

## Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe

### Lista 5. Izometrie w modelu półpłaszczyznowym Poincare'go $H^2$ .

1. Uzasadnij, że dla każdego dwóch punktów  $A$  i  $B$  z  $H^2$  istnieje prosta w  $H^2$ , taka że odbicie w tej prostej przekształca  $A$  na  $B$ . Prostą tę nazywamy *symetralną* odcinka  $AB$ .
2. Uzasadnij, że symetralne boków trójkąta o wierzchołkach  $(0,1)$ ,  $(1,1)$  i  $(2,1)$  w modelu półpłaszczyznowym nie przecinają się. Wywnioskuj stąd, że nie istnieje okrąg opisany na tym trójkącie. Skonstruuj trójkąt, w którym symetralne boków są rozbieżne.
3. Uzasadnij, że dla każdego dwóch prostych w  $H^2$  istnieje izometria przekształcająca jedną na drugą. Czy może to być odbicie (inwersja)?
4. Dane są proste  $l$  i  $m$  oraz punkty  $A \in l$ ,  $B \in m$ . Uzasadnij, że istnieje izometria  $I$  taka, że  $I(l) = m$  oraz  $I(A) = B$ .
5. Uzasadnij, że dwa trójkąty o dwóch kątach idealnych są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy kąty przy wierzchołkach właściwych są równe.
6. Udowodnij, że trójkąty o jednym wierzchołku idealnym są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy ich kąty przy wierzchołkach właściwych są odpowiednio równe. Uzasadnij też, że w takich trójkątach suma dwóch kątów przy wierzchołkach zwykłych jest mniejsza niż  $180^\circ$ .
7. Uzasadnij cechy przystawania BKB i KBK trójkątów w  $H^2$ .

*Poniższe zadania rozwiąż sprowadzając ogólny przypadek do prostszego przypadku szczególnego, przekształcając dane występujące w zadaniu przez odpowiednią izometrię.*

8. Pokaż, że dla każdego dwóch prostych rozbieżnych  $l$  i  $m$  istnieje dokładnie jedna prosta  $k$  prostopadła do  $l$  i do  $m$ .
9. Uzasadnij, że jeżeli symetralne dwóch boków pewnego trójkąta są asymptotyczne, to symetralna trzeciego boku jest asymptotyczna do obu poprzednich symetralnych.
10. Pokaż, że dwie proste  $a$  i  $b$  prostopadłe do trzeciej prostej  $c$  są względem siebie rozbieżne. Pokaż to samo dla prostych  $a$  i  $b$  tworzących z trzecią prostą  $c$  kąty naprzemiennie równe.
11. Niech  $a$  i  $b$  będą prostymi rozbieżnymi. Sprawdź, że zbiór rzutów prostopadłych punktów prostej  $b$  na prostą  $a$  zawiera się w ograniczonym odcinku prostej  $a$ .