{2p_1} + \frac{360^\circ}{2p_2} + \dots + \frac{360^\circ}{2p_n} = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Po przekształceniach doprowadzamy powyższą równość do postaci:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = n - 2.$$

Chcemy oszacować p_1 . Wiemy, że $p_1 \leq \dots \leq p_n$, więc dostajemy nierówność

$$n - 2 = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1} = \frac{n}{p_1}, \quad \text{skąd} \quad p_1 \leq \frac{n}{n - 2}.$$

Ponieważ $n \geq 5$ to dostajemy poniższe szacowanie

$$\frac{n}{n - 2} = 1 + \frac{2}{n - 2} < 2,$$

a z tego wynika, że $p_1 < 2$.

Widać, że lewa strona nierówności, nigdy nie będzie większa ani nawet równa 2. Jest to jednak sprzeczne z założeniami początkowymi, gdzie $p_i \geq 2$. Nie istnieje zatem żaden parkietaż odbiciowy o samych parzystych wierzchołkach, którego płytka byłaby n -kątem, dla $n \geq 5$.

Na tym skończyły się rozważania nad parkietażami odbiciowymi o wyłącznie parzystych wierzchołkach. Przypomnijmy, że do tej pory znaleźliśmy trzy parkietaże odbiciowe z trójkątów oraz nieskończoną rodzinę parkietaży odbiciowych utworzonych z prostokątów.

4.1.2. Klasyfikacja parkietaży odbiciowych z co najmniej jednym nieparzystym wierzchołkiem

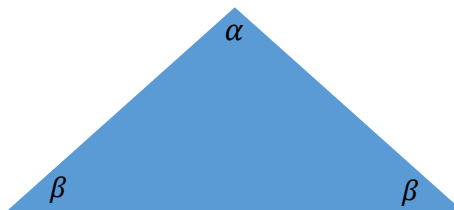
Chcemy znaleźć wszystkie parkietaże odbiciowe, które mają co najmniej jeden wierzchołek nieparzysty. Gdy się to uda, będziemy mieli opisany cały zbiór parkietaży odbiciowych.

Tak samo jak w poprzednim podrozdziale, oznaczymy figury jako n -kąty, przy czym $n \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq 3$. W każdym z poniżej rozpatrywanych przypadków, kąt α będzie tym kątem w płycie, którego wierzchołek jest nieparzystym wierzchołkiem parkietażu. W związku z tym, k_1 będzie nieparzyste. Zapijemy je jako $k_1 = 2r + 1$, gdzie $r \geq 1$.

Zacznijmy rozważania od trójkąta.

A') Niech $n = 3$.

Zgodnie ze Spostrzeżeniem 4.1.1 możemy rozpatrywać jedynie trójkąty równoramienne. Oznaczmy kąty w taki sposób jak na Rysunku 23.



Rysunek 23

Korzystając z Faktu 4.1.1.2. możemy zapisać, że

$$(4.1.2.1) \quad \alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Posługując się wzorem (4.1.1.1), zamieńmy miary kątów w trójkącie na:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{k_1} \quad \text{oraz} \quad \beta = \frac{360^\circ}{k_2},$$

gdzie $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ i $k_1, k_2 \geq 3$.

Podstawiamy powyższe miary kątów trójkąta do wzoru (4.1.2.1) i otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{360^\circ}{k_1} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{k_2} = 180^\circ.$$

Obie strony równania dzielimy przez 180° i dostajemy

$$(4.1.2.2) \quad \frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2} = \frac{1}{2}.$$

Po podstawieniu wartości $k_1 = 2r + 1$ do wzoru (4.1.2.2) otrzymujemy

$$\frac{1}{2r+1} + \frac{2}{k_2} = \frac{1}{2}.$$

Przekształcając powyższą równość, doprowadzamy k_2 do postaci

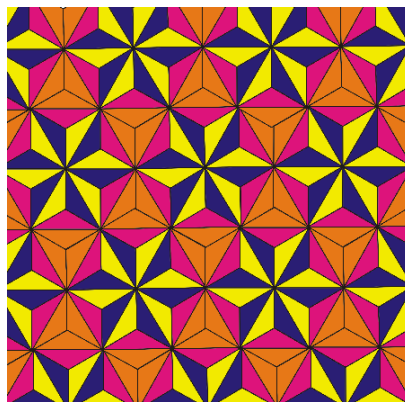
$$k_2 = \frac{8r+4}{2r-1} = 4 + \frac{8}{2r-1}, \quad \text{przy czym} \quad 2r-1 \neq 0.$$

Powyższa równość będzie prowadzi do sensownego rozwiązania, czyli takiego, że $k_2 \in \mathbb{N}$, tylko w przypadku gdy $r = 1$. W innym przypadku, mianownik $2r - 1$ w ostatnim ułamku, zawsze będzie liczbą nieparzystą większą niż 1, a w związku z tym, że w liczniku jest liczba parzysta, cały ułamek nie będzie liczbą naturalną. Tym samym wartość k_2 nie będzie naturalna, co jest sprzeczne z założeniem.

