WYKŁAD 1. TEORIA AKSJOMATYCZNO-DEDUKCYJNA

TEORIA MATEMATYCZNA -

- wiedza dotycząca pewnego rodzaju obiektów i pojęć (np. pojęcie pola wielokątów na płaszczyźnie).

AKSJOMATY TEORII -

- stwierdzenia dotyczące pojęć teorii, które przyjmuje się jako niekwestionowane pewniki;
bazując na nich, metodą logicznej dedukcji, wyprowadza się i odkrywa dalsze prawa/zależności/twierdzenia danej teorii

DEDUKCJA - sposób precyzyjnego i opartego na logice wyprowadzania jednych stwierdzeń z drugich.

AKSJOMATY $\xrightarrow{\text{dedukcja}}$ dalsze twierdzenia

teoria aksjomatyczno-dedukcyjna

1.2. TEORIA POLA FIGUR WIELOKĄTNYCH.

1.2.1. Opis teorii pola.

Przykładem aksjomatyczno–dedukcyjnej teorii jest teoria pola figur wielokątnych. Właśnie teorią pola dla figur wielokątnych będziemy szerzej zajmować się na tym wykładzie, ilustrując na jej przykładzie rozmaite aspekty dotyczące teorii aksjomatyczno-dedukcyjnych.

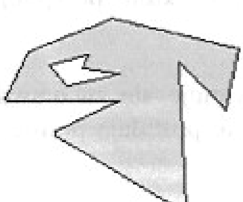
Zwykle pojęciem pola posługujemy się w sposób intuicyjny. Na tym wykładzie spróbujemy uściślić to pojęcie w języku matematycznym. Oczywiście możemy zrobić to na różne sposoby, gdyż jest wiele możliwych podejść do zagadnienia pola. Zależą one przede wszystkim od gustów matematyków oraz tego co uważają za prostsze lub bardziej popularne w danym okresie. Jednak podejścia te nie są ze sobą sprzeczne, a raczej uzupełniają się dając możliwość spojrzenia na to zagadnienie z różnych stron. Celem tego wykładu jest przedstawienie teorii pola w sposób aksjomatyczno–dedukcyjny, czyli wyrażenie teorii pola przez aksjomaty i stwierdzenia, które można z nich wyprowadzić.

DEFINICJA 1.1. ***Polem*** nazywamy funkcję przypisującą figurom wielokątnym *W* liczby rzeczywiste *P(W)*. Zakładamy, że funkcja pola posiada pewne własności, czyli spełnia aksjomaty pola.

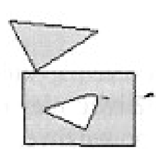
Aby moc rozważać teorię pola figur wielokątnych należy jeszcze wyjaśnić co rozumiemy przez pojęcie figury wielokątnej.

DEFINICJA 1.2. ***Figura wielokątna*** może być dowolnym wielokątem znanym z geometrii płaskiej, jednak pojęcie to rozszerza nam zbiór wielokątów o figury, które nie są wielokątami, ale spełniają niżej opisane warunki. Są to figury, które są sumą skończonej ilości nie zachodzących na siebie trójkątów. Figury nie zachodzące na siebie, to takie które nie mają wspólnych punktów wewnętrznych (rozłączność wnętrz). Przykładem figur wielokątnych są :

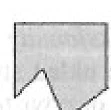
a)



b)



c)



1.2.3. Aksjomaty teorii pola figur wielokątnych.

Aksjomat sumy – AS

Jeśli wielokąt W jest sumą nie zachodzących na siebie wielokątów W_1 i W_2 to pole danego wielokąta jest równe sumie pól wielokątów W_1 i W_2 .

Aksjomat przystawania – AP

Wielokąty przystające mają równe pola.

Aksjomat monotoniczności – AM

Jeśli wielokąt W_1 zawiera się w wielokącie W_2 to pole wielokąta W_1 jest mniejsze lub równe polu wielokąta W_2 .

Aksjomat jednostki – AJ

Pole ustalonego kwadratu K_0 o boku długości 1 wynosi 1.

1.2.4. Dedukcyjny wywód teorii.

Fragment teorii pola posłuży nam jako przykład do przedstawienia dedukcyjnego wywodu teorii matematycznej. Krok po kroku korzystając z aksjomatów i geometrycznych własności figur wielokątnych nie związanych z pojęciem pola będziemy dowodzić nowych stwierdzeń. W konsekwencji otrzymamy uporządkowany zapis części teorii pola.

