ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWALNE. LISTA 1.

O rozmaitościach topologicznych

1. Uzasadnij, że jeśli w definicji rozmaitości topologicznej warunek lokalnej euklidesowości zastąpimy którymkolwiek z następujących warunków:
   (a) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą w R^n,
   (b) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z całą przestrzenią R^n,
   to otrzymamy definicję równoważną.
2. Uzasadnij, że każdy otwarty podzbiór rozmaitości topologicznej jest rozmaitością topologiczną.
3. Uzasadnij, że jeśli rozmaitość M jest spójna, to jest też *drogowo spójna*, tzn. każde dwa punkty $p, q \in M$ można połaczyć ciągła krzywą $\gamma : [0, 1] \to M$ (taką, że $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$). Wskazówka: dla ustalonego punktu p rozważ zbiór tych punktów q, które można połaczyć z p krzywą ciągła.
4. Udowodnij, że jeśli (U, φ) jest mapą na rozmaitości M, zaś K jest zwartym podzbiorem $\varphi(U)$, to zbiór $\varphi^{-1}(K)$ jest (a) domknięty w M, (b) zwarty. Pokaż też, że jeśli K jest domknięty w $\varphi(U)$ to $\varphi^{-1}(K)$ nie musi być domknięty w M.
5. Pokaż, że jeśli przestrzeń topologiczna ma przeliczalną bazę, to z każdego jej pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać przeliczalne podpokrycie.
6. Korzystając z zadań 4 i 5 uzasadnij, że każda rozmaitośc M jest przeliczalną sumą otwartych podzbiorów homeomorficznych z otwartymi kulami w R^n, których domknięcia w M są homeomorficzne z domkniętymi kulami w R^n.

Zgodność map i atlasów, rozmaitości gładkie

7. Uzasadnij, że lokalnie wokół każdego punktu $(x, y) \neq (0, 0)$ współrzędne biegunowe na R^2 są zgodne ze współrzędnymi kartezjańskimi.
8. Pokaż, że współrzędne geograficzne na sferze S^2 (określone na dopełnieniu biegunów i jednego z południków) są zgodne ze standardową strukturą na S^2. Wskazówka: skorzystaj z parametrycznego równania sfery z użyciem współrzędnych geograficznych.
9. Uzasadnij, że zgodność atlasów jest relacją symetryczną i przechodnią.
10. Uzasadnij, że każdy atlas A na rozmaitości M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym (złożonym ze wszystkich map na M zgodnych z A).
11. Uzasadnij, że produkt $M \times N$ rozmaitości topologicznych jest rozmaitością topologiczną. Zakładając, że M i N są rozmaitościami gładkimi, opisz naturalny atlas definiujący strukturę gładką na produkcie (i sprawdź, że mapy są gładko zgodne).
12. Znajdź gładki atlas na R^1 niezgodny ze standardowym. Zrób to samo dla S^1.

Własności ogólne odwzorowań przejścia

13. Uzasadnij, że dla $k \geq 1$ nie istnieje C^k-dyfeomorfizm pomiędzy otwartymi podzbiorami w R^n i R^m gdy $n \neq m$. Pozwoli to określić pojęcie wymiaru gładkiej rozmaitości w sposób niezależny od topologicznego (znacznie trudniejszego) twierdzenia o nieistnieniu homeomorfizmu pomiędzy otwartymi podzbiorami w R^n i R^m.
14. Uzasadnij, że jakobian odwzorowań przejścia pomiędzy mapami w C^k-rozmaitości, dla $k > 0$, jest w każdym punkcie niezerowy.

Funkcje gładkie na rozmaitościach

15. Niech M będzie rozmaitością gładką, $p \in M$ ustalonym punktem, zaś $f : M \to R$ funkcją rzeczywistą na M. Uzasadnij, że jednokrotna różniczkowalność funkcji $f \circ \varphi^{-1}$ w punkcie $\varphi(p)$ nie zależy od wyboru mapy (U, φ) zawierającej p (tzn. takiej, że $p \in U$). Oznacza to, że jednokrotna różniczkowalność w punkcie jest dobrze określonym pojęciem dla funkcji rzeczywistych na rozmaitości gładkiej.
16. Wykaż, że nieróżniczkowalność funkcji $f : M \to R$ w punkcie $p \in M$ jest dobrze określonym pojęciem (nie zależy od mapy zawierającej p).
17. Mówimy że funkcja wielu zmiennych ma w pewnym punkcie pochodną zerową gdy odpowiedni funkcjonał liniowy przybliżający funkcję na otoczeniu tego punktu, zadany przez pochodne cząstkowe, jest zerowy. Pokaż, że zerowość i niezerowość pochodnej funkcji $f : M \to R$ w punkcie $p \in M$ nie zależy od wyboru mapy. Pokaż też, że w każdym punkcie p rozmaitości M, w którym funkcja gładka $f : M \to R$ osiąga ekstremum lokalne, pochodna tej funkcji jest zerowa.
18. Niech $F : R^2 \to R$ będzie funkcją gładką, i niech $W(F) = \{(x, y, z) \in R^3 : z = F(x, y)\}$ będzie wykresem tej funkcji. Zadaj na wykresie $W(F)$ strukturę gładkiej rozmaitości (za pomocą rzutu na płaszczyznę Oxy), a następnie udowodnij, że funkcja odległości od dowolnego ustalonego punktu $A \in R^3$ nie należącego do $W(F)$, po obcięciu do tego wykresu, jest gładka.
19. Rozważmy sferę $S^2 = \{x \in R^3 : |x| = 1\}$, i niech $N = (0, 0, 1)$ będzie jej biegunem północnym. Uzasadnij, że funkcja $f : S^2 \to R$ określona wzorem $f(x) = |x - N|^2$ jest funkcją gładką. A co z funkcją $g(x) = |x - N|$?

Rozmaitości z brzegiem

20. Uzasadnij, że brzeg ∂M jest domknięty w M.
21. Uzasadnij, że dla dowolnej gładkiej funkcji $f : M \to R$ obcięcie $f|_{\partial M} : \partial M \to R$ jest funkcją gładką.
22. Niech $F : R^n \to R$ bedzie gładką funkcją. Uzasadnij, że obszar pod wykresem funkcji F określony przez $\Omega_F = \{(x, y) \in R^n \times R : y \leq F(x)\}$ jest rozmaitością z brzegiem o strukturze gładkiej, która na wnętrzu $\mathrm{int}\Omega_F = \{(x, y) \in R^n \times R : y < F(x)\}$ pokrywa się ze zwykłą strukturą otwartego podzbioru w R^{n+1}.
23. Uzasadnij, że $R^n \setminus \mathrm{int}D^n = \{x \in R^n : |x| \geq 1\}$ jest rozmaitością z brzegiem.
24. B jest domkniętą kulą w pewnym lokalnym układzie współrzędnych na gładkiej rozmaitości M. Uzasadnij, że $M \setminus \mathrm{int}B$ jest rozmaitością z brzegiem.