Gdy $r = 1$ to $k_2 = 12$, a po podstawieniu tej wartości do wzoru (4.1.2.2) otrzymujemy, że $k_1 = 3$. Szukane miary kątów wewnętrznych trójkąta to

$$\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ \quad \text{oraz} \quad \beta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

Parkietaż odbiciowy utworzony z przystających trójkątów, o miarach kątów wewnętrznych równych $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$, jest zaprezentowany na Rysunku 24.

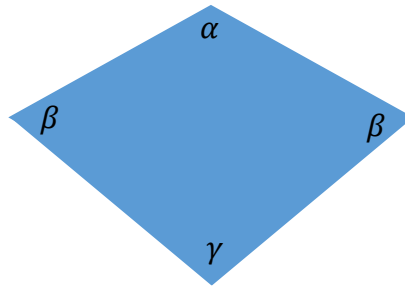


Rysunek 24

Następnie sprawdzimy, czy istnieje parkietaż złożony z przystających czworokątów, spełniający zadane wymagania, tzn. takie, że występuje w nich przynajmniej jeden wierzchołek nieparzysty.

B') Niech $n = 4$.

Zgodnie ze spostrzeżeniem 4.1.1.1 możemy rozpatrywać jedynie czworokąty, które są symetryczne względem dwusiecznej kąta α . Oznaczmy kąty poszukiwanych czworokątów jak na Rysunku 25.



Rysunek 25

Korzystając z Faktu 4.1.1.5 możemy zapisać, że

$$(4.1.2.3) \quad \alpha + 2\beta + \gamma = 360^\circ.$$

Korzystając ze wzoru (4.1.1.1) zamieniamy miary kątów w czworokącie na:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{k_1}, \quad \beta = \frac{360^\circ}{k_2} \quad \text{oraz} \quad \gamma = \frac{360^\circ}{k_3},$$

gdzie $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ i $k_1, k_2, k_3 \geq 3$.

Podstawmy te dane do wzoru (4.1.2.3). Otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{360^\circ}{k_1} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{k_2} + \frac{360^\circ}{k_3} = 360^\circ.$$

Obie strony równania dzielimy przez 360° i dostajemy

$$(4.1.2.4) \quad \frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2} + \frac{1}{k_3} = 1.$$

Wiemy, że k_1 jest nieparzyste, $k_1 = 2r + 1$. Podstawmy tą wartość do równości (4.1.2.4):

$$\frac{1}{2r+1} + \frac{2}{k_2} + \frac{1}{k_3} = 1,$$

i dalej

$$\frac{1}{2r+1} + \frac{2}{k_2} = 1 - \frac{1}{k_3}.$$

Ponieważ $k_3 \geq 3$ to $\frac{1}{k_3} \leq \frac{1}{3}$. Wykorzystując to, dostajemy nierówność:

$$\frac{1}{2r+1} + \frac{2}{k_2} = 1 - \frac{1}{k_3} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

a wtedy

$$\frac{1}{2r+1} + \frac{2}{k_2} \geq \frac{2}{3}.$$

Rachując dalej otrzymujemy

$$\frac{2}{k_2} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{2r+1}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{k_2} \geq \frac{4r-1}{12r+6}.$$

Ostatecznie dostajemy oszacowanie

$$k_2 \leq \frac{12r + 6}{4r - 1} = 3 + \frac{9}{4r - 1}.$$

Zgodnie z założeniami $r \geq 1$. Sprawdźmy, jakie będzie szacowanie k_2 dla kolejnych wartości r .

i) $r = 1$, to $k_1 = 3$ i $k_2 \leq 3 + \frac{9}{4 \cdot 1 - 1} = 6$, więc $k_2 \leq 6$,

ii) $r = 2$, to $k_1 = 5$ i $k_2 \leq 3 + \frac{9}{4 \cdot 2 - 1} = 4\frac{2}{7}$, więc $k_2 \leq 4$,

iii) $r \geq 3$, to $k_1 \geq 7$ i $k_2 \leq 3 + \frac{9}{4r - 1} \leq 3 + \frac{9}{4 \cdot 3 - 1} = 3\frac{9}{11}$, więc $k_2 = 3$.

Sprawdźmy teraz, jakie wartości będą przyjmowały k_3 , dla odpowiednich k_1 i k_2 z wyżej podanych przedziałów.

i) $k_1 = 3$ i $k_2 \leq 6$.

Podstawiamy wartość k_1 do wzoru (4.1.2.4) i dostajemy równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{k_2} + \frac{1}{k_3} = 1,$$

skąd

$$(4.1.2.5) \quad \frac{2}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{2}{3}.$$

Z ostatniej równości od razu wynika, że $3 < k_2$, więc $4 \leq k_2$. Obliczmy zatem k_3 dla kolejnych wartości $k_2 = 4$, $k_2 = 5$, $k_2 = 6$.

➤ $k_2 = 4$.

Podstawiamy wartość k_2 do wzoru (4.1.2.5) i dostajemy równość

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{k_3} = \frac{2}{3}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{k_3} = \frac{1}{6}, \quad \text{więc} \quad k_3 = 6.$$

➤ $k_2 = 5$.

Podstawiamy wartość k_2 do wzoru (4.1.2.5) i dostajemy równość

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{k_3} = \frac{2}{3}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{k_3} = \frac{4}{15}, \quad \text{więc} \quad k_3 = \frac{15}{4} \notin \mathbb{N}.$$

➤ $k_2 = 6$.

Podstawiamy wartość k_2 do wzoru (4.1.2.5) i dostajemy równość

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{k_3} = \frac{2}{3}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{k_3} = \frac{1}{3}, \quad \text{więc} \quad k_3 = 3.$$

Dostajemy dwa możliwe rozwiązania równości (4.1.2.4):

a) $k_1 = 3, k_2 = 4, k_3 = 6,$

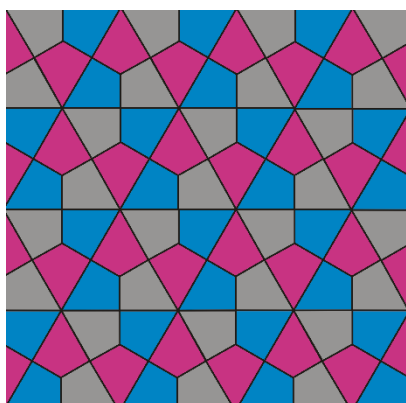
b) $k_1 = 3, k_2 = 6, k_3 = 3.$

Za pomocą tych wartości możemy obliczyć miary kątów poszukiwanych czworokątów:

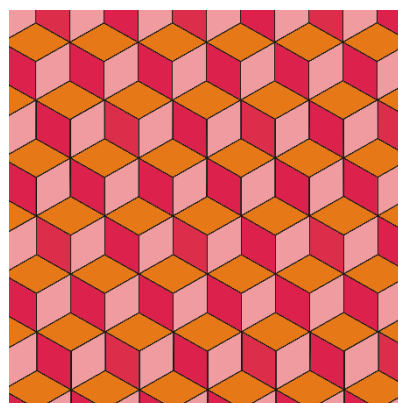
$$\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ, \quad \beta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ, \quad \gamma = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

oraz $\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ, \quad \beta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, \quad \gamma = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$

Parkietaze powstałe z tych czworokątów zilustrowane są na Rysunkach 26 i 27.



Rysunek 26



Rysunek 27

ii) $k_1 = 5$ i $k_2 \leq 4.$

Podstawiamy wartość k_1 do wzoru (4.1.2.4) i dostajemy równość

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{k_2} + \frac{1}{k_3} = 1,$$

skąd

(4.1.2.6)
$$\frac{2}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{4}{5}.$$

Obliczmy zatem k_3 kolejno dla $k_2 = 3$ oraz $k_2 = 4.$

➤ $k_2 = 3.$

Podstawiamy wartość k_2 do wzoru (4.1.2.6) i dostajemy równość

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{k_3} = \frac{4}{5}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{k_3} = \frac{2}{15}, \quad \text{więc} \quad k_3 = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}.$$

➤ $k_2 = 4.$

Podstawiamy wartość k_2 do wzoru (4.1.2.6) i dostajemy równość

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{k_3} = \frac{4}{5}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{k_3} = \frac{3}{10}, \quad \text{więc} \quad k_3 = \frac{10}{3} \notin \mathbb{N}.$$

W obu powyższych przypadkach $k_3 \notin \mathbb{N}$, co jest sprzeczne z założeniem.

Pozostał nam do rozpatrzenia ostatni przypadek, czyli gdy:

iii) $k_1 \geq 7$ i $k_2 = 3$.

Podstawmy wartość k_2 do wzoru (4.1.2.4). Otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{k_3} = 1,$$

skąd

$$(4.1.2.7) \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{3}.$$

Z ostatniej nierówności widać, że $k_3 > 3$. Ponieważ $k \in \mathbb{N}$ to $k_3 \geq 4$, a wtedy $\frac{1}{k_3} \leq \frac{1}{4}$.

Wykorzystując to, dostajemy nierówność:

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{k_3} \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \quad \text{skąd} \quad k_1 \leq 12.$$

W tym podrozdziale narzucamy na k_1 jeszcze jedno ograniczenie, mianowicie $k_1 \geq 7$. W efekcie więc, musimy sprawdzić jaka będzie wartość k_3 dla nieparzystych k_1 z przedziału $7 \leq k_1 \leq 12$, czyli dla $k_1 = 7, k_1 = 9$ i $k_1 = 11$. Podstawiamy kolejno k_1 do wzoru (4.1.2.7) i obliczamy k_3 . Otrzymujemy następujące pary rozwiązań:

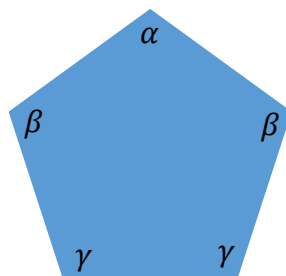
- $k_1 = 7, \quad k_3 = \frac{21}{4},$
- $k_1 = 9, \quad k_3 = \frac{27}{6},$
- $k_1 = 11, \quad k_3 = \frac{33}{8}.$

W każdym z powyższych przypadków $k_3 \notin \mathbb{N}$, co jest sprzeczne z założeniem. Takie parkietaże więc nie istnieją.

Zakończyliśmy tym samym poszukiwania czworokątnych płytek, które tworzą parkietaż odbiciowy. Rozpatrzmy teraz pięciokąty.

C') Niech $n = 5$.

Znów, powołując się na spostrzeżeniem 4.1.1.1 szukamy jedynie takich pięciokątów, które są symetryczne względem dwusiecznej jednego z kątów, w tym przypadku dwusiecznej kąta α . Oznaczmy kąty szukanego wielokąta tak jak na Rysunku 28.



Rysunek 28

Fakt 4.1.2.8 Suma miar kątów wewnętrznych w pięciokącie wynosi 540° .

Zgodnie z Faktem 4.1.2.8 możemy zapisać, że

$$(4.1.2.9) \quad \alpha + 2\beta + 2\gamma = 540^\circ.$$

Korzystając ze wzoru (4.1.1.1) zamieniamy miary kątów w pięciokącie na:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{k_1}, \quad \beta = \frac{360^\circ}{k_2} \quad \text{oraz} \quad \gamma = \frac{360^\circ}{k_3},$$

gdzie $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ i $k_1, k_2, k_3 \geq 3$.

Podstawmy te wielkości do wzoru (4.1.2.9). Otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{360^\circ}{k_1} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{k_2} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{k_3} = 540^\circ.$$

Gdy podzielimy obie strony równania przez 360° otrzymamy

$$(4.1.2.10) \quad \frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} = \frac{3}{2}.$$

Ponieważ założyliśmy, że k_1 będzie nieparzyste, zapiszmy je jako $k_1 = 2r + 1$, gdzie $r \geq 1$. Podstawmy tą wartość k_1 do wzoru (4.1.2.10). Otrzymujemy

$$\frac{1}{2r + 1} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} = \frac{3}{2}.$$

Przekształcając powyższą równość, doprowadzamy ją do postaci

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{6r + 1}{8r + 4}, \quad \text{przy czym} \quad 8r + 4 \neq 0.$$

Dodatkowo, ponieważ $k_2, k_3 \geq 3$ to $\frac{1}{k_2} \leq \frac{1}{3}$ oraz $\frac{1}{k_3} \leq \frac{1}{3}$. Wykorzystując to, dostajemy także nierówność

$$\frac{6r + 1}{8r + 4} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

a wtedy

$$\frac{6r + 1}{8r + 4} \leq \frac{2}{3}.$$

Ostatecznie dostajemy oszacowanie $r \leq \frac{5}{2} < 3$. Możliwe wartości, jakie może przyjąć r , to 1 i 2. Wtedy odpowiednio $k_1 = 3$ i $k_1 = 5$. Sprawdźmy więc, czy otrzymamy parkietaze odbiciowe dla tych zadanych dwóch wartości k_1 .

- $k_1 = 3$.

Podstawiamy wartość k_1 do wzoru (4.1.2.10) i dostajemy równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} = \frac{3}{2},$$

skąd

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{7}{12}.$$

Po kilku przekształceniach doprowadzamy powyższą równość do postaci

$$(4.1.2.11) \quad k_3 = \frac{12k_2}{7k_2 - 12}.$$

Ponieważ $k_3 \geq 3$, to możemy zapisać nierówność

$$k_3 = \frac{12k_2}{7k_2 - 12} \geq 3,$$

a stąd wynika oszacowanie $4 \geq k_2$.

Musimy rozpatrzyć dwie możliwości: $k_2 = 3$ i $k_2 = 4$. Obliczmy k_3 dla podanych wartości k_2 .

- $k_2 = 3$.

Podstawiamy wartość k_2 do wzoru (4.1.2.11) i dostajemy równość

$$k_3 = \frac{12 \cdot 3}{7 \cdot 3 - 12} = 4.$$

- $k_2 = 4$.

Podstawiamy wartość k_2 do wzoru (4.1.2.11) i dostajemy równość

$$k_3 = \frac{12 \cdot 4}{7 \cdot 4 - 12} = 3.$$

Otrzymaliśmy dwa następujące rozwiązania równości (4.1.2.10):

- $k_1 = 3, k_2 = 3, k_3 = 4,$
- $k_1 = 3, k_2 = 4, k_3 = 3.$

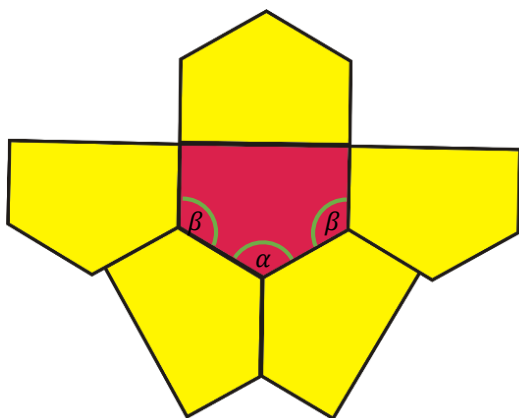
Za pomocą tych wartości możemy obliczyć miary kątów poszukiwanych pięciokątów:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ, \quad \beta = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ, \quad \gamma = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ,$$

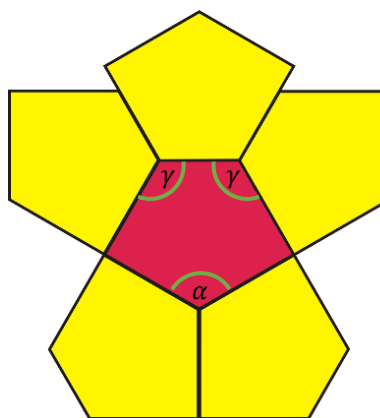
$$\text{oraz } \alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ, \quad \beta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ, \quad \gamma = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

Żaden z tych wielokątów nie będzie jednak tworzył parkietu odbiciowego.

Na Rysunku 29 przedstawiono pięciokąt o wymiarach kątów wewnętrznych kolejno: $120^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 90^\circ, 90^\circ$; na Rysunku 30: $120^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 90^\circ$. Na tych rysunkach zilustrowane są sytuacje, w których czerwone płytki, o zadanych wyżej wymiarach kątów wewnętrznych, zostały odbite wzdłuż każdej osi zawierającej boki tych płytek. Zauważmy, że przy wszystkich kątach wewnętrznych o mierze 120° , spotykają się trzy płytki, co oznacza, że wierzchołki przy tych kątach są nieparzyste. Zatem zgodnie ze Spostrzeżeniem 4.1.1, dwusieczna każdego z tych kątów powinna być osią symetrii płytki. To założenie nie będzie jednak spełnione przez żaden z omawianym pięciokątów. Płytki z Rysunku 28 nie może być symetryczne względem dwusiecznych wychodzących z kątów $\beta = 120^\circ$, ponieważ sąsiadujące z nimi kąty mają różną miarę, a dokładnie 120° oraz 90° . Analogiczna sytuacja jest w przypadku drugiej płytki. W tym przypadku dwusieczne kątów $\gamma = 120^\circ$, nie są osiami symetrii pięciokąta, ponieważ znów, miary sąsiednich z nimi kątów są od nich różne.



Rysunek 29



Rysunek 30

Sprawdźmy teraz, czy istnieje parkietaż odbiciowy złożony z pięciokątnych płytek, z przynajmniej jednym wierzchołkiem, w którym spotykają się będzie pięć płytek:

- $k_1 = 5$.

Podstawiamy wartość k_1 do wzoru (4.1.2.10) i dostajemy równość

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} = \frac{3}{2},$$

skąd

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{13}{20}.$$

Po kilku przekształceniach doprowadzamy powyższą równość do postaci

$$k_3 = \frac{20k_2}{13k_2 - 20}.$$

Ponieważ $k_3 \geq 3$, to możemy zapisać następującą nierówność

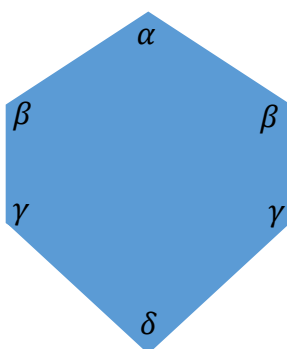
$$k_3 = \frac{20k_2}{13k_2 - 20} \geq 3,$$

a stąd wynika oszacowanie $k_2 \leq \frac{60}{19} < 4$, więc $k_2 = 3$. Po podstawieniu wartości k_1 oraz k_2 do wzoru (4.1.2.10) wyliczamy, że $k_3 = \frac{60}{19} \notin \mathbb{N}$, co jest sprzeczne z założeniem.

Tym samym pokazaliśmy, że nie istnieje żaden parkietaż odbiciowy utworzony z pięciokątnych płytek z co najmniej jednym wierzchołkiem nieparzystym. Sprawdźmy, jak będzie w przypadku sześciokątów.

D') Niech $n = 6$.

Zgodnie ze spostrzeżeniem 4.1.1.1 szukamy jedynie takich sześciokątów, które są symetryczne względem dwusiecznej kąta α . Oznaczmy kąty szukanego wielokąta w taki sposób jak na poniżej na Rysunku 31.



Rysunek 31

Fakt 4.1.2.12 Suma miar kątów wewnętrznych w sześciokącie wynosi 720° .

Korzystając z Faktu 4.1.2.12 możemy zapisać, że

$$(4.1.2.13) \quad \alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta = 720^\circ.$$

Korzystając ze wzoru (4.1.1.1) zamieniamy miary kątów w szukanym sześciokącie na:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{k_1}, \quad \beta = \frac{360^\circ}{k_2}, \quad \gamma = \frac{360^\circ}{k_3} \quad \text{oraz} \quad \delta = \frac{360^\circ}{k_4},$$

gdzie $k_1, \dots, k_4 \in \mathbb{N}$ i $k_1, \dots, k_4 \geq 3$.

Po podstawieniu tych wielkości do wzoru (4.1.2.13) otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{360^\circ}{k_1} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{k_2} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{k_3} + \frac{360^\circ}{k_4} = 720^\circ.$$

Gdy podzielimy obie strony równania przez 360° dostaniemy

$$(4.1.2.14) \quad \frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} + \frac{1}{k_4} = 2.$$

Ponieważ w tym rozdziale założyliśmy, że k_1 jest nieparzyste to zapiszmy je w postaci $k_1 = 2r + 1$, gdzie $r \geq 1$. Podstawmy tą wartość k_1 do wzoru (4.1.2.14). Otrzymujemy

$$\frac{1}{2r+1} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} + \frac{1}{k_4} = 2.$$

Przekształcając powyższą równość, doprowadzamy ją do postaci

$$\frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} + \frac{1}{k_4} = \frac{4r+1}{2r+1}, \quad \text{przy czym} \quad 2r+1 \neq 0.$$

Dodatkowo, ponieważ $k_2, k_3, k_4 \geq 3$ to $\frac{1}{k_2} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{k_3} \leq \frac{1}{3}$ oraz $\frac{1}{k_4} \leq \frac{1}{3}$. Wykorzystując to, dostajemy nierówność

$$\frac{4r+1}{2r+1} = \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} + \frac{1}{k_4} \leq \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

a wtedy

$$\frac{4r+1}{2r+1} \leq \frac{5}{3}.$$

Ostatecznie dostajemy oszacowanie $r \leq 1$, czyli jedyną wartością, którą musimy rozważyć jest $r = 1$. Wtedy $k_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Sprawdźmy więc, czy istnieje parkietaż odbiciowy dla $k_1 = 3$.

Podstawiamy wartość k_1 do wzoru (4.1.2.10) i dostajemy równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} + \frac{1}{k_4} = 2,$$

skąd

$$(4.1.2.15) \quad \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} + \frac{1}{k_4} = \frac{5}{3}.$$

Następnie rozważymy możliwe przypadki wartości k_2 i obliczymy dla nich k_3 oraz k_4 .

- **$k_2 = 3$.**

Podstawiamy wartość k_2 do wzoru (4.1.2.15) i dostajemy równość

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{k_3} + \frac{1}{k_4} = \frac{5}{3},$$

skąd

$$\frac{2}{k_3} + \frac{1}{k_4} = 1.$$

Po kilku przekształceniach doprowadzamy powyższą równość do postaci

$$k_4 = \frac{k_3}{k_3 - 2}.$$

Ponieważ $k_4 \geq 3$, możemy zapisać następującą nierówność

$$k_4 = \frac{k_3}{k_3 - 2} \geq 3,$$

skąd wynika oszacowanie $3 \geq k_3$, więc otrzymujemy jedyną możliwość, gdzie $k_3 = 3$. Podstawmy zatem wartości $k_2 = k_3 = 3$ do wzoru (4.1.2.15). Wyliczamy, że $k_4 = 3$.

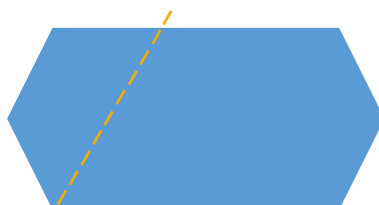
Otrzymaliśmy zatem następujące rozwiązania równości (4.1.2.14):

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 3.$$

Za pomocą tych wartości możemy obliczyć miary kątów wewnętrznych szukanego sześciokąta:

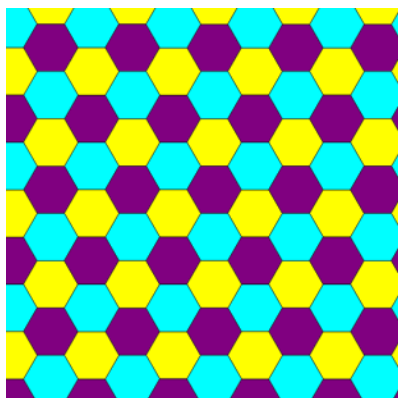
$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

Zauważmy, że jedynym sześciokątem o danych kątach wewnętrznych, spełniającym zarazem regułę odbiciową, będzie sześciokąt foremny. Jest to uwarunkowane tym, że boki tego wielokąta muszą być równej długości. W innym przypadku, dwusieczna któregoś z kątów nie byłaby równocześnie osią symetrii sześciokąta, a to kolidowałoby ze Spostrzeżeniem 4.1.1. Przykład takiego sześciokąta, który nie spełnia reguły symetryczności względem dwusiecznej, a ma wszystkie kąty równe 120° , widać na Rysunku 32.



Rysunek 32

Jedyny parkietaż odbiciowy złożony z sześciokątnych płytek widać poniżej na Rysunku 33.



Rysunek 33

W poprzednim podrozdziale, tj. 4.1.1. pokazaliśmy, że parkietaże zbudowane z trójkątów równobocznych oraz z kwadratów są odbiciowe. Powyżej udowodniliśmy, że tak samo jest w przypadku parkietażu z sześciokątów foremnych. Możemy zatem wyciągnąć następujący wniosek:

Wniosek 4.1.2.16 *Parkietaże foremne są również parkietażami odbiciowymi.*

Sprawdźmy teraz, czy dla $k_2 \geq 4$ istnieje jakiś parkietaż odbiciowy zbudowany z sześciokątnych płytek.

• **$k_2 \geq 4$.**

Ponieważ $k_2 \geq 4$ to $\frac{2}{k_2} \leq \frac{2}{4}$. Ponadto, wiemy że $k_4 \geq 3$, czyli $\frac{1}{k_4} \leq \frac{1}{3}$. Wykorzystując te nierówności i podstawiając je do wzoru (4.1.2.15) dostajemy:

$$\frac{5}{3} = \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} + \frac{1}{k_4} \leq \frac{2}{4} + \frac{2}{k_3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2}{k_3},$$

a wtedy

$$\frac{5}{6} \leq \frac{2}{k_3}.$$

Ostatecznie dostajemy oszacowanie $k_3 \leq \frac{12}{5} < 3$. Jest to sprzeczność z założeniem, które mówi o tym, że $k_3 \geq 3$. Jak widać, nie istnieje żaden inny niż foremny sześciokąt, który tworzyłby parkietaż odbiciowy.

Przeprowadźmy teraz ogólny dowód i dowiedzmy się czy istnieje jakiś parkietaż odbiciowy z co najmniej jednym wierzchołkiem nieparzystym, zbudowany z przystających n -kątów, gdzie $n \geq 7$.

E') Niech **$n \geq 7$** .

Oznaczmy kąty wielokąta jako $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, przy czym musimy pamiętać o tym, że figury, które bierzemy pod uwagę, muszą być symetryczne względem dwusiecznej kąta α_1 , więc kąty naprzeciwległe mają tę samą miarę. Korzystając ze wzoru (4.1.1.9) możemy zapisać, że suma kątów w n -kącie jest równa

$$(4.1.2.17) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Posługując się wzorem (4.1.1.1) miary kątów α_i możemy zapisać w następujący sposób:

$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{k_1}, \dots, \alpha_n = \frac{360^\circ}{k_n},$$

gdzie $k_1, \dots, k_n \geq 3$ i $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$.

Podstawiając te wartości do wzoru (4.1.2.17) otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{360^\circ}{k_1} + \frac{360^\circ}{k_2} + \dots + \frac{360^\circ}{k_n} = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Po przekształceniach doprowadzamy powyższą równość do postaci:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = \frac{n - 2}{2}.$$

Wiemy, że $k_1, \dots, k_n \geq 3$. Wykorzystując to, dostajemy także nierówność

$$\frac{n - 2}{2} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3} = \frac{n}{3},$$

skąd

$$\frac{n - 2}{2} \leq \frac{n}{3}, \quad \text{więc} \quad n \leq 6.$$

W podpunkcie E') bierzemy pod uwagę jedynie $n \geq 7$. Dostajemy sprzeczność z założeniem, więc widać, że nie istnieje żaden szukany n -ką, dla $n \geq 7$, który stworzyłby parkietaż odbiciowy.

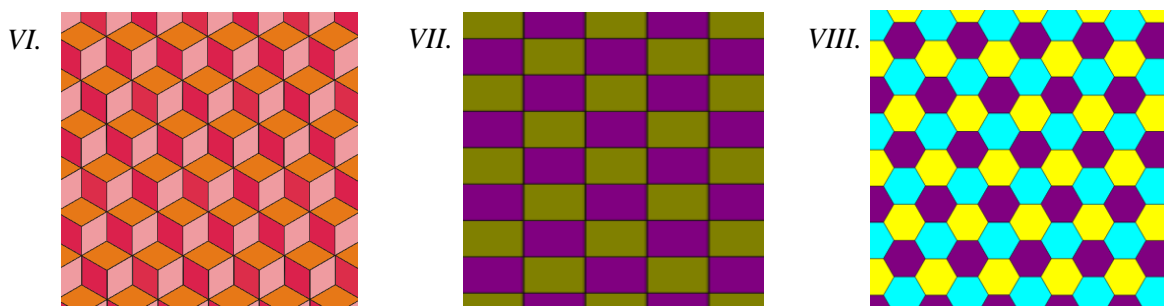
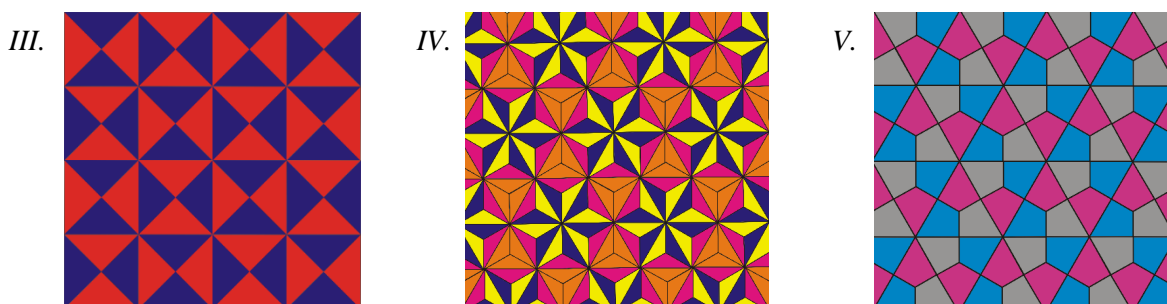
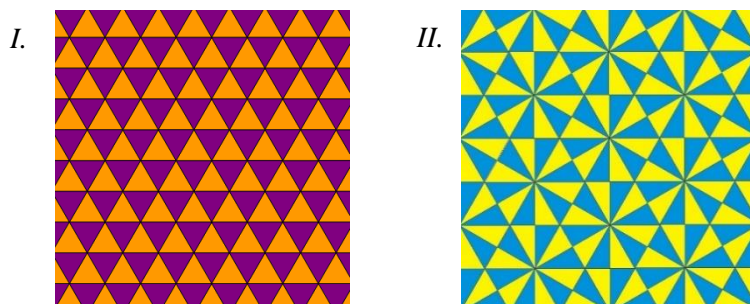
Znaleźliśmy tym samym wszystkie parkietaże odbiciowe.

Wniosek 4.1.2.18 *Na płaszczyźnie jest osiem rodzajów parkietaży odbiciowych (licząc parkietaże z prostokątów jako jeden rodzaj). Parkietaże te są utworzone z następujących płytek:*

- I. trójkątnych o miarach kątów wewnętrznych $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$,*
- II. trójkątnych o miarach kątów wewnętrznych $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$,*
- III. trójkątnych o miarach kątów wewnętrznych $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$,*
- IV. trójkątnych o miarach kątów wewnętrznych $120^\circ, 120^\circ, 30^\circ$,*
- V. czworokątnych o miarach kolejnych kątów wewnętrznych $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ, 60^\circ$,*
- VI. czworokątnych o miarach kolejnych kątów wewnętrznych $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$,*
- VII. czworokątnych o miarach kątów wewnętrznych $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$,*
- VIII. sześciokątnych o miarach kątów wewnętrznych $120^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 120^\circ$, oraz o jednakowych długościach boków (płytki foremne).*

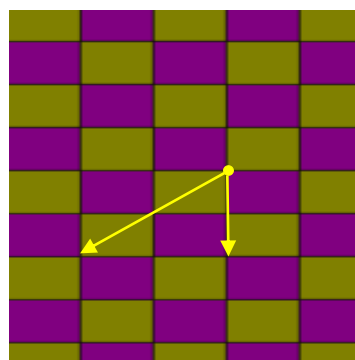
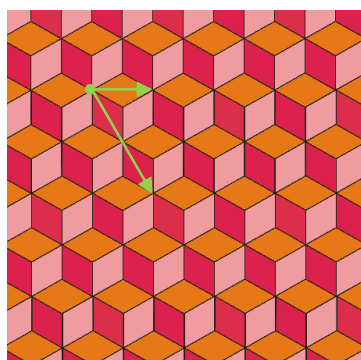
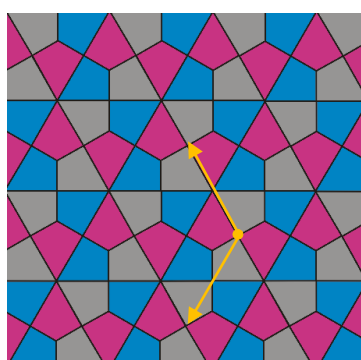
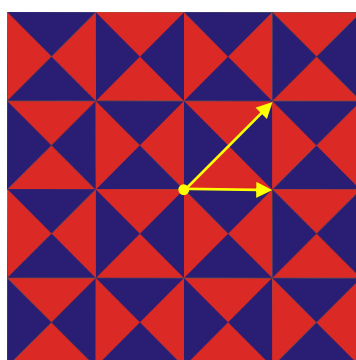
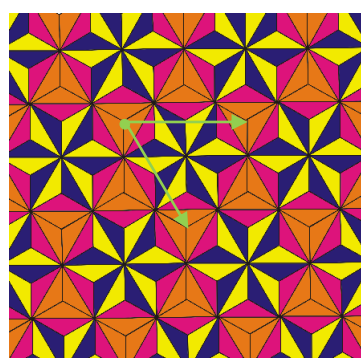
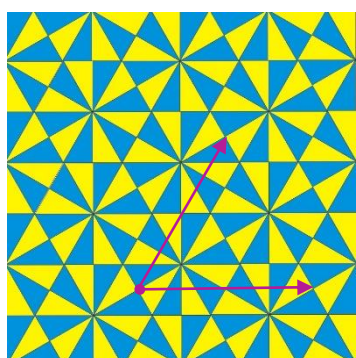
Parkietaże te są zilustrowane poniżej.

Parkietaże odbiciowe



4.2 Parkietaże odbiciowe są parkietażami z płaską grupą symetrii

Zgodnie z Wnioskiem 4.1.2.16 parkietaże foremne są parkietażami odbiciowymi, a w podrozdziale 2.3 zostało już pokazane, że posiadają one płaską grupę symetrii, więc nie będziemy ich rozpatrywać powtórnie. Okazuje się, że pozostałe parkietaże odbiciowe również posiadają płaską grupę symetrii. Wektory przykładowych par translacji w dwóch różnych kierunkach, które zachowują wzór parkietażu, zaprezentowane są na rysunkach poniżej.



Bibliografia

- [1] S. Jeleński, *Śladami Pitagorasa*. Wyd. VII. Warszawa: WSiP, 1974. Posadzkowanie, s. 195-207;
- [2] R. Tarczewski, *Topologia form strukturalnych*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2011.

Wszystkie rysunki wykonałam samodzielnie.

Przy sporządzeniu i opracowaniu rysunków korzystałam z programów:

- CorelDRAW 12, 2004, Corel Corporation;
- *Tessellation Creator*, dostępnego na stronie <http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3533>.