STWIERDZENIE 1.1. *Pole każdego kwadratu K o boku 1 wynosi 1.*

DOWÓD: Rozważany kwadrat K jest przystający do wyróżnionego kwadratu K_0 ,więc na mocy aksjomaty przystawania mają równe pola. Z aksjomatu jednostki wiemy, że pole K_0 wynosi jeden zatem $P(K) = 1$. ■

STWIERDZENIE 1.2. *Jeśli figury wielokątne $W_1, \ldots ,W_n$ nie zachodzą na siebie to pole figury, będącej sumą $W_1, \ldots ,W_n$ jest równe sumie pól poszczególnych figur, co możemy zapisać:*

$$P(W_1 \cup \ldots \cup Wn) = P(W_1) + \ldots + P(Wn).$$

DOWÓD: Należy zastosować (n-1) - krotnie aksjomat sumy. ■

STWIERDZENIE 1.3. *Pole prostokąta o bokach długości $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{m}$, gdzie n, m są liczbami naturalnymi jest równe iloczynowi długości boków i wynosi $\frac{1}{nm}$.*

DOWÓD: Z $n \cdot m$ przystających i nie zachodzących na siebie prostokątów o wymiarach $\frac{1}{n}$ na $\frac{1}{m}$ otrzymujemy kwadrat o boku długości 1. Z jednej strony pole kwadratu o boku długości jeden wynosi 1 (ze Stwierdzenia 1.1). Z drugiej strony na podstawie stwierdzenia1.2 wiemy, że pole powstałego kwadratu jest równe sumie pól $n{\cdot}m$ przystających prostokątów o bokach długości $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$. Zatem pole jednego prostokąta o bokach długości $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$ wynosi $\frac{1}{nm}$, co kończy dowód. ■

STWIERDZENIE 1.4. *Pole prostokąta W o bokach długości $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, gdzie a,b,c,d są liczbami naturalnymi, wynosi $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.*

DOWÓD: Bok długości $\frac{a}{b}$ dzielimy na a równych części, zaś bok długości $\frac{c}{d}$ dzielimy na c równych części. Nasz wyjściowy prostokąt jest w takim razie sumą $a{\cdot}c$

przystających i nie zachodzących na siebie prostokątów W' o bokach długości $\frac{1}{b}$ i $\frac{1}{d}$.

Pole takich prostokątów umiemy już obliczyć (stw.3) i wynosi ono $P(W') = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}$

Ostatecznie na mocy Stwierdzenia 1.2 pole prostokąta W wynosi:

$$P(W) = a\cdot c\cdot P(W') = a\cdot c\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}. \qquad \blacksquare$$

Udowodniliśmy więc, że pole prostokąta o wymiernych długościach boków x i y jest równe iloczynowi długości jego boków i wynosi xy. Zastanówmy się czy z aksjomatów możemy wyprowadzić analogiczny wzór na pole każdego prostokąta, czyli również takiego, którego długości boków mogą być niewymierne. Okazuje się, że tak.

STWIERDZENIE 1.5. *Pole prostokąta W o bokach dowolnych długości a, b wynosi $a \cdot b$.*

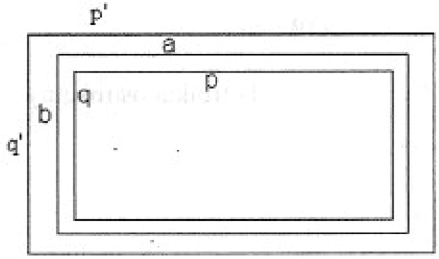
DOWÓD: Przypadek gdy a, b są liczbami dodatnimi wymiernymi udowodniony został w Stwierdzeniu 1.4. Zajmijmy się prostokątem W, którego przynajmniej jedna z długości boków a, b jest liczbą niewymierną. Wyróżniamy dwie takie sytuacje, to znaczy gdy jedna z długości jest liczbą niewymierną, lub gdy obie długości boków są niewymierne. Rozważmy najpierw sytuację z dwiema niewymiernymi długościami boków.

Weźmy pomocniczo dwa prostokąty W_{pq} *oraz* $W_{p'q'}$ o wymiernych długościach boków, których położenie względem danego prostokąta przedstawia rysunek. Długości boków rozważanych prostokątów przedstawiają nierówności:

$p < a < p'$ i $q < b < q'$

oraz

$P(W_{pq}) = p\cdot q \quad P(W_{p'q'}) = p'\cdot q'$



Na mocy aksjomatu monotoniczności:

$P(W) \geq P(W_{pq}) = p\cdot q$

$P(W) \leq P(W_{p'q'}) = p'\cdot q'$ czyli

$p\cdot q \leq P(W) \leq p'\cdot q'$

Każdą liczbę rzeczywistą możemy przybliżyć (zarówno z góry jak i z dołu) ciągiem liczb wymiernych. Dobierzmy więc takie wartości p, p', q, q' aby $p \to a$, $q \to b$, $p' \to a$, $q' \to b$. Wtedy:

$$\lim_{\substack{p\to a\\ q\to b}} p\cdot q \leq P(W) \leq \lim_{\substack{p'\to a\\ q'\to b.}} p'\cdot g'$$

Otrzymujemy zatem w granicy, że: $a\cdot b \leq P(W) \leq a\cdot b$

zatem ostatecznie $P(W) = a\cdot b$.

Przypadek gdy długość jednego z boków jest liczbą wymierną, a druga niewymierną rozważa się analogicznie. Zatem pokazaliśmy, że pole dowolnego prostokąta o bokach długości a, b wynosi $P(W) = a \cdot b$. ■

Korzystając jedynie z czterech aksjomatów i z kolejno udowodnionych stwierdzeń otrzymaliśmy wzór na pole dowolnego prostokąta. Ponadto okazuje się, że już na tym etapie, mając do dyspozycji tak mało stwierdzeń możemy wyprowadzić wzory na pola innych wielokątów. Zajmiemy się wzorem na pole trójkąta. Podobnie jak w przypadku prostokąta wyprowadzimy dany wzór w kilku etapach. Rozważmy najpierw trójkąty prostokątne.

STWIERDZENIE 1.6. *Pole trójkąta prostokątnego T o przyprostokątnych długości a, b wynosi* $P(T) = \dfrac{a \cdot b}{2}$.

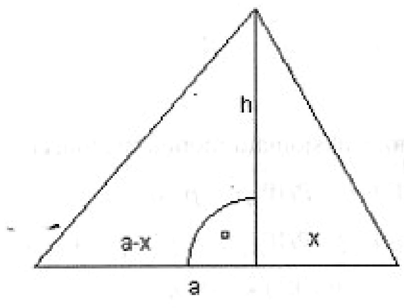
DOWÓD: Rozważmy prostokąt o bokach długości a, b. Z własności geometrycznych prostokątów wiemy, że przekątna prostokąta podzieli nam dany prostokąt na dwa przystające i prostokątne trójkąty. Z jednej strony pole prostokąta wynosi ab (Stwierdzenie 1.5). Z drugiej strony na podstawie Stwierdzenia 1.2 mamy, że jest sumą pól dwóch przystających trójkątów. Na mocy aksjomatu przystawania, pola trójkątów są równe więc pole jednego trójkąta jest połową pola prostokąta. ■

STWIERDZENIE 1.7. *Pole dowolnego trójkąta T wynosi* $P(T) = \dfrac{a \cdot h}{2}$

gdzie a - długość boku trójkąta, h – długość wysokości trójkąta opuszczonej na bok a.

DOWÓD:

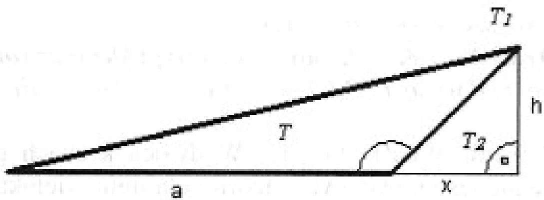
1. T- trójkąt ostrokątny



Wysokość h opuszczona na bok a dzieli go na dwie części długości x i $(a-x)$. Dodatkowo wysokość h dziel nam trójkąt T na dwa trójkąty prostokątne, których długości przyprostokątnych są równe odpowiednio x, h oraz $(a-x)$, h. Pola powstałych trójkątów umiemy obliczyć, a korzystając z faktu udowodnionego w Stwierdzeniu 1.2 otrzymujemy, że

$$P(T) = \frac{x \cdot h}{2} + \frac{(a-x) \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

2. T– trójkąt rozwartokątny



Z wysokość h opuszczonej z wierzchołka naprzeciw największego kąta oraz boków b, a, x, powstał trójkąt prostokątny T_1 polu $\frac{(a+x)\cdot h}{2}$, natomiast pole trójkąta prostokątnego T_2 wynosi $\frac{x\cdot h}{2}$ (Stwierdzenie 1.6). Zatem na mocy Stwierdzenia 1.2 otrzymujemy równości:

$$P(T) + P(T_2) = P(T_1)$$

$$P(T) = P(T_1) - P(T_2)$$

$$P(T) = \frac{(a+x)\cdot h}{2} - \frac{x\cdot h}{2}.$$

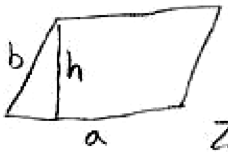
Co daje szukany wzór $$P(T) = \frac{a\cdot h}{2}$$ ■

4. Metoda alg. dedukcyjna może nie tylko dowodzić stwierdzeń, ale też obalić (dowodzić nieprawdziwości)

PRZYKŁAD. STW A. Pole wypukłego czworokąta W o kolejnych bokach a, b, c, d wynosi $P(W) = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

Rozważmy równoległobok W o podstawie a i wysokości h, jak na rysunku.

Wtedy $P(W) = a \cdot h$. $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2} = a \cdot b$



$b > h$ więc $P(W) = ah < a \cdot b = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$

$P(W) \neq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ dla równoległoboku.

Zatem stwierdzenie A nieprawdziwe.