

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: nauczycielska

Katarzyna Siejek

**Klasyfikacja parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych
płytkach**

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dra hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2018

Katarzyna Siejek
ul. Dworcowa 17
47-100 Kadłub
e-mail: kasia_siejek@o2.pl

PESEL: 94091202065

Wydział Matematyki i Informatyki
kierunek: Matematyka
studia stacjonarne II stopnia

numer albumu: 264779

OŚWIADCZENIE O PRAWACH AUTORSKICH I DANYCH OSOBOWYCH

Ja niżej podpisana Katarzyna Siejek, studentka Wydziału Matematyki i Informatyki, kierunku matematyka, oświadczam, że przedkładana praca dyplomowa na temat:

Klasyfikacja parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach

- jest mojego autorstwa i nie narusza autorskich praw w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tekst jednolity: Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631, z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem;
- nie zawiera danych i informacji uzyskanych w sposób niedozwolony;
- nie była wcześniej przedmiotem innej urzędowej procedury związanej z nadaniem dyplomu uczelni wyższej lub tytułu zawodowego;
- treść pracy dyplomowej przedstawionej do obrony, zawarta na przekazanym nośniku elektronicznym, jest identyczna z jej wersją drukowaną.

Oświadczam, iż zostałam poinformowana o prawie dostępu do treści moich danych osobowych oraz ich poprawiania.

Udostępnienie przez mnie danych osobowych ma charakter dobrowolny.

Wyrażam zgodę, na:

- udostępnienie mojej pracy dla celów naukowych i dydaktycznych;
- przetwarzanie moich danych osobowych w myśl ustawy z dnia 29 sierpnia 1997 r. o ochronie danych osobowych (tekst jednolity: Dz. U. z 2014 r., poz. 1182, z późn. zm.);
- umieszczenie mojej pracy w bazie danych Uczelni i jej przechowywanie przez okres stosowny do potrzeb Uczelni;
- wykorzystanie mojej pracy jako elementu komparatywnej bazy danych Uczelni;
- udostępnienie mojej pracy innym podmiotom celem prowadzenia kontroli antyplagiatowej prac dyplomowych i innych tekstów, które zostaną opracowane w przyszłości;
- porównywanie tekstu mojej pracy z tekstami innych prac znajdujących się w bazie porównawczej systemu antyplagiatowego i zasobach Internetu.

Spis treści

1	Wstęp	4
2	Symetrie płaszczyzny	5
2.1	Rodzaje izometrii płaszczyzny	5
2.2	Cechy symetrii wzorów płaskich	5
2.3	Typy symetrii wzorów płaskich	7
3	Charakterystyka Eulera powierzchni	10
3.1	Charakterystyka Eulera	10
3.2	Klasyfikacja powierzchni spójnych	10
4	Krzywe na powierzchniach	13
5	Orbifold wzoru płaskiego	18
5.1	Orbifold	18
5.2	Orbifolds poszczególnych typów symetrii	19
6	Parkietaże	25
7	Orbifold parkietażu izohedralnego	30
8	Parkietaże izohedralne o niesymetrycznych klepkach	31
8.1	Parkietaże nieposiadające symetrii nietranslacyjnych	31
8.2	Parkietaże z dwoma rodzajami pojedynczych luster	35
8.3	Parkietaże posiadające jedynie punkty obrotowe	36
8.4	Parkietaże posiadające jedynie punkty kalejdoskopowe	44
8.5	Parkietaże posiadające punkty obrotowe i kalejdoskopowe	46
8.6	Parkietaże posiadające punkty obrotowe i jeden rodzaj pojedynczych luster	50
8.7	Parkietaże posiadające specjalne symetrie z poślizgiem	52
8.7.1	Typ symetrii $*\times$	52
8.7.2	Typ symetrii $\times\times$	61
8.7.3	Typ symetrii $22\times$	68
8.8	Podsumowanie	77
	Bibliografia	78

1 Wstęp

Tematem pracy jest klasyfikacja parkietaży izohedralnych (regularnych) o niesymetrycznych płytkach. Klasyfikację tę przeprowadzamy w sposób zaproponowany przez Johna Conway'a w książce "Symmetries of Things" [1], dokonaliśmy jednak istotnych uzupełnień mających na celu ułatwienie czytelnikowi jej zrozumienie. Przedstawiliśmy kompletne rozumowanie, co odróżnia nasze ujęcie od prowizorycznego szkicu dowodu zawartego w [1]. Rozwinęliśmy wiele szczegółowych rozumowań zupełnie nieobecnych w [1]. Wcześniej taka klasyfikacja była przeprowadzona innymi, bardziej tradycyjnymi metodami, przedstawionymi w książce B. Grünbauma i G. C. Shepharda "Tilings and Patterns".

Warto wspomnieć, że parkietaże izohedralne są często wykorzystywane w sztuce, gdyż odpowiadają intuicyjnemu pojęciu regularności. Pomimo restrykcyjnych zasad ich tworzenia, parkietaże tego typu mogą być bardzo różnorodne. Były szeroko wykorzystywane przez holenderskiego malarza i grafika M. C. Eschera w jego pracach. Dzieła Eschera często są tego typu parkietażami, na które zostały naniesione skromne wzory pomagające rozpoznać znajdujące się na nich obiekty.

Na początku niniejszej pracy przytaczamy pojęcia i obserwacje, które będą niezbędne do przeprowadzenia późniejszego rozumowania. W Rozdziale 2 podajemy możliwe cechy symetrii wzorów płaskich oraz opisujemy wszystkie 17 typów symetrii takich wzorów wraz z przykładami. W Rozdziale 3 przechodzimy do pojęcia charakterystyki Eulera oraz do definicji orientowalności powierzchni i ich klasyfikacji. Rozdział 4 zawiera podstawowe informacje o krzywych na powierzchniach. Bardzo ważnym pojęciem, które wyróżnia przedstawioną przez nas metodę klasyfikacji, jest pojęcie orbifoldu. Jego definicję i własności postanowiliśmy więc szeroko opisać w Rozdziale 5, służą bowiem za punkt wyjścia do głównej części pracy. Podstawowe informacje o parkietażach, w tym o parkietażach izohedralnych, wprowadziliśmy w Rozdziale 6, aby następnie w Rozdziale 7 rozważyć zależność między parkietażem izohedralnym a orbifoldem.

Ostatni rozdział pracy dotyczy samej klasyfikacji — wcześniej przedstawione definicje, obserwacje i własności prowadzą bezpośrednio do znalezienia wszystkich typów parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach za pomocą ich orbifoldów.

Rozdziały 2, 3, 5 oraz 6 zawierają materiał przygotowawczy, na ogół zaczerpnięty z rozmaitych pozycji literatury, ale dostosowany do potrzeb niniejszej pracy. Rozdział 4 zawiera dobrze znane, lecz nieopisane informacje, które zostały opracowane samodzielnie. Rozdziały 7 i 8 zawierają główną badawczą część pracy.

Pracę tę można zatem uznać za rozszerzenie i uzupełnienie treści zawartych w [1], zaś głównym jej celem jest przybliżenie czytelnikowi (również mniej zaawansowanemu matematycznie) wspomnianej klasyfikacji. Napisana została tak, by główna idea była zrozumiała bez potrzeby odwoływania się do innych źródeł.

2 Symetrie płaszczyzny

W tym rozdziale zajmiemy się krótkim omówieniem typów symetrii występujących we wzorach płaskich. Temat ten jest dobrze znany i został zaczerpnięty z [1] (Rozdział 2 zatytułowany "Plannar Patterns", str. 15–27) oraz [7] (Rozdział 1 zatytułowany "Symetrie na płaszczyźnie" oraz Rozdział 2 zatytułowany "Symetrie wzorów płaskich", str. 7–24), gdzie przedstawiono go w sposób bardzo przystępny.

2.1 Rodzaje izometrii płaszczyzny

Izometrie płaszczyzny to przekształcenia zachowujące kształty i rozmiary obiektów znajdujących się na płaszczyźnie. Wyróżniamy następujące rodzaje izometrii płaszczyzny:

1. *Symetria translacyjna (translacja)*. Jest to przekształcenie, które każdy punkt płaszczyzny przesuwa o ustalony wektor.
2. *Obrót*. Obrotem wokół punktu X o kąt α nazywamy przekształcenie, które każdy punkt płaszczyzny przemieszcza po okręgu o środku w punkcie X i promieniu będącym odległością danego punktu od punktu X o kąt α (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Punkt X nazywamy środkiem symetrii obrotowej.
3. *Symetria osiowa (odbicie)*. Odbiciem względem prostej k nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi A płaszczyzny przyporządkowuje punkt A' leżący na prostej prostopadłej do k i przechodzącej przez A , położony w tej samej odległości od prostej k co punkt A , lecz po drugiej stronie tej prostej.
4. *Symetria z poślizgiem*. Jest to złożenie symetrii osiowej względem pewnej osi L i translacji o niezerowy wektor równoległy do tej osi. Prostą L nazywamy wtedy osią symetrii z poślizgiem.

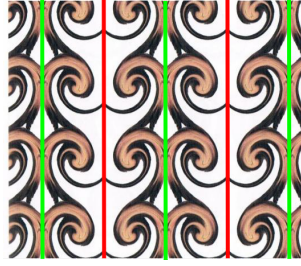
Symetrycznym dyskretnym wzorem płaskim (w skrócie, *wzorem płaskim*) nazywamy wzór na płaszczyźnie spełniający następujące warunki:

- (*symetryczność*) istnieją niezerowe wektory translacji w dwóch różnych kierunkach zachowujące wzór płaski,
- (*dyskretność*) długości wektorów translacyjnych symetrii wzoru nie mogą być dowolnie krótkie.

2.2 Cechy symetrii wzorów płaskich

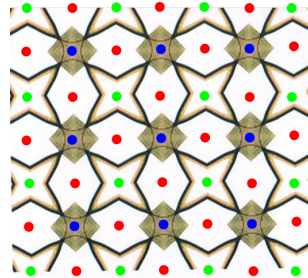
Symetrią wzoru płaskiego nazywamy dowolne przekształcenie izometryczne, które ten wzór zachowuje. Wyróżniamy następujące cechy symetrii wzorów na płaszczyźnie:

- *Pojedyncze lustra*. Są to osie symetrii wzoru nieprzecinające się z żadnymi innymi osiami symetrii tego wzoru. Mówimy, że lustra są tego samego rodzaju, jeśli przechodzą przez analogiczne fragmenty wzoru (równoważnie, jeśli istnieje symetria wzoru przekształcająca jedno z nich na drugie). Nietrudno pokazać, że dowolny wzór płaski posiada skończenie wiele rodzajów pojedynczych luster. Tego faktu nie będziemy tutaj dowodzić, wynika on jednak łatwo z dyskretności wzoru. Przykład wzoru posiadającego dwa rodzaje pojedynczych luster przedstawia Rysunek 1.



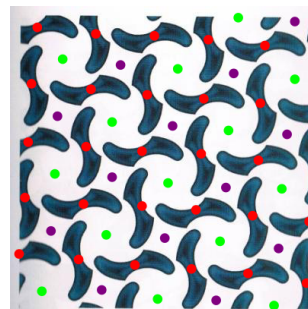
Rysunek 1: Wzór z zaznaczonymi dwoma rodzajami pojedynczych luster (proste czerwone i proste zielone) [1]

- *Punkty kalejdoskopowe n -krotne.* Są to punkty przecięcia n osi symetrii wzoru (dla $n \geq 2$). Liczbę n nazywamy wtedy rzędem punktu kalejdoskopowego. Mówimy, że punkty kalejdoskopowe są *tego samego rodzaju*, gdy istnieje symetria wzoru przekształcająca jeden z nich na drugi. We wzorze może występować kilka rodzajów punktów kalejdoskopowych tego samego rzędu. Z warunku dyskretności wzoru łatwo wynika, że w każdym wzorze płaskim występuje najwyżej skończenie wiele rodzajów punktów kalejdoskopowych. Przykład wzoru posiadającego trzy rodzaje punktów kalejdoskopowych przedstawia Rysunek 2.



Rysunek 2: Wzór z zaznaczonymi trzema rodzajami punktów kalejdoskopowych (czerwone to punkty 2-krotne, zaś niebieskie i zielone — 4-krotne) [1]

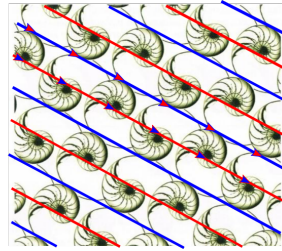
- *Punkty obrotowe n -krotne.* Są to środki symetrii obrotowej wzoru niebędące punktami kalejdoskopowymi. Z dyskretności wzoru wynika, że dla każdego punktu obrotowego A istnieje $n \geq 2$ takie, że obroty wokół punktu A będące symetriami wzoru to dokładnie obroty o wielokrotności kąta $\frac{2\pi}{n}$. Tę liczbę n nazywamy *krotnością* punktu obrotowego lub będziemy mówić, że A jest punktem obrotowym *n -krotnym*. Mówimy, że punkty obrotowe są tego samego rodzaju, gdy istnieje symetria wzoru przekształcająca jeden z nich na drugi. We wzorze może występować kilka rodzajów punktów obrotowych tego samego rzędu. Z dyskretności wzoru wynika, że każdy wzór zawiera skończenie wiele rodzajów punktów obrotowych. Przykład wzoru posiadającego trzy rodzaje punktów obrotowych przedstawia Rysunek 3.



Rysunek 3: Wzór z zaznaczonymi trzema rodzajami punktów obrotowych (czerwone to punkty 2-krotne, zaś fioletowe i zielone — 4-krotne) [1]

- *Specjalne symetrie z poślizgiem.* Są to takie symetrie z poślizgiem będące symetriami wzoru, których osie nie przecinają się z osiami symetrii wzoru. Mówimy, że specjalne symetrie

z poślizgiem są tego samego rodzaju, jeśli ich osie przechodzą przez analogiczne fragmenty wzoru. Z Twierdzenia 2.3 wynika, że we wzorze płaskim występują co najwyżej dwa rodzaje specjalnych symetrii z poślizgiem. Przykład wzoru posiadającego dwa rodzaje specjalnych symetrii z poślizgiem przedstawia Rysunek 4.



Rysunek 4: Wzór z zaznaczonymi osiami specjalnych symetrii z poślizgiem dwóch rodzajów (proste czerwone i proste niebieskie) [1]

2.3 Typy symetrii wzorów płaskich

Sygnaturą Conway'a wzoru płaskiego nazywamy symbol oznaczający zbiór cech symetrii tego wzoru. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- — brak cech symetrii poza symetrami translacyjnymi,
- * — dotyczy obecności symetrii osiowych i ewentualnych punktów kalejdoskopowych,
- × — dotyczy obecności specjalnych symetrii z poślizgiem.

Każdy rodzaj pojedynczego lustra to osobny znak * w zapisie sygnatury. Jeśli we wzorze występuje k rodzajów punktów kalejdoskopowych, które mają rzędy n_1, n_2, \dots, n_k , to w sygnaturze pojawia się ciąg $n_1 n_2 \dots n_k$ poprzedzony kolejnym znakiem *. Jeśli we wzorze pojawia się l rodzajów punktów obrotowych, mających rzędy m_1, m_2, \dots, m_l , w sygnaturze na początku pojawia się ciąg $m_1 m_2 \dots m_l$. Zarówno rzędy punktów kalejdoskopowych, jak obrotowych z reguły wymieniamy w porządku nierosnącym. Gdy we wzorze pojawiają się jedynie specjalne symetrie z poślizgiem, sygnatura przyjmuje postać $\times \times$; gdy oprócz specjalnych symetrii z poślizgiem pojawiają się inne cechy symetrii, na końcu sygnatury dopisujemy znak \times . Ogólna postać sygnatury wzoru może wyglądać następująco:

- ○
- $\times \times$
- $\underbrace{m_1 m_2 \dots m_l}_{\text{rzędy punktów obrotowych}} \overbrace{** \dots *}_{\text{rodzaje pojedynczych luster}} \underbrace{* n_1 n_2 \dots n_k}_{\text{rzędy punktów kalejdoskopowych}} \times$, przy czym każdy z czterech fragmentów sygnatury może występować lub nie.

Mówimy, że dwa wzory płaskie mają *ten sam typ symetrii*, jeśli mają tę samą sygnaturę Conway'a.

Przykład 2.1. Sygnatura $7 * 332 \times$ oznacza, że we wzorze znajdują się:

- 1 rodzaj punktów obrotowych rzędu 7,
- 3 rodzaje punktów kalejdoskopowych o rzędach 3, 3 i 2,
- specjalna symetria z poślizgiem.

W tym wzorze nie występują pojedyncze lustra.

Przykład 2.2. Sygnatura $33 * * * * 65$ oznacza, że we wzorze występują:

- 2 rodzaje punktów obrotowych rzędów 3,
- 3 rodzaje pojedynczych luster,

- 2 rodzaje punktów kalejdoskopowych rzędów 6 i 5.

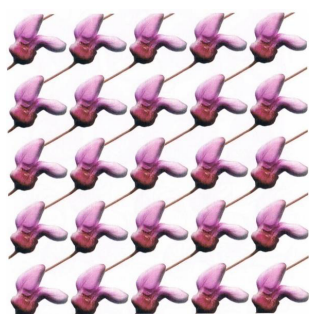
W tym wzorze nie występują specjalne symetrie z poślizgiem.

Twierdzenie 2.3. *Występuje dokładnie 17 typów symetrii wzorów płaskich. Są one opisane następującymi sygnaturami Conway'a:*

- — wzory posiadające jedynie symetrie translacyjne,
- ** — wzory posiadające jedynie dwa rodzaje pojedynczych luster,
- 632, 442, 333, 2222 — wzory posiadające jedynie punkty obrotowe,
- *632, *442, *333, *2222 — wzory posiadające jedynie punkty kalejdoskopowe,
- 4*2, 3*3, 2*22 — wzory posiadające jedynie punkty obrotowe i kalejdoskopowe,
- 22* — wzory posiadające jedynie dwa rodzaje punktów obrotowych i jeden rodzaj pojedynczych luster,
- 22× — wzory posiadające dwa rodzaje punktów obrotowych i specjalną symetrię z poślizgiem,
- *× — wzory posiadające pojedyncze lustro i specjalną symetrię z poślizgiem,
- ×× — wzory posiadające dwa rodzaje specjalnej symetrii z poślizgiem.

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [4] oraz w [8]. Szkic dowodu znajduje się również w [1] (Rozdział 3 zatytułowany "The Magic Theorem", str. 29–49), uzupełniony i rozwinięty w [7].

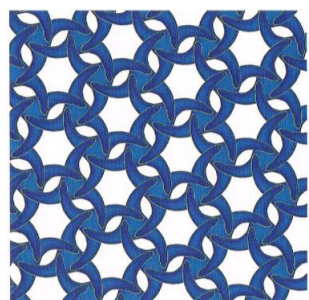
Poniżej przedstawiamy przykłady wzorów realizujących wszystkie możliwe typy symetrii wzorów płaskich (Rysunki 5 - 21 zaczerpnęliśmy z [1]).



Rysunek 5: Typ ◦ [1]



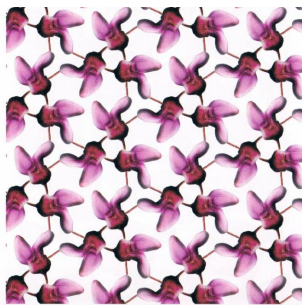
Rysunek 6: Typ ** [1]



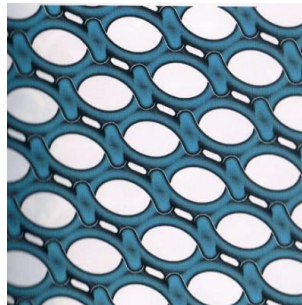
Rysunek 7: Typ 632 [1]



Rysunek 8: Typ 442 [1]



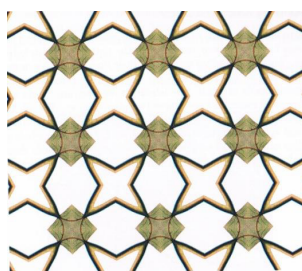
Rysunek 9: Typ 333 [1]



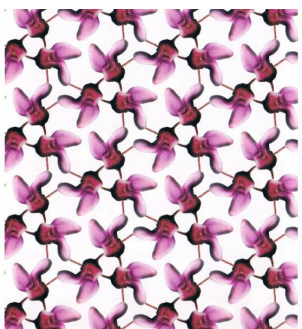
Rysunek 10: Typ 2222 [1]



Rysunek 11: Typ *632 [1]



Rysunek 12: Typ *442 [1]



Rysunek 13: Typ *333 [1]



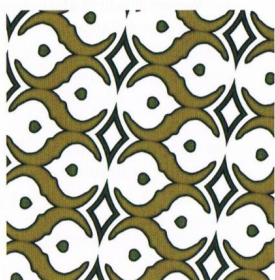
Rysunek 14: Typ *2222 [1]



Rysunek 15: Typ 4 * 2 [1]



Rysunek 16: Typ 3 * 3 [1]



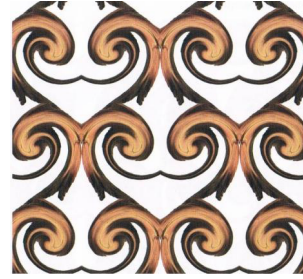
Rysunek 17: Typ 2 * 22 [1]



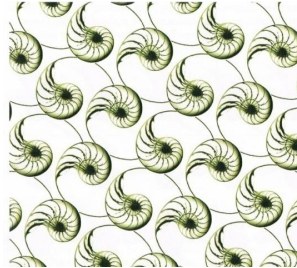
Rysunek 18: Typ 22* [1]



Rysunek 19: Typ $22 \times [1]$



Rysunek 20: Typ $* \times [1]$



Rysunek 21: Typ $\times \times [1]$

3 Charakterystyka Eulera powierzchni

W tym rozdziale przypomnimy klasyfikację powierzchni orientowalnych, nieorientowalnych, z brzegiem oraz bez brzegu, a także sposób wyznaczania ich charakterystyk Eulera. Informacje zawarte w tym rozdziale można znaleźć w [5] oraz [7] (Rozdział 4 zatytułowany "Dowód Magicznego Twierdzenia", str. 42–54).

3.1 Charakterystyka Eulera

Definicja 3.1. *Triangulacja* powierzchni jest to podział powierzchni na obszary trójkątne w taki sposób, że każde dwa obszary tworzą w przekroju zbiór pusty, pojedynczy wierzchołek albo pojedynczą krawędź. [11]

Fakt 3.2. *Niech T oznacza liczbę trójkątnych obszarów triangulacji, W — liczbę wierzchołków triangulacji, K — liczbę krawędzi triangulacji. Dla ustalonej powierzchni wielkość $T + W - K$ nie zależy od wyboru triangulacji.*

Fakt 3.2 możemy znaleźć w [1] (Rozdział 7 zatytułowany "Euler's Map Theorem", Twierdzenie 7.1, str. 85) oraz w [2] (Wniosek 8, str. 141).

Definiujemy *charakterystykę Eulera*, dzieląc daną powierzchnię na obszary trójkątne. [10]

Definicja 3.3. *Charakterystyka Eulera* powierzchni F to liczba:

$$\chi(F) = T + W - K,$$

gdzie:

T — liczba trójkątnych obszarów triangulacji,

W — liczba wierzchołków triangulacji,

K — liczba krawędzi triangulacji.

Zauważmy, że charakterystyka Eulera danej powierzchni jest niezależna od wyboru triangulacji.

3.2 Klasyfikacja powierzchni spójnych

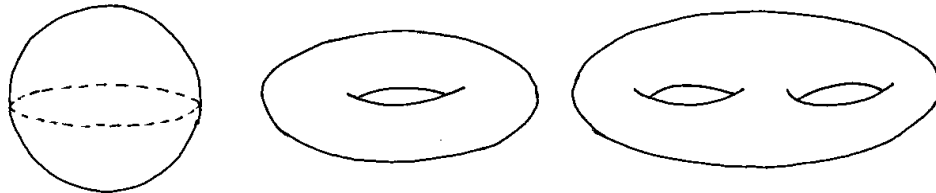
Powierzchnie bez brzegu

W celu przytoczenia klasyfikacji wszystkich powierzchni spójnych, zajmiemy się najpierw powierzchniami bez brzegu. Możemy wyróżnić dwa typy powierzchni: orientowalne i nieorientowalne.

Definicja 3.4. Powierzchnia jest *nieorientowalna*, jeśli zawiera jako podzbiór pewną wstęgę Möbiusa. W przeciwnym wypadku jest *orientowalna*.

Twierdzenie 3.5. Każda powierzchnia orientowalna bez brzegu jest z dokładnością do homeomorfizmu jedną z poniższych:

- sferą (ozn. Σ_0),
- torusem (ozn. Σ_1),
- precelem z g otworami (ozn. Σ_g), gdzie $g \geq 2$.



Rysunek 22: Powierzchnie orientowalne, kolejno: Σ_0 , Σ_1 , Σ_2



Rysunek 23: Powierzchnie Σ_g

Dla wszystkich powierzchni orientowalnych możemy obliczyć charakterystyki Eulera ze wzoru

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g \quad (3.1)$$

dla $g \geq 0$.

Twierdzenie 3.6. Wszystkie powierzchnie nieorientowalne bez brzegu tworzymy, usuwając ze sfery wnętrza n parami rozłącznych dysków i do każdej krzywej brzegowej usuniętego dysku dołączamy, abstrakcyjnie, wzdłuż brzegu wstęgę Möbiusa. Dla ustalonego n wszystkie powierzchnie powstałe w ten sposób są homeomorficzne. Powierzchnię powstałą w powyższy sposób oznaczamy przez P_n .

Dla powierzchni nieorientowalnych obliczamy charakterystykę Eulera następująco:

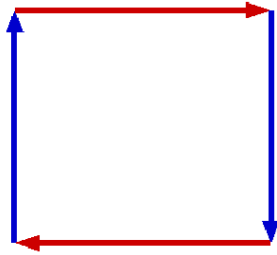
$$\chi(P_n) = 2 - n \quad (3.2)$$

dla $n \geq 1$.

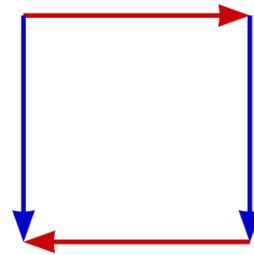
Na naszą uwagę szczególnie zasługują następujące powierzchnie nieorientowalne bez brzegu:

- płaszczyzna rzutowa (P_1),
- butelka Kleina (P_2).

Na Rysunkach 24 i 25 przedstawiamy inne sposoby uzyskiwania tych dwóch powierzchni poprzez sklejanie boków prostokąta. Boki tego samego koloru sklejamy zgodnie z kierunkiem strzałek, aby otrzymać daną powierzchnię.



Rysunek 24: Płaszczyzna rzutowa



Rysunek 25: Butelka Kleina

Powierzchnie z brzegiem

Wśród powierzchni z brzegiem również możemy wyróżnić powierzchnie orientowalne i nieorientowalne.

Twierdzenie 3.7. *Każda z powierzchni z brzegiem powstaje przez wycięcie z pewnej powierzchni bez brzegu wnętrz n parami rozłącznych dysków ($n \geq 1$).*

Charakterystyki Eulera takich powierzchni to

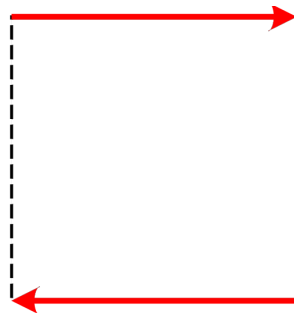
$$\chi(F) = \chi(\widehat{F}) - n \quad (3.3)$$

gdzie \widehat{F} jest pewną powierzchnią bez brzegu, zaś F jest powierzchnią utworzoną z \widehat{F} po wycięciu n dysków.

Szczególnie istotne dla nas będą następujące powierzchnie z brzegiem:

- dysk (sfera z wyciętym jednym dyskiem),
- pierścień (sfera z wyciętymi dwoma dyskami).

Powierzchnią, na którą zwrócimy szczególną uwagę, jest wstęga Möbiusa. Jest to powierzchnia nieorientowalna, która powstaje z płaszczyzny rzutowej poprzez wycięcie z niej jednego dysku. Inny sposób uzyskania tej powierzchni, poprzez sklejenie boków prostokąta zgodnie z kierunkiem strzałek, przedstawia Rysunek 26.



Rysunek 26: Wstęga Möbiusa

Zauważmy, że F jest orientowalna dokładnie wtedy, gdy \widehat{F} jest orientowalna.

Fakt 3.8. [5] *Każda spójna powierzchnia jest jednoznacznie zdeterminowana przez trzy parametry:*

- orientowalność,
- charakterystykę Eulera,
- liczbę komponent brzegu.

Przykład 3.9. Niech F będzie powierzchnią spójną, orientowalną, bez brzegu, której charakterystyka Eulera wynosi -6 . Zgodnie z 3.1, mamy

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= -6 \\ 2g &= 8 \\ g &= 4 \end{aligned}$$

Zatem F jest precelem z czterema otworami.

Przykład 3.10. Niech F będzie powierzchnią spójną, nieorientowalną, mającą 1 komponentę brzegu. Niech $\chi(F) = 0$. Niech \widehat{F} będzie powierzchnią, z której otrzymujemy powierzchnię F , wycinając dysk. Zgodnie z 3.3, zachodzi:

$$\begin{aligned} \chi(F) &= \chi(\widehat{F}) - 1 \\ 0 &= \chi(\widehat{F}) - 1 \\ \chi(\widehat{F}) &= 1 \end{aligned}$$

Ponieważ \widehat{F} jest powierzchnią nieorientowalną bez brzegu, zgodnie z 3.2, mamy:

$$\begin{aligned} \chi(\widehat{F}) &= 2 - k \\ 1 &= 2 - k \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Zatem \widehat{F} jest płaszczyzną rzutową, a F — wstęgą Möbiusa.

4 Krzywe na powierzchniach

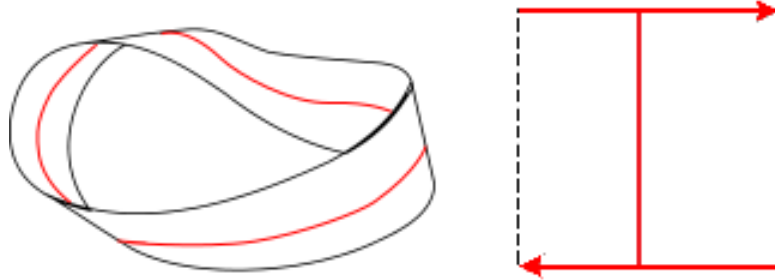
W tym rozdziale znajdziemy informacje dobrze znane, ale opracowane samodzielnie z powodu braku dogodnych źródeł.

Przeanalizujemy krzywe, wzdłuż których można rozciąć daną powierzchnię, aby w ten sposób uzyskać nową powierzchnię. Wszystkie rozważane przez nas krzywe na powierzchniach będą krzywymi bez samoprzecięć. W pierwszej kolejności musimy rozróżnić krzywe rozspajające i nierozspajające powierzchnie. Interesować nas będzie rozpoznawanie powierzchni powstałej przez rozcięcie wzdłuż krzywej nierozspajającej. Szczególnie ważne będą dwa rodzaje krzywych: zamknięte zawarte we wnętrzu danej powierzchni oraz niezamknięte, łączące 2 punkty brzegowe, a poza tym przebiegające przez wnętrze danej powierzchni.

Wśród krzywych zamkniętych zawartych w powierzchniach możemy wyróżnić krzywe jednostronne i dwustronne.

Definicja 4.1. Krzywą zamkniętą zawartą w pewnej powierzchni nazwiemy *jednostronną*, jeżeli bliskie otoczenie tej krzywej na powierzchni jest wstęgą Möbiusa.

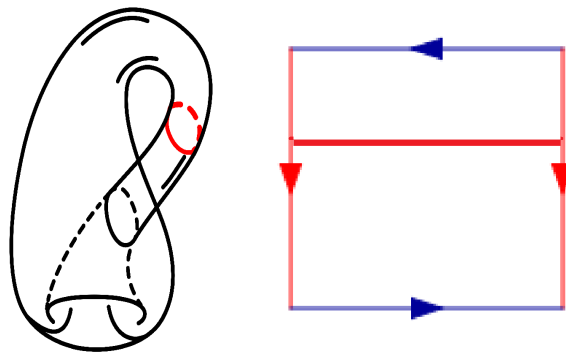
Zauważmy, że krzywe jednostronne mogą występować jedynie na powierzchniach nieorientowalnych. Przykład krzywej jednostronnej na wstędze Möbiusa przedstawia Rysunek 27.



Rysunek 27: Krzywa jednostronna na wstędze Möbiusa [12]

Definicja 4.2. Krzywą zamkniętą zawartą w danej powierzchni niebędącą krzywą jednostronną nazywamy *krzywą dwustronną*.

Otoczenie krzywej dwustronnej na powierzchni jest zamkniętym pasem, który krzywa ta rozcina na dwa węższe pasy — stąd nazwa dwustronności. Przykład takiej krzywej na butelce Kleina znajdziemy na Rysunku 28.

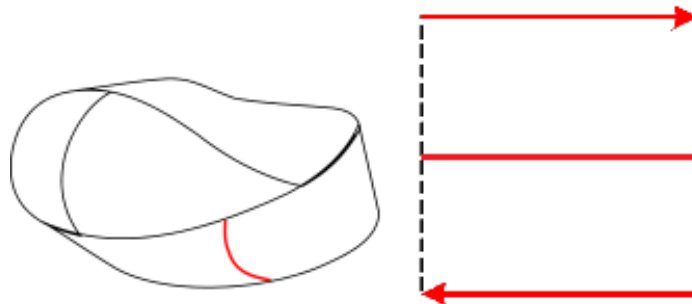


Rysunek 28: Krzywa dwustronna na butelce Kleina [9]

Wśród krzywych zawartych w powierzchniach z brzegiem powinniśmy zwrócić uwagę na krzywe właściwie włożone (w powierzchnię z brzegiem).

Definicja 4.3. *Krzywa właściwie włożona w powierzchnię z brzegiem* jest to krzywa, która nie jest zamknięta, lecz jej końce leżą na brzegach danej powierzchni, podczas gdy pozostałe punkty krzywej należą do wnętrza tej powierzchni.

Przykład krzywej właściwie włożonej we wstęgę Möbiusa możemy zobaczyć na Rysunku 29.



Rysunek 29: Krzywa właściwie włożona we wstęgę Möbiusa [12]

Fakt 4.4. *Rozcinając powierzchnię orientowalną wzdłuż krzywej nierozspajającej, otrzymamy powierzchnię orientowalną.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że po rozcięciu pewnej powierzchni orientowalnej F możemy otrzymać powierzchnię nieorientowalną F' . Z definicji nieorientowalności, powierzchnia F' zawiera wstęgę Möbiusa. Sklejając powierzchnię F' wzdłuż linii rozcinającej, otrzymamy ponownie powierzchnię F , która również zawiera wstęgę Möbiusa. W ten sposób otrzymujemy sprzeczność z orientowalnością powierzchni F . \square

W przypadku powierzchni nieorientowalnych, możemy otrzymać, rozcinając je wzdłuż krzywej nierozspajającej, zarówno powierzchnie orientowalne, jak nieorientowalne. Możemy to zaobserwować, analizując Przykład 4.5.

Przykład 4.5. Mamy daną butelkę Kleina P_2 . Jest to powierzchnia nieorientowalna, jej charakterystyka Eulera wynosi: $\chi(P_2) = 2 - 2 = 0$. Rozważmy powierzchnie otrzymane przez rozcięcie jej wzdłuż różnego rodzaju krzywych nierozspajających.

Nierozspajająca krzywa zamknięta jednostronna

Rozcinając butelkę Kleina wzdłuż krzywej zamkniętej jednostronnej Γ , otrzymujemy powierzchnię F' z jedną komponentą brzegu. Obliczmy charakterystykę Eulera otrzymanej powierzchni. Liczba obszarów trójkątnych triangulacji nie ulega zmianie, gdyż możemy tak wybrać triangulację, aby brzegi obszarów zawierały linię cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę wierzchołków tej triangulacji zawartych w krzywej Γ . Wówczas liczba krawędzi tej triangulacji zawartych w Γ również wynosi n . Wtedy liczba wierzchołków i liczba krawędzi triangulacji powierzchni F' zwiększy się o n , gdyż każdy z wierzchołków i każda z krawędzi zawartych w krzywej Γ pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni F' .

$$\begin{aligned} T' &= T \\ W' &= W + n \\ K' &= K + n \end{aligned}$$

Zatem $\chi(F') = T' + W' - K' = T + W + n - K - n = T + W - K = 0$.

Zgodnie z twierdzeniami klasyfikującymi:

- Jeśli F' jest powierzchnią orientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - 2g - 1 &= 0 \\ 2g &= 1 \\ g &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

F' nie może być więc powierzchnią orientowalną.

- Jeśli F' jest powierzchnią nieorientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - n - 1 &= 0 \\ n &= 1 \end{aligned}$$

F' powstaje z płaszczyzny rzutowej przez wycięcie jednego dysku.

Otrzymana powierzchnia jest więc wstęgą Möbiusa.

Nierozspajająca krzywa zamknięta dwustronna

Rozcinając butelkę Kleina wzdłuż krzywej zamkniętej dwustronnej Γ , otrzymujemy powierzchnię F' z dwiema komponentami brzegu. Obliczmy charakterystykę Eulera otrzymanej powierzchni. Liczba obszarów trójkątnych triangulacji nie ulega zmianie, gdyż możemy tak wybrać triangulację, aby brzegi obszarów zawierały linię cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę wierzchołków tej triangulacji zawartych w krzywej Γ . Wówczas liczba krawędzi tej triangulacji zawartych w Γ również wynosi n . Wtedy liczba wierzchołków i liczba krawędzi

triangulacji powierzchni F' zwiększy się o n , gdyż każdy z wierzchołków i każda z krawędzi zawartych w krzywej Γ pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni F' .

$$\begin{aligned}T' &= T \\W' &= W + n \\K' &= K + n\end{aligned}$$

Zatem $\chi(F') = T' + W' - K' = T + W + n - K - n = T + W - K = 0$.

Zgodnie z twierdzeniami klasyfikującymi:

- Jeśli F' jest powierzchnią orientowalną, to

$$\begin{aligned}2 - 2g - 2 &= 0 \\g &= 0\end{aligned}$$

F' powstaje ze sfery przez wycięcie dwóch dysków.

- Jeśli F' jest powierzchnią nieorientowalną, to

$$\begin{aligned}2 - n - 2 &= 0 \\n &= 0\end{aligned}$$

F' nie może być więc powierzchnią nieorientowalną.

Otrzymana powierzchnia jest więc pierścieniem.

Przykład 4.6. Rozważmy krzywą właściwie włożoną we wstęgę Möbiusa, mającą końce w różnych punktach brzegu i założmy, że jest to krzywa nierozspajająca. Wstęga Möbiusa jest powierzchnią nieorientowalną, mającą 1 komponentę brzegu i charakterystykę Eulera $\chi(F) = 0$. Rozcinając ją wzdłuż krzywej właściwie włożonej nierozspajającej, możemy łatwo zaobserwować, że otrzymujemy powierzchnię z jedną komponentą brzegu (fakt ten zostawiamy do uzasadnienia czytelnikowi). Obliczmy charakterystykę Eulera otrzymanej powierzchni. Liczba obszarów trójkątnych triangulacji nie ulega zmianie, gdyż możemy tak wybrać triangulację, aby brzegi obszarów zawierały linię cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę krawędzi tej triangulacji zawartych w krzywej Γ . Wówczas liczba wierzchołków tej triangulacji zawartych w Γ wynosi $n + 1$. Wtedy liczba krawędzi triangulacji powierzchni F' zwiększy się o n , zaś liczba wierzchołków zwiększy się o $n + 1$, gdyż każdy z wierzchołków i każda z krawędzi zawartych w krzywej Γ pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni F' .

$$\begin{aligned}T' &= T \\W' &= W + n + 1 \\K' &= K + n\end{aligned}$$

Zatem $\chi(F') = T' + W' - K' = T + W + n + 1 - K - n = T + W + 1 - K = 1$.

Zgodnie z twierdzeniami klasyfikującymi:

- Jeśli F' jest powierzchnią orientowalną, to

$$\begin{aligned}2 - 2g - 1 &= 1 \\2g &= 0 \\g &= 0\end{aligned}$$

F' powstaje ze sfery przez wycięcie jednego dysku.

- Jeśli F' jest powierzchnią nieorientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - n - 1 &= 1 \\ n &= 0 \end{aligned}$$

F' nie może być więc powierzchnią nieorientowalną.

Otrzymana powierzchnia jest więc dyskiem.

Warto zauważyć, że do wyznaczenia powstałej powierzchni nie musieliśmy znać jej orientowalności. W tych przypadkach wystarczyła znajomość liczby komponent brzegu i charakterystyki Eulera. Obserwacje z Przykładów 4.5 i 4.6 możemy uogólnić do następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.7. 1. *Gdy krzywa zamknięta nierozspajająca, rozcinająca daną powierzchnię jest jednostronna, liczba komponent brzegu zwiększa się o 1, zaś gdy jest dwustronna — zwiększa się o 2.*

2. *Rozcinając daną powierzchnię wzdłuż krzywej zamkniętej nierozspajającej, otrzymujemy powierzchnię, której charakterystyka Eulera jest taka sama, jak wyjściowej powierzchni.*
3. *Rozcinając powierzchnię wzdłuż nierozspajającej krzywej właściwie włożonej, otrzymujemy powierzchnię, której charakterystyka Eulera jest większa o 1 od wyjściowej.*

Dowód. 1. Zgodnie z Definicją 4.1 bliskie otoczenie krzywej jednostronnej na rozcinanej powierzchni jest wstęgą Möbiusa. Ma zatem, zgodnie z nazwą, jedną stronę, więc krzywa rozcinająca tworzy jedną komponentę brzegu. Ponieważ zawiera się ona we wnętrzu powierzchni wyjściowej, liczba komponent brzegu zwiększa się o 1.

Krzywa dwustronna rozcina swoje bliskie otoczenie na dwa pasy. Brzeg każdego z nich zawiera kopię krzywej rozcinającej, otrzymujemy zatem powierzchnię o dwóch dodatkowych komponentach brzegu.

2. Po rozcięciu danej powierzchni F krzywą Γ , otrzymujemy powierzchnię F' . Bez względu na to, czy Γ jest krzywą jednostronną, czy dwustronną, liczba obszarów trójkątnych triangulacji nie ulegnie zmianie, ponieważ możemy wybrać taką triangulację, aby brzegi obszarów zawierały linię cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę wierzchołków tej triangulacji zawartych w krzywej Γ . Wówczas liczba krawędzi tej triangulacji zawartych w Γ również wynosi n . Wtedy liczba wierzchołków i liczba krawędzi triangulacji powierzchni F' zwiększy się o n , gdyż każdy z wierzchołków i każda z krawędzi zawartych w krzywej Γ pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni F' .

$$\begin{aligned} T' &= T \\ W' &= W + n \\ K' &= K + n \end{aligned}$$

Zatem $\chi(F') = T' + W' - K' = T + W + n - K - n = T + W - K = \chi(F)$.

3. Po rozcięciu powierzchni F krzywą Γ właściwie włożoną w F , otrzymamy powierzchnię F' . Liczba obszarów trójkątnych nie ulega zmianie, ponieważ możemy wybrać taką triangulację, aby brzegi obszarów zawierały linię cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę krawędzi tej triangulacji zawartych w krzywej Γ . Wówczas liczba wierzchołków tej triangulacji zawartych w Γ wynosi $n+1$ (gdyż jest to liczba wierzchołków łączących n krawędzi zawartych w Γ). Wtedy liczba krawędzi triangulacji powierzchni F' zwiększy się o n , zaś liczba wierzchołków zwiększy się o $n+1$, gdyż każdy z wierzchołków i każda z krawędzi zawartych w krzywej Γ pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni F' .

$$\begin{aligned} T' &= T \\ W' &= W + n + 1 \\ K' &= K + n \end{aligned}$$

Zatem $\chi(F') = T' + W' - K' = T + W + n + 1 - K - n = T + W - K + 1 = \chi(F) + 1$. □

5 Orbifold wzoru płaskiego

W tym rozdziale przytoczymy pojęcie orbifoldu oraz przedstawimy, jak wyglądają orbifoldy poszczególnych typów symetrii wzorów płaskich. Przedstawimy również, w postaci wyciągu z opisu zawartego w [1] (Rozdział 15 zatytułowany "Types of Tilings", str. 185–196), orbifoldy wszystkich typów symetrii wzorów płaskich.

5.1 Orbifold

Podczas rozważania typów symetrii wzorów płaskich, duże znaczenie miało rozróżnienie rodzajów poszczególnych cech symetrii. Z definicji wzoru płaskiego, a szczególnie ze względu na występujące w nim symetrie translacyjne, wiemy, że jeżeli w danym wzorze płaskim występuje pewna cecha symetrii, występuje nieskończenie wiele cech symetrii tego samego rodzaju. Z tego względu będziemy utożsamiać wszystkie cechy symetrii danego rodzaju (np. wszystkie pojedyncze lustra tego samego rodzaju). Wprowadzimy teraz pojęcia odnoszące się do wzorów płaskich.

Definicja 5.1. *Orbitą* danego punktu nazywamy zbiór wszystkich punktów tego samego rodzaju, tzn. wszystkich punktów, które mogą być przekształcone na ten punkt przez pewną symetrię wzoru.

Definicja 5.2. *Orbifoldem wzoru płaskiego* nazywamy zbiór złożony z orbit, powstały przez utożsamienie wszystkich punktów leżących w tej samej orbicie.

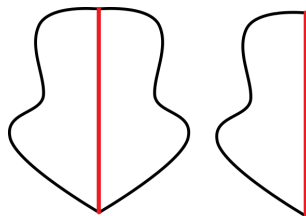
Zadaniem, którym zajmiemy się w tym podrozdziale, będzie zrozumienie, czym tak naprawdę jest orbifold i jaka jest jego geometryczna natura.

W małym fragmencie płaszczyzny, na ogół łatwo stwierdzić, które punkty z tego fragmentu należą do tej samej orbity. Można zatem ustalić, jak wygląda fragment orbifoldu zbudowany z orbit przecinających niepusto taki fragment płaszczyzny. Możemy zatem przeanalizować, jak wyglądają lokalne fragmenty orbifoldu na podstawie lokalnych fragmentów płaszczyzny.

Większość punktów wzoru płaskiego nie leży w bliskim otoczeniu punktów, które są na nie przekształcane przez pewną symetrię tego wzoru, co oznacza, że nie należą one do żadnej osi symetrii wzoru oraz nie są punktami obrotowymi. Takie punkty nazywamy punktami zwyczajnymi wzoru. Nietrudno przekonać się, że punkt zwyczajny ma zawsze małe otoczenie złożone z samych punktów zwyczajnych. Fragment orbifoldu złożony z punktów z takiego otoczenia może być utożsamiony z tym otoczeniem, zatem w pobliżu punktu zwyczajnego orbifold lokalnie wygląda jak powierzchnia. Podczas tworzenia orbifoldu wzoru, punkty zwyczajne są przekształcane na punkty zwyczajne orbifoldu, to znaczy nie stają się żadnymi elementami charakterystycznymi orbifoldu.

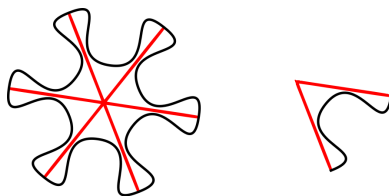
Można łatwo się przekonać, że niektóre cechy symetrii są przekształcane na charakterystyczne elementy orbifoldu:

- Punkty leżące na pojedynczych lustrach są przekształcane na punkty brzegowe orbifoldu.



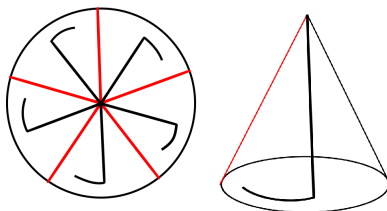
Rysunek 30: Punkty brzegowe orbifoldu

- Punkty kalejdoskopowe (będące punktami przecięcia kilku osi symetrii wzoru) są przekształcane na punkty narożne orbifoldu. Rzędem punktu narożnego orbifoldu nazwiemy rząd punktu kalejdoskopowego, który został nań przekształcony. Punkty kalejdoskopowe rzędu n są przekształcane w punkty narożne, których kąt wewnętrzny ma miarę $\frac{\pi}{n}$.



Rysunek 31: Punkty narożne orbifoldu

- Punkty obrotowe są przekształcane na punkty stożkowe orbifoldu. Rzędem punktu stożkowego nazywamy rząd punktu obrotowego, który został przekształcony na dany punkt stożkowy. Stożek powstały z punktu stożkowego rzędu n , po rozcięciu wzdłuż tworzącej, daje wycinek kołowy o kącie środkowym $\frac{2\pi}{n}$.



Rysunek 32: Punkty stożkowe orbifoldu

Obserwacje te mogą wydać się czytelnikowi trudne do zrozumienia i zastosowania, przybliżymy je jednak w kolejnym rozdziale, co pomoże w wyjaśnieniu zasady tworzenia orbifoldów.

Zauważmy, że danemu wzorowi płaskiemu możemy jednoznacznie przyporządkować jego orbifold, posługując się powyższymi obserwacjami. Występowanie różnych cech symetrii prowadzi do pojawienia się różnych cech orbifoldu. Orbifold tworzymy, "nawijając" płaszczyznę w taki sposób, że odpowiadające sobie elementy wzoru do siebie przylegają.

Fakt 5.3. *Każdy orbifold jest powierzchnią, do której mogą należeć elementy specjalne:*

- punkty brzegowe,
- punkty narożne (na brzegu),
- punkty stożkowe (wewnątrz).

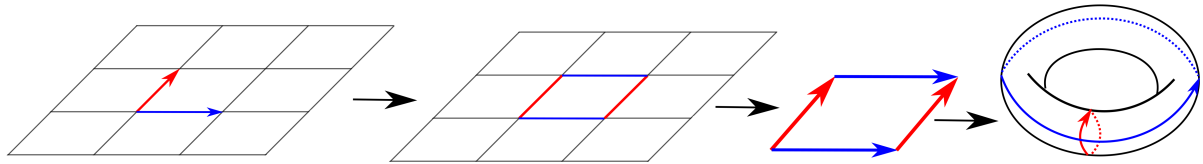
Orbifold z obrazem wzoru na nim zakodowuje pełną informację na temat wyjściowego wzoru, którego odtworzenie można sobie wyobrazić jako rozwijanie orbifoldu na płaszczyźnie. Możemy zatem, mając dany orbifold, jednoznacznie wskazać wzór płaski, który mu odpowiada.

5.2 Orbifolds poszczególnych typów symetrii

Na podstawie obserwacji zawartych w [1] (Rozdział 15 zatytułowany "Types of Tilings", str. 185–196) oraz [7] (Rozdział 4 zatytułowany "Dowód Magicznego Twierdzenia", str. 42–53), omówimy, jak wyglądają orbifolds poszczególnych typów symetrii wzorów płaskich. Zauważmy, że za każdym razem we wzorze płaskim występują symetrie translacyjne w dwóch różnych kierunkach. W pierwszym kroku możemy zatem utożsamić wszystkie punkty płaszczyzny z odpowiadającymi im punktami znajdującymi się w równoległoboku podstawowym (czyli równoległoboku, którego bokami są dwa najkrótsze niewspółliniowe wektory translacji zachowującej wzór).

Typ symetrii ◦

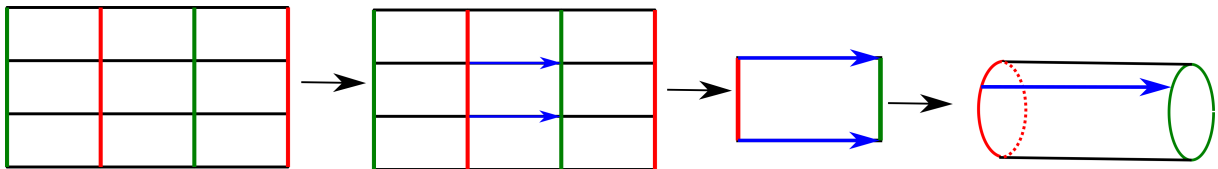
Wzór płaski o typie symetrii ◦ nie posiada żadnych cech symetrii, z wyjątkiem symetrii translacyjnych w dwóch różnych kierunkach. Po utożsamieniu punktów płaszczyzny z punktami równoległoboku podstawowego, należy jeszcze utożsamić równoległe boki tego równoległoboku, sklejąc je ze sobą. W ten sposób otrzymujemy torus będący orbifoldem każdego wzoru o tym typie symetrii.



Rysunek 33: Wzór o typie symetrii \circ jest przekształcany w torus

Typ symetrii $**$

W przypadku tego typu symetrii mamy do czynienia z dwoma rodzajami równoległych pojedynczych luster. Zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami, każde z nich musi stanowić brzeg orbifoldu. Ponieważ nie mają one punktów wspólnych, otrzymamy dwie komponenty brzegu. Wektory prostopadłe do pojedynczych luster i przechodzące przez analogiczne fragmenty wzoru, zostają utożsamione, jak w przypadku torusa. Otrzymana w ten sposób powierzchnia to powierzchnia boczna walca, której brzegi to ślady po pojedynczych lustrach wzoru.



Rysunek 34: Wzór o typie symetrii $**$ jest przekształcany w powierzchnię boczną walca

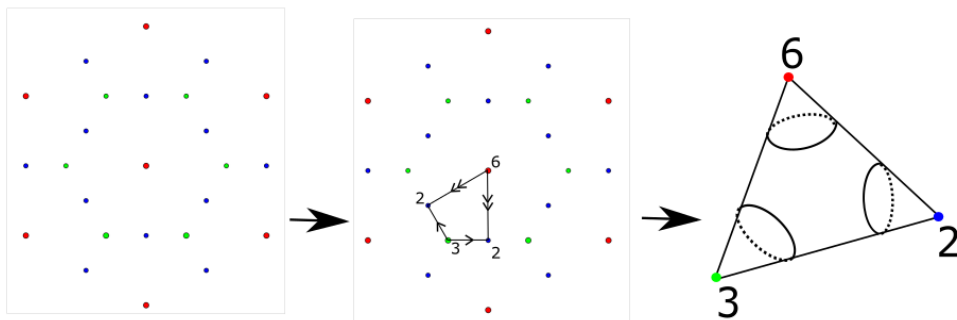
Warto w tym miejscu zauważyć, że powierzchnia boczna walca jest homeomorficzna z pierścieniem zawartym między dwoma współśrodkowymi okręgami o różnych promieniach. Fakt ten będzie pomocny w późniejszych rozważaniach.

Wzory posiadające jedynie punkty obrotowe

W celu znalezienia orbifoldu danego typu symetrii, możemy skupić się na rozważaniu wielokąta fundamentalnego. Jest to najmniejszy wielokąt przecinający się niepusto z każdą orbitą występującą w danym wzorze płaskim. Na Rysunkach 35 – 49 przedstawiono metodę tworzenia orbifoldów danych typów symetrii za pomocą wyznaczania wielokątów fundamentalnych i sklejanania boków wielokąta zgodnie z kierunkiem takich samych strzałek.

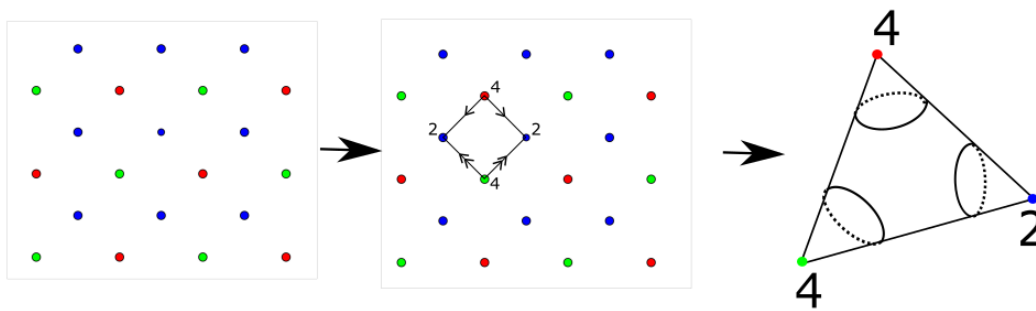
W przypadku wzorów płaskich posiadających jedynie punkty obrotowe, jedynymi elementami charakterystycznymi orbifoldu są punkty stożkowe, będące śladami po tych właśnie punktach obrotowych. Każdy punkt obrotowy n -krotny danego rodzaju zostaje przekształcony w punkt n -krotny stożkowy danego rodzaju. W przypadku k rodzajów punktów obrotowych orbifoldem jest pewna powierzchnia bez brzegu. Okazuje się, że powierzchnie tych orbifoldów są homeomorficzne ze sferą.

Typ 632



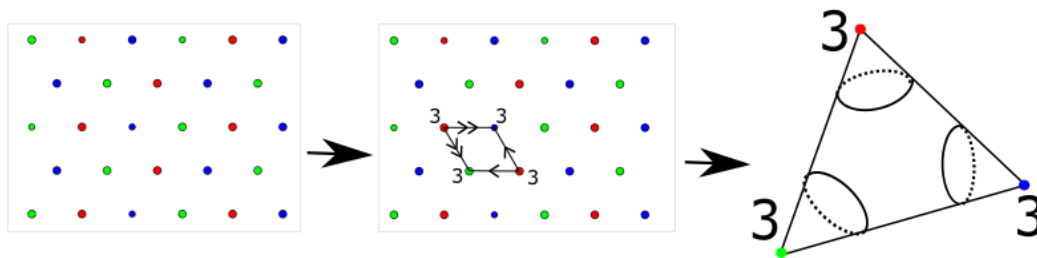
Rysunek 35: Wzór o typie symetrii 632 jest przekształcany w sferę z trzema punktami stożkowymi

Typ 442



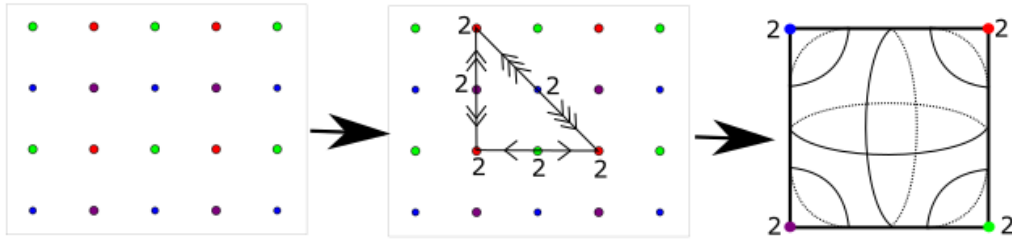
Rysunek 36: Wzór o typie symetrii 442 jest przekształcany w sferę z trzema punktami stożkowymi

Typ 333



Rysunek 37: Wzór o typie symetrii 333 jest przekształcany w sferę z trzema punktami stożkowymi

Typ 2222

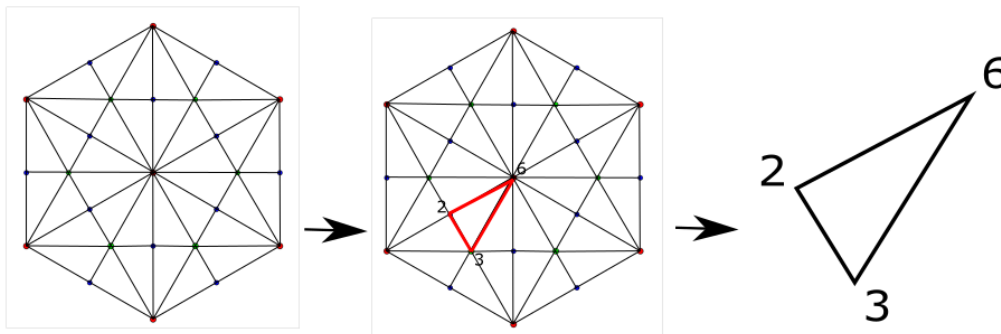


Rysunek 38: Wzór o typie symetrii 2222 jest przekształcany w sferę z czterema punktami stożkowymi

Wzory posiadające jedynie punkty kalejdoskopowe

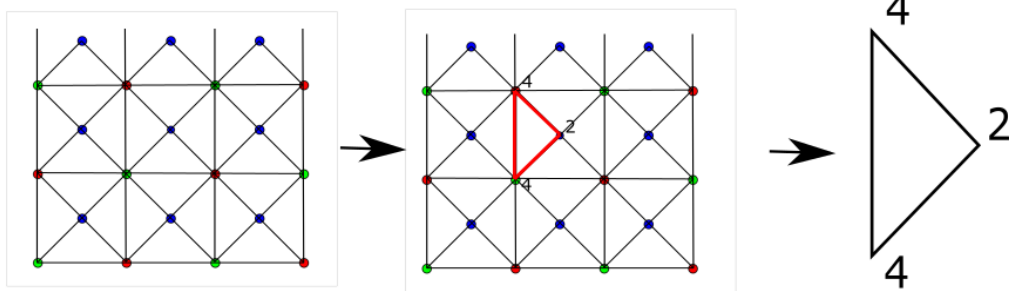
W przypadku wzorów płaskich posiadających jedynie punkty kalejdoskopowe, jedynymi elementami charakterystycznymi orbifoldu są punkty narożne — ślady po punktach kalejdoskopowych. Osie symetrii wzoru są przekształcane na punkty brzegowe. Każdy punkt kalejdoskopowy n -krotny danego rodzaju zostaje przekształcony w punkt n -krotny narożny danego rodzaju, czyli w kąt o mierze $\frac{\pi}{n}$. W przypadku k rodzajów punktów obrotowych o rzędach n_1, n_2, \dots, n_k , orbifoldem jest wielokąt o k wierzchołkach i miarach kątów wewnętrznych $\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \dots, \frac{\pi}{n_k}$. Okazuje się, że powierzchnia orbifoldu jest homeomorficzna z dyskiem.

Typ *632



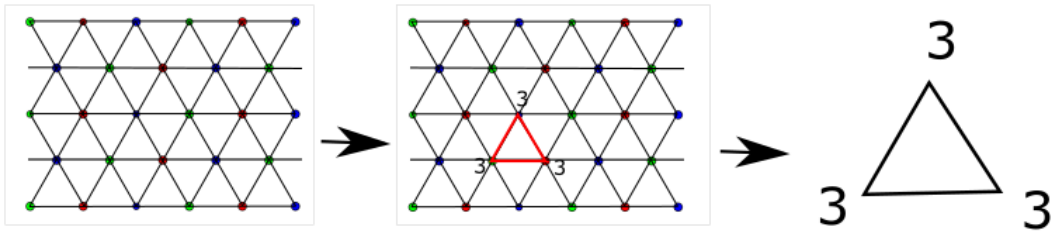
Rysunek 39: Wzór o typie symetrii *632 jest przekształcany w trójkąt o miarach kątów wewnętrznych $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

Typ *442



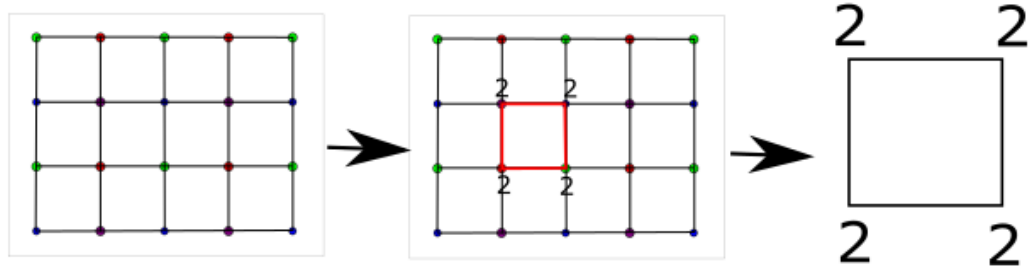
Rysunek 40: Wzór o typie symetrii *442 jest przekształcany w trójkąt o miarach kątów wewnętrznych $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

Typ *333



Rysunek 41: Wzór o typie symetrii *333 jest przekształcany w trójkąt o miarach kątów wewnętrznych $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

Typ *2222

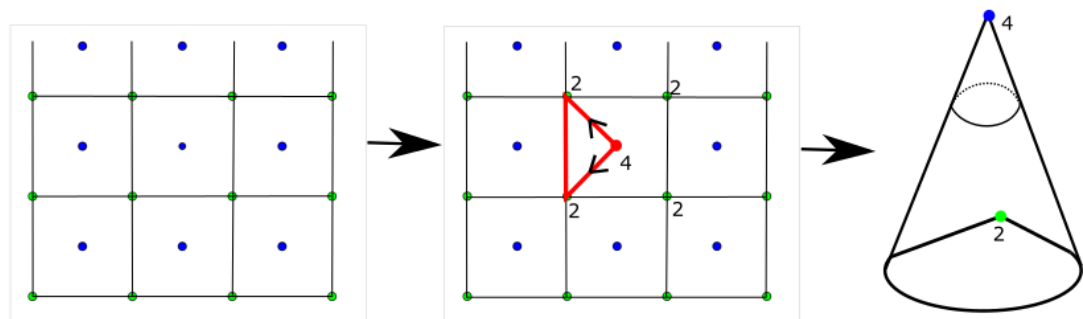


Rysunek 42: Wzór o typie symetrii *2222 jest przekształcany w czworokąt o miarach kątów wewnętrznych $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

Wzory posiadające jedynie punkty obrotowe i kalejdoskopowe

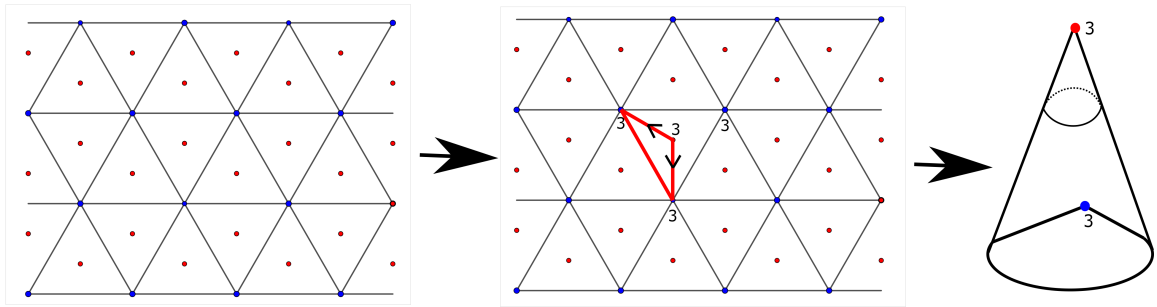
Dla wzorów o typach symetrii posiadających jedynie punkty obrotowe i kalejdoskopowe, elementami charakterystycznymi orbifoldu są ślady po tych właśnie punktach. Osie symetrii wzoru są przekształcane na punkty brzegowe, punkty n -krotne kalejdoskopowe danego rodzaju — na punkty n -krotne narożne danego rodzaju, zaś punkty obrotowe k -krotne danego rodzaju są przekształcane na punkty stożkowe k -krotne danego rodzaju. Również w tym przypadku powierzchnia orbifoldu jest homeomorficzna z dyskiem.

Typ 4*2



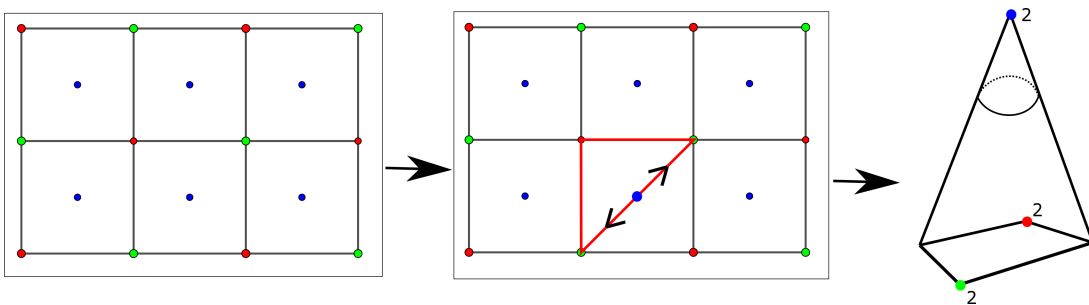
Rysunek 43: Wzór o typie symetrii $4 * 2$ jest przekształcany w powierzchnię boczną stożka z punktem narożnym 2-krotnym na brzegu

Typ 3*3



Rysunek 44: Wzór o typie symetrii $3 * 3$ jest przekształcany w powierzchnię boczną stożka z punktem narożnym 3-krotnym na brzegu

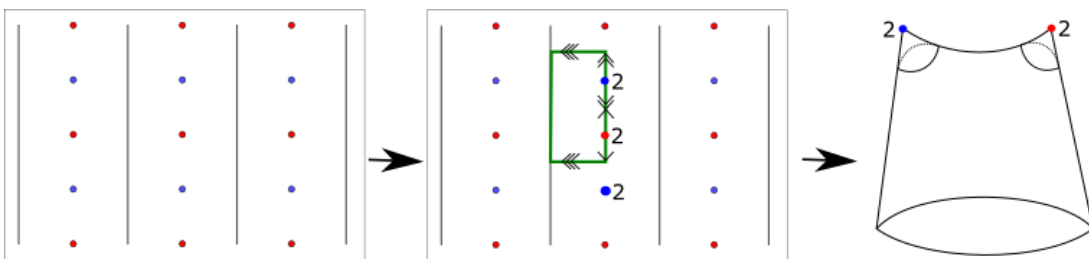
Typ 2*22



Rysunek 45: Wzór o typie symetrii $2 * 22$ jest przekształcany w powierzchnię boczną stożka z dwoma punktami narożnymi 2-krotnymi na brzegu

Typ symetrii 22*

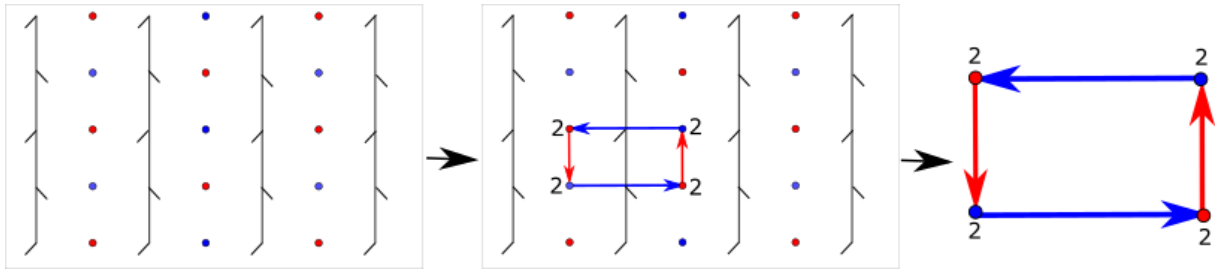
W tego typu wzorach mamy do czynienia z dwoma rodzajami punktów obrotowych rzędu 2 i z jednym rodzajem pojedynczych luster. Punkty obrotowe są przekształcane na punkty stożkowe orbifoldu, zaś osie symetrii stanowią brzeg orbifoldu. Uzyskana powierzchnia jest homeomorficzna z dyskiem.



Rysunek 46: Wzór o typie symetrii 22^* jest przekształcany w dysk z dwoma punktami stożkowymi wewnątrz

Typ symetrii 22x

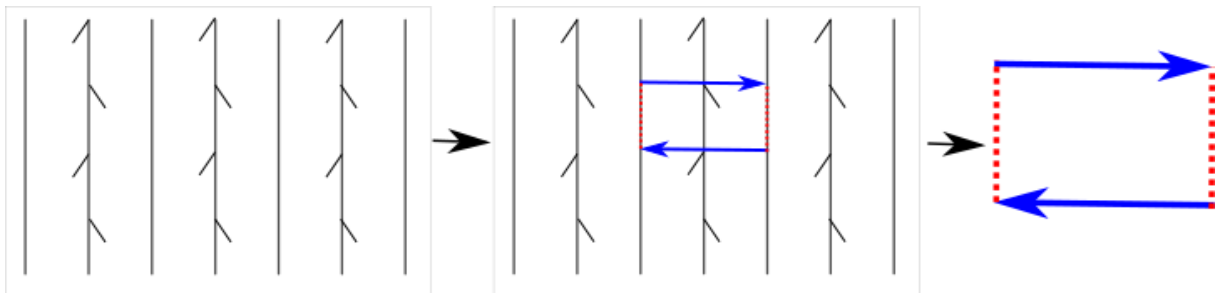
We wzorach o takim typie symetrii mamy dwa rodzaje punktów obrotowych i jeden rodzaj specjalnej symetrii z poślizgiem. Punkty obrotowe są przekształcane na punkty stożkowe dwóch rodzajów rzędu 2. Okazuje się, że obecność specjalnych symetrii z poślizgiem jest odpowiedzialna za nieorientowalność powierzchni orbifoldu. Orbifoldem jest płaszczyzna rzutowa z dwoma wyróżnionymi punktami stożkowymi.



Rysunek 47: Wzór o typie symetrii $22\times$ jest przekształcany na płaszczyznę rzutową z dwoma wyróżnionymi punktami stożkowymi

Typ symetrii $*\times$

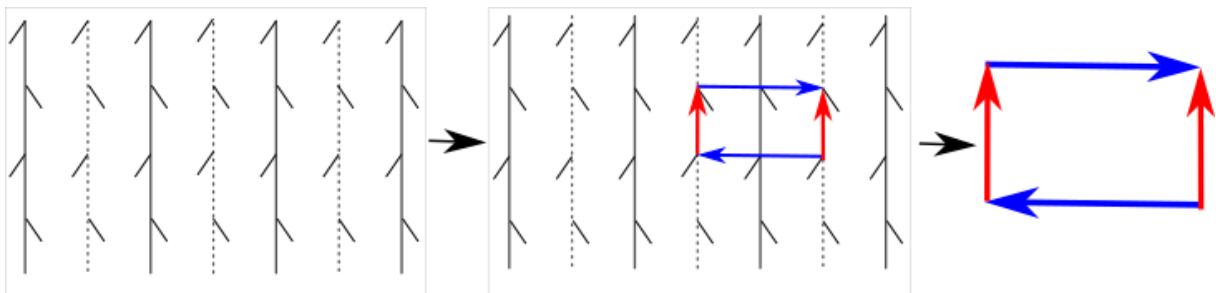
Dla wzorów o tym typie symetrii jedynymi elementami charakterystycznymi orbifoldu są punkty brzegowe będące śladami po pojedynczych lustrach. Specjalne symetrie z poślizgiem odpowiadają za nieorientowalność powierzchni orbifoldu. Orbifoldem jest wstęga Möbiusa.



Rysunek 48: Wzór o typie symetrii $*\times$ jest przekształcany we wstęgę Möbiusa

Typ symetrii $\times\times$

Wzory o typie symetrii $\times\times$ są przekształcane w orbifold będący butelką Kleina. Specjalne symetrie z poślizgiem odpowiadają za nieorientowalność powierzchni orbifoldu, pozostałe punkty płaszczyzny są przekształcane w punkty zwyczajne orbifoldu.



Rysunek 49: Wzór o typie symetrii $\times\times$ jest przekształcany w butelkę Kleina

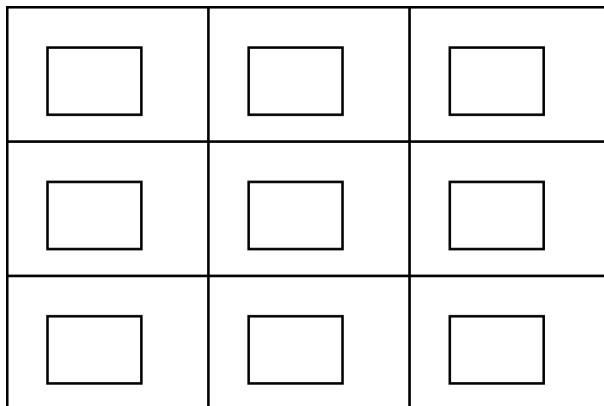
6 Parkietaże

W tym rozdziale przytoczymy podstawowe definicje związane z pojęciem parkierażu izohedralnego. Wprowadzimy rozróżnienie typów parkierażu izohedralnych, co pomoże zdefiniować, pod jakim kątem będzie prowadzona klasyfikacja. Informacje zawarte w tym rozdziale zostały szeroko opisane w [3].

Definicja 6.1. *Parkietażem* płaszczyzny nazwiemy pokrycie całej płaszczyzny figurami, z których każda jest ograniczona zamkniętą linią bez samoprzecięć (zwaną brzegiem figury) w taki

sposób, że figury te na siebie nie zachodzą, tzn. część wspólna dwóch figur musi leżeć na brzegu każdej z nich. Figury te nazywamy *plytkami* lub *klepkami* parkietażu.

Przykład 6.2. W przypadku Rysunku 50 nie mamy do czynienia z parkietażem, ponieważ figury jednego rodzaju nie są ograniczone pojedynczą linią, lecz dwiema liniami.

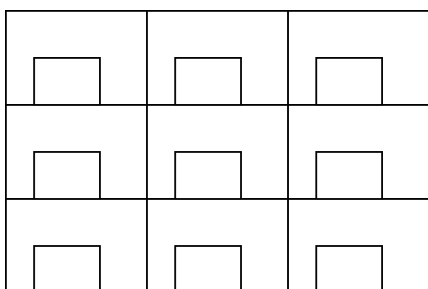


Rysunek 50: Podział płaszczyzny niebędący parkietażem

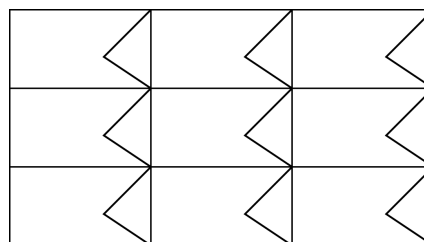
Parkietażami, które będą nas najbardziej interesować, są parkietáže zwyczajne.

Definicja 6.3. Z *parkietażem zwyczajnym* mamy do czynienia, gdy dowolne dwie płytki są albo rozłączne, albo mają dokładnie jeden punkt wspólny, albo ich część wspólna to pojedyncza linia mająca początek i koniec zawarte w linii brzegowej każdej z tych dwóch płytek.

Przykład 6.4. Rozważmy parkietáže:



Rysunek 51: Parkietaż niezwyčajny



Rysunek 52: Parkietaż niezwyčajny

Parkietáže przedstawione na Rysunkach 51 i 52 nie są parkietażami zwyczajnymi, ponieważ w pierwszym przypadku częścią wspólną dwóch płytek są dwa odcinki, a w drugim — dwa wierzchołki.

W parkietażach zwyczajnych definiujemy:

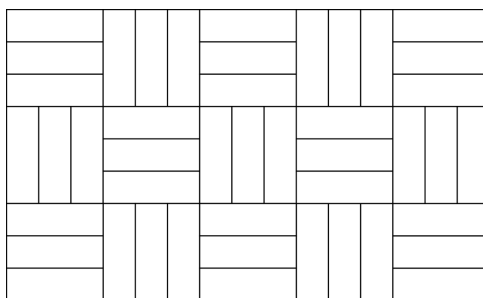
- *wierzchołek (węzeł) parkietażu* — punkt należący do więcej niż dwóch płytek parkietażu;
- *krawędź parkietażu* — fragment linii granicznej ustalonej płytki pomiędzy kolejnymi węzłami parkietażu; każda krawędź parkietażu jest częścią wspólną dokładnie dwóch płytek;
- płytkę zawierającą w swoim brzegu n wierzchołków parkietażu oraz n krawędzi parkietażu nazywamy *plytką n -boczną*;
- *stopień wierzchołka parkietażu* — liczba krawędzi parkietażu wychodzących z tego wierzchołka;
- *typ walencyjny klepki* — cykliczny ciąg liczb równych stopniom kolejnych wierzchołków parkietażu na brzegu płytki w miarę obchodzenia po obwodzie.

Definicja 6.5. Parkietaż zwyczajny nazwiemy *regularnym (izohedralnym)*, gdy płytki tego parkietażu tworzą jedną klasę tranzytywności względem symetrii tego parkietażu. Oznacza to, że każda płytka daje się przeprowadzić na dowolną inną przez pewną symetrię całego parkietażu.

W zwyczajnym parkietażu regularnym:

- wszystkie płytki mają jednakowe kształty,
- wszystkie płytki mają ten sam typ walencyjny,
- każda płytka jest położona w identyczny sposób względem płytek z nią nierozłącznych, co znaczy, że nie można odróżnić płytek, ponieważ lokalnie są one identyczne oraz identycznie położone względem płytek sąsiednich.

Przykład 6.6. Rozważmy parkietaż zwyczajny przedstawiony na Rysunku 53.



Rysunek 53: Parkietaż zwyczajny z dwoma rodzajami płytek

Mamy tu do czynienia z dwoma rodzajami płytek. Na brzegu płytek pierwszego rodzaju znajduje się 6 wierzchołków parkietażu, a na brzegu płytek drugiego rodzaju — 4 wierzchołki. Typy walencyjne tych klepek wynoszą $[3, 4, 3, 3, 4, 3]$ i $[3, 3, 3, 3]$. Nie jest to zatem parkietaż izohedralny.

Dwa parkietaże izohedralne o jednakowych typach walencyjnych klepek mogą różnić się *regułami przylegania* klepek sąsiadujących. Są to reguły informujące o tym, które boki klepki przylegają do siebie nawzajem i czy przyleganiu towarzyszy zmiana orientacji płytek. Zmiana taka wynika z występowania konkretnych cech symetrii parkietażu:

- Jeżeli sąsiednia płytka powstaje z poprzedniej przez obrót lub translację, orientacja zostaje zachowana.
- Jeżeli sąsiednia płytka powstaje z poprzedniej przez symetrię osiową lub symetrię z poślizgiem, orientacja zostaje zmieniona.

Reguły przylegania są zapisywane schematycznie w następujący sposób:

- oznaczamy wszystkie krawędzie pojedynczej płytki;
- sprawdzamy, do jakich krawędzi w sąsiednich płytkach (wspólnych z wybraną płytką) przylegają poszczególne krawędzie wybranej płytki (to znaczy są na nie przekształcane przez pewną symetrię całego parkietażu), takie krawędzie łączymy w pary; krawędzie przyległe do samych siebie łączymy ze sobą (taką sytuację oznaczamy punktem);
- weryfikujemy, czy przekształcenie przeprowadzające połączone krawędzie zachowuje, czy zmienia orientację płytki; zachowywanie orientacji oznaczamy znakiem "+", zaś jej zmianę — znakiem "-".

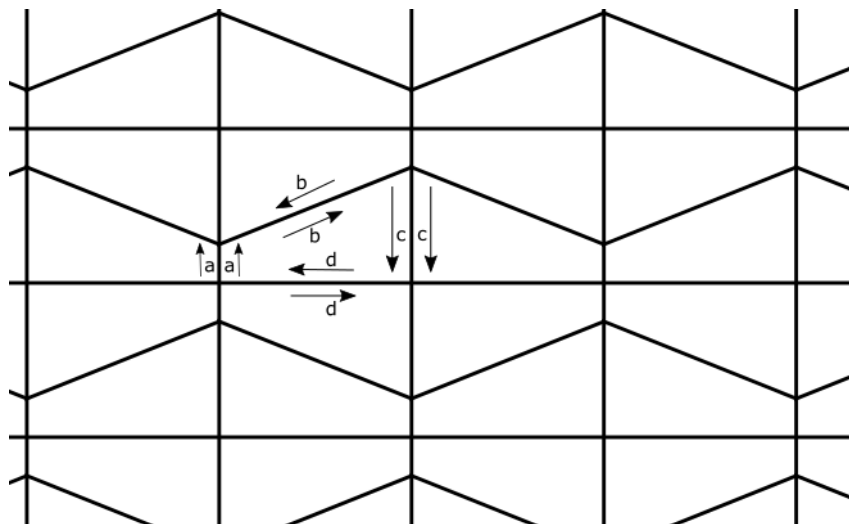
Definicja 6.7. *Typem (kombinatorycznym) parkietażu izohedralnego* nazywamy zapis zawierający informacje na temat typu walencyjnego klepek oraz sposobu przylegania pojedynczej klepki z klepkami z nią sąsiadującymi.

Typ kombinatoryczny parkietażu jest opisywany przez diagram parkietażu izohedralnego.

Definicja 6.8. *Diagram parkietażu izohedralnego* jest to schemat ilustrujący typ walencyjny pojedynczej klepki parkietażu oraz reguły przylegania klepek.

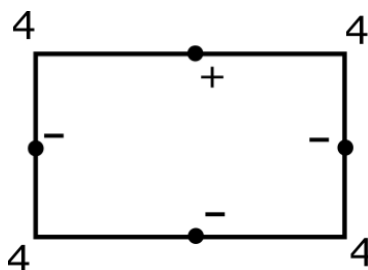
Diagram zawierający typ walencyjny klepki oraz schematyczne oznaczenie reguł przylegania przedstawimy na przykładzie. Oznaczenia graficzne są zgodne z [3].

Przykład 6.9. W parkietażu izohedralnym przedstawionym na Rysunku 54 sąsiadujące płytki powstają przez półobrót albo symetrię osiową. Możemy zatem schematycznie zaznaczyć przyleganie płytek na Rysunku 54.



Rysunek 54: Parkietaż izohedralny

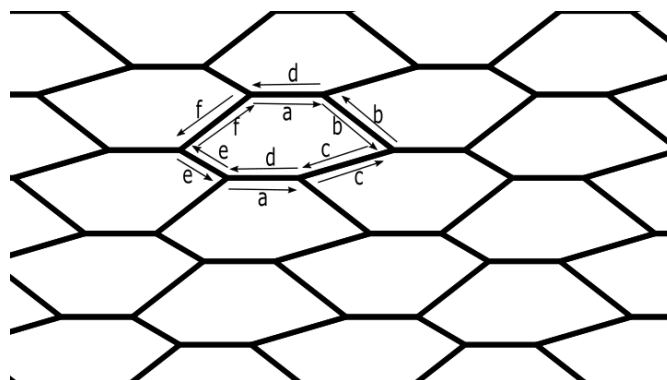
Schematycznie możemy przedstawić reguły przylegania na Rysunku 55.



Rysunek 55: Typ kombinatoryczny

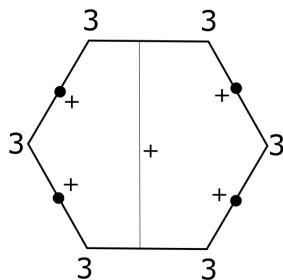
Znaki "–" oznaczają zmianę orientacji płytki, zaś znaki "+", zachowanie orientacji.

Przykład 6.10. Rozważmy parkietaż izohedralny o innym typie symetrii, przedstawiony na Rysunku 56.



Rysunek 56: Parkietaż izohedralny

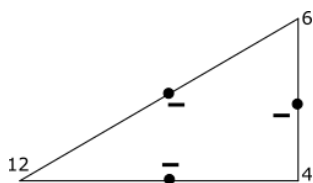
W tym przypadku możemy schematycznie przedstawić reguły przylegania na Rysunku 57.



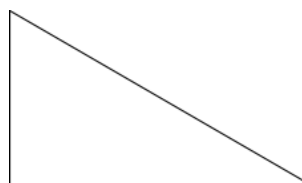
Rysunek 57: Reguły przylegania

Mając dany kształt pojedynczej klepki oraz typ kombinatoryczny parkietażu, możemy jednoznacznie odtworzyć cały parkietaż, zaczynając od pojedynczej klepki i "doklejając" kolejne sąsiednie klepki na podstawie reguł przylegania.

Przykład 6.11. Rozważmy parkietaż izohedralny o typie kombinatorycznym jak na Rysunku 58 i płytkach o danym trójkątnym kształcie, jak na Rysunku 59:

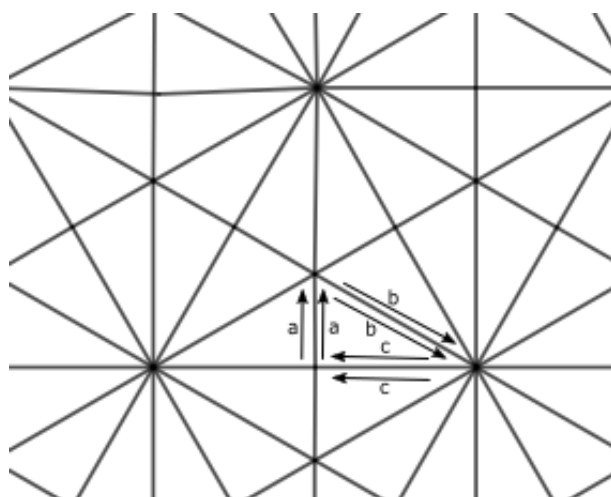


Rysunek 58: Typ kombinatoryczny



Rysunek 59: Kształt klepki

Otrzymujemy parkietaż:



Rysunek 60: Parkietaż izohedralny

Na podstawie kształtu płytki i typu kombinatorycznego parkietażu możemy jednoznacznie określić wygląd całego parkietażu.

Definicja 6.12 pomoże nam zrozumieć cel pracy prowadzący do sklasyfikowania wszystkich parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach.

Definicja 6.12. Mówimy, że dwa parkietaże izohedralne mają *ten sam typ kombinatoryczny*, jeśli ich diagramy są równoważne. Oznacza to, że typy walencyjne klepek w tych parkietażach są takie same oraz reguły przylegania kolejnych klepek są takie same.

Celem pracy jest znalezienie wszystkich typów kombinatorycznych parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach.

7 Orbifold parkietażu izohedralnego

Jak już wcześniej wspomnieliśmy, każdemu orbifoldowi odpowiada dokładnie jeden typ symetrii wzoru. Dodatkowo, jeśli na danym orbifoldzie odtworzymy znajdujący się w tej części płaszczyzny fragment wzoru, będziemy w stanie zrekonstruować cały wzór. Analogicznie możemy postąpić w przypadku parkietażu. Ponieważ każdy parkietaż regularny jest w szczególności wzorem płaskim, ma pewien typ symetrii. Możemy zatem rozważyć odpowiadający temu parkietażowi orbifold, wraz z zaznaczonym na jego powierzchni grafem utworzonym z wierzchołków i krawędzi parkietażu. Wprowadzimy teraz kilka niezbędnych definicji i oznaczeń. Przez Ω oznaczymy parkietaż regularny, a przez O_Ω , orbifold parkietażu Ω .

Definicja 7.1. *Szkieletem parkietażu Ω nazywamy zbiór wszystkich krawędzi i wszystkich wierzchołków tego parkietażu (ozn. Σ_Ω).*

Definicja 7.2. *Grafem szkieletowym parkietażu Ω na orbifoldzie O_Ω nazywamy graf złożony z orbit odpowiadających punktom szkieletu parkietażu Σ_Ω , czyli wierzchołkom i punktom krawędzi parkietażu Ω (ozn. Γ_Ω).*

Celem tego rozdziału będzie opisanie własności grafu szkieletowego parkietażu regularnego o niesymetrycznych klepkach. Analogicznie jak w przypadku wzorów płaskich, możemy również jednoznacznie przekształcić dowolny parkietaż izohedralny w jego orbifold (wraz z naniesionym szkieletem parkietażu). W ten sposób otrzymujemy Twierdzenie 7.3.

Twierdzenie 7.3. *Zachodzi bijekcja między zbiorem parkietażu izohedralnych i zbiorem ich orbifoldów (z naniesionymi szkieletami w postaci grafów szkieletowych).*

Własności szkieletu parkietażu regularnego o niesymetrycznych klepkach

Ustalmy płytkę P parkietażu regularnego Ω . Każda orbita zawarta w parkietażu Ω przecina P dokładnie raz, z wyjątkiem orbit punktów szkieletu Σ_Ω , które mogą przecinać P kilka razy. Orbifold O_Ω możemy zatem wyobrazić sobie jako powierzchnię utworzoną z płytki P poprzez sklejenie tych punktów jej brzegu, które należą do tej samej orbity. Graf szkieletowy Γ_Ω to podzbiór, jaki tworzą punkty z brzegu płytki P na powstałej powierzchni orbifoldu O_Ω . Rozcinając orbifold O_Ω wzdłuż grafu szkieletowego Γ_Ω , otrzymamy ponownie płytkę P . Z tego opisu wynikają następujące własności grafu szkieletowego Γ_Ω (Twierdzenia 7.4 i 7.5).

Twierdzenie 7.4. *Po rozcięciu orbifoldu O_Ω wzdłuż grafu szkieletowego Γ_Ω otrzymujemy dysk.*

Dowód. Rozcinając orbifold O_Ω wzdłuż grafu szkieletowego Γ_Ω , otrzymujemy pojedynczą płytkę parkietażu. Takie rozcięcie musi zatem prowadzić do uzyskania powierzchni homeomorficznej z dyskiem. \square

Twierdzenie 7.5. *Graf szkieletowy Γ_Ω jest spójny.*

Dowód. Graf szkieletowy Γ_Ω jest fragmentem krawędzi płytki parkietażu, wzdłuż którego rozcinając orbifold O_Ω , otrzymujemy pojedynczą płytkę parkietażu. Jest on spójny, ponieważ w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy po rozcięciu orbifoldu O_Ω wzdłuż krzywej Γ_Ω powierzchnię z kilkoma komponentami brzegu, która nie jest homeomorficzna z dyskiem reprezentującym pojedynczą klepkę parkietażu. \square

Twierdzenie 7.6. *Niech P będzie punktem stożkowym orbifoldu O_Ω . Wówczas graf szkieletowy Γ_Ω musi przechodzić przez punkt P .*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że graf szkieletowy nie przechodzi przez pewien punkt stożkowy orbifoldu. Wtedy punkt obrotowy, którego śladem jest punkt stożkowy znajduje się wewnątrz klepki, co oznacza, że płytki parkietażu mają symetrie własne. Stanowi to sprzeczność z niesymetrycznością klepek. \square

Twierdzenie 7.7. *Cały brzeg orbifoldu O_Ω musi zawierać się w jego grafie szkieletowym Γ_Ω .*

Dowód. Brzeg orbifoldu jest śladem po osiach symetrii parkietażu. Dotyczy to zarówno pojedynczych luster i osi symetrii przecinających się w punktach kalejdoskopowych. Załóżmy nie wprost, że istnieje fragment brzegu orbifoldu, który nie zawiera się w grafie szkieletowym. Oznacza to, że fragment osi symetrii wzoru znajduje się wewnątrz klepki, co prowadzi do istnienia jej symetrii własnych i sprzeczności z niesymetrycznością płytek. \square

Twierdzenie 7.8. *Zwyczajny punkt orbifoldu O_Ω (niebędący punktem stożkowym, ani brzegowym) nie może być punktem końcowym grafu Γ_Ω .*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że pewien punkt zwyczajny P orbifoldu O_Ω jest punktem końcowym grafu Γ_Ω . Po odtworzeniu parkietażu Ω , punkt P zostanie przekształcony w pewien punkt zwyczajny P' parkietażu Ω , zawarty w szkielecie Σ_Ω . Ponieważ w bliskim otoczeniu punktu P' nie występują żadne cechy symetrii wzoru, punkt P' będzie punktem końcowym szkieletu Σ_Ω . Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ szkielet parkietażu nie może mieć punktów końcowych. \square

8 Parkietaże izohedralne o niesymetrycznych klepkach

W ostatnim rozdziale przedstawiamy klasyfikację parkietaży regularnych o niesymetrycznych klepkach. Uzyskamy ją przez przeanalizowanie wszystkich możliwych położzeń grafu szkieletowego Γ_Ω parkietażu Ω przez rzutowanie płaszczyzny parkietażu Ω na orbifold O_Ω . Analiza ta polega na przedstawieniu grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie O_Ω parkietażu Ω jako sumę krzywych $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, z których każda będzie odpowiadać kolejnej fazie rozcinania orbifoldu O_Ω , aby po ostatnim rozcięciu otrzymać dysk, który utożsamiamy z pojedynczą płytką parkietażu Ω (zgodnie z Twierdzeniem 7.4).

8.1 Parkietaże nieposiadające symetrii nietranslacyjnych

W przypadku parkietaży, których jedynymi symetrami są translacje, orbifoldem O_Ω parkietażu jest torus. W grafie szkieletowym Γ_Ω musi zawierać się zamknięta krzywa Γ_1 , która nie rozspaja torusa. Jeśli zaczniemy poruszać się po grafie Γ_Ω , zaczynając w dowolnym punkcie, w pewnym momencie znajdziemy się na wcześniej odwiedzonej części grafu Γ_Ω , ponieważ nie ma w tym przypadku żadnych wolnych końców grafu szkieletowego na orbifoldzie (zgodnie z Twierdzeniem 8.2). Taki fragment grafu Γ_Ω do pierwszego ponownego odwiedzenia pewnego punktu utworzy krzywą zamkniętą bez samoprzecięć znajdującą się na powierzchni torusa. Ponieważ torus jest powierzchnią orientowalną, krzywa Γ_1 jest dwustronna. Po rozcięciu otrzymujemy powierzchnię spójną O'_Ω . Ponieważ O_Ω jest powierzchnią orientowalną, również O'_Ω musi być orientowalna (zgodnie z Faktem 4.4). Zgodnie z Twierdzeniem 4.7 $\chi(O'_\Omega) = \chi(O_\Omega)$ oraz liczba komponent brzegu zwiększa się o 2. O'_Ω jest powierzchnią orientowalną z dwiema komponentami brzegu, której charakterystyka Eulera $\chi(O'_\Omega) = 0$. Aby przekonać się, jaka to powierzchnia, rozwiążemy następujące równanie:

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma_g) - 2 &= 0 \\ 2 - 2g - 2 &= 0 \\ g &= 0\end{aligned}$$

Zatem O'_Ω jest sferą z wyciętymi dwoma dyskami. Nie jest ona homeomorficzna z dyskiem, musimy zatem rozważyć krzywą Γ_2 rozcinającą powierzchnię O'_Ω . Graf szkieletowy Γ_Ω jest spójny (zgodnie z Twierdzeniem 7.5), więc kolejny jego fragment (krzywa Γ_2) musi zaczynać się w pewnym punkcie A krzywej Γ_1 . Zaczynając od tego punktu, poruszamy się po krzywej Γ_2 . Ponieważ na orbifoldzie nie ma wolnych końców grafu, dotrzemy do pewnego punktu B na krzywej Γ_1 albo na krzywej Γ_2 , który już wcześniej odwiedziliśmy. W efekcie tego cięcia otrzymujemy powierzchnię O''_Ω .

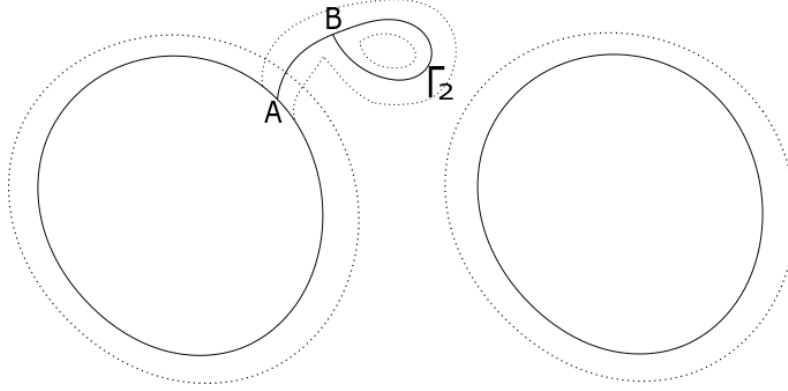
Mamy trzy potencjalne możliwości umieszczenia krzywej Γ_2 tak, aby otrzymać spójny graf szkieletowy Γ_Ω będący sumą $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

1. Γ_2 ma początek na brzegu O'_Ω i koniec na Γ_2 ;
2. Γ_2 ma początek i koniec na tej samej komponentce brzegu O'_Ω ;

3. Γ_2 ma początek i koniec na różnych komponentach brzegu O'_Ω .

Zauważmy, że Γ_2 jest krzywą lokalnie dwustronną, a ponieważ O'_Ω jest powierzchnią orientowaną, O''_Ω również jest powierzchnią orientowaną.

W przypadku 1. po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, otrzymujemy powierzchnię z trzema komponentami brzegu (pierwszą — tą komponentą brzegu powierzchni O'_Ω , która jest rozłączna z krzywą Γ_2 , drugą — zamkniętym fragmentem krzywej Γ_2 wyznaczonym przez punkt B i trzecią — zaczynającą się w punkcie A , przechodzącą przez krzywą Γ_2 aż do punktu B , następnie przez fragment krzywej Γ_2 kończący się w punkcie A i tę komponentę brzegu powierzchni O'_Ω , która zawierała punkt A). Opisaną sytuację przedstawia Rysunek 61.



Rysunek 61: Graf szkieletowy Γ_Ω na torusie

Obliczmy charakterystykę Eulera powierzchni O''_Ω . Wybierzmy taką triangulację, w której w punktach A i B znajdują się wierzchołki triangulacji. Liczba obszarów trójkątnych triangulacji nie ulega zmianie, gdyż możemy tak wybrać triangulację, aby brzegi obszarów zawierały linię cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę krawędzi tej triangulacji zawartych w krzywej Γ_2 . Wówczas liczba wierzchołków tej triangulacji zawartych w Γ_2 również wynosi n . Wtedy liczba krawędzi triangulacji powierzchni O''_Ω zwiększy się o n , gdyż każda z krawędzi zawartych w krzywej Γ_2 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O''_Ω . Liczba wierzchołków triangulacji zwiększy się o $n + 1$, ponieważ każdy wierzchołek zawarty w krzywej Γ_2 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O''_Ω , a ponadto wierzchołek B pojawi się jeszcze raz, ponieważ graf w jego bliskim otoczeniu dzieli powierzchnię na trzy części.

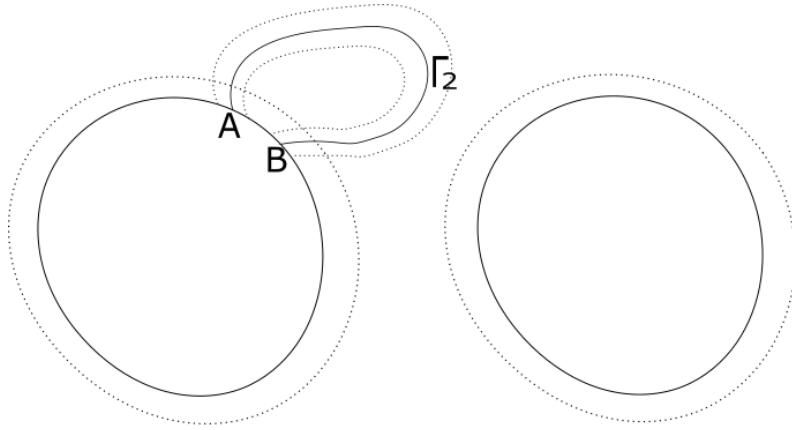
$$\begin{aligned} T'' &= T \\ W'' &= W + n + 1 \\ K'' &= K + n \end{aligned}$$

Zatem $\chi(O''_\Omega) = T'' + W'' - K'' = T + W + n + 1 - K - n = T + W - K + 1 = 1$. Na podstawie twierdzenia klasyfikującego powierzchnie z brzegiem, sprawdzamy, jaka to powierzchnia:

$$\begin{aligned} \chi(\Sigma_g) - 3 &= 1 \\ 2 - 2g - 3 &= 1 \\ g &= -1 \end{aligned}$$

Nie istnieje taka powierzchnia spójna, możemy więc wykluczyć przypadek 1.

W przypadku 2. postępujemy podobnie. Również tym razem po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, otrzymujemy powierzchnię z trzema komponentami brzegu (pierwszą — tą komponentą brzegu powierzchni O'_Ω , która jest rozłączna z krzywą Γ_2 , drugą — sumą krzywej Γ_2 oraz fragmentu komponenty brzegu powierzchni O'_Ω wyznaczonego przez punkty A i B i trzecią — zaczynającą się w punkcie A , przechodzącą przez krzywą Γ_2 aż do punktu B i zawierającą fragment komponenty brzegu powierzchni F' zaczynający się w punkcie B i kończący się w punkcie A). Opisaną sytuację przedstawia Rysunek 62.



Rysunek 62: Graf szkieletowy Γ_Ω na torusie

Obliczmy charakterystykę Eulera powstałej powierzchni. Wybierzmy taką triangulację, w której w punktach A i B znajdują się wierzchołki triangulacji. Liczba obszarów trójkątnych triangulacji nie ulega zmianie, gdyż możemy tak wybrać triangulację, aby brzegi obszarów zawierały linię cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę krawędzi tej triangulacji zawartych w krzywej Γ_2 . Wówczas liczba wierzchołków tej triangulacji zawartych w Γ_2 wynosi $n + 1$, jeżeli $A \neq B$ oraz n , jeżeli $A = B$. Wtedy liczba krawędzi triangulacji powierzchni O''_Ω zwiększy się o n , gdyż każda z krawędzi zawartych w krzywej Γ_2 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O''_Ω . Liczba wierzchołków triangulacji zwiększy się o $n + 1$, ponieważ każdy wierzchołek zawarty w krzywej Γ_2 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O''_Ω (jeżeli $A = B$, wierzchołek B pojawi się trzykrotnie, ponieważ w jego bliskim otoczeniu graf dzieli powierzchnię na trzy części, więc liczba wierzchołków triangulacji również zwiększy się o $n + 1$).

$$\begin{aligned} T'' &= T \\ W'' &= W + n + 1 \\ K'' &= K + n \end{aligned}$$

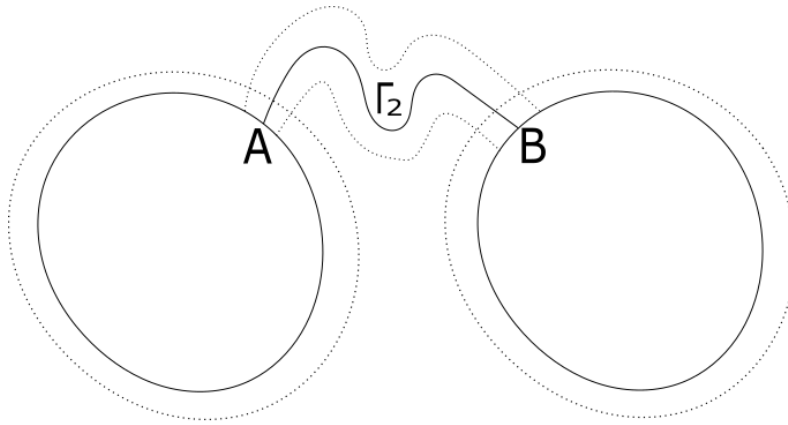
Zatem $\chi(O''_\Omega) = T'' + W'' - K'' = T + W + n + 1 - K - n = T + W - K + 1 = 1$. W tym przypadku również po rozcięciu orbifoldu, otrzymujemy powierzchnię z trzema komponentami brzegu i charakterystyką Eulera $\chi(O''_\Omega) = 1$. Tak jak w przypadku 1., nie istnieje taka powierzchnia spójna.

W przypadku 3. po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, otrzymujemy krzywą Γ_2 właściwie włożoną w powierzchnię O'_Ω . Może ona mieć początek i koniec w punktach, które po ponownym sklejeniu w torus dadzą ten sam punkt lub dwa różne punkty. O''_Ω jest powierzchnią orientowalną, ponieważ orientowalna była powierzchnia O'_Ω . Jest ona spójna, ponieważ w ten sposób wybraliśmy krzywą Γ_2 . Policzmy, ile komponent brzegu ma O''_Ω . Jeśli zaczniemy od punktu wspólnego Γ_1 oraz Γ_2 , poruszając się po brzegu O''_Ω , otrzymamy kolejno pierwszą komponentę brzegu powierzchni O''_Ω , krzywą Γ_2 , drugą komponentę brzegu powierzchni O''_Ω i znów krzywą Γ_2 (ze względu na jej dwustronność). O''_Ω ma więc jedną komponentę brzegu. Opisaną sytuację przedstawia Rysunek 63.

Charakterystyka Eulera powierzchni O''_Ω , zgodnie z Twierdzeniem 4.7, wynosi $\chi(O''_\Omega) = 0 + 1 = 1$. Sprawdzamy, jaka to powierzchnia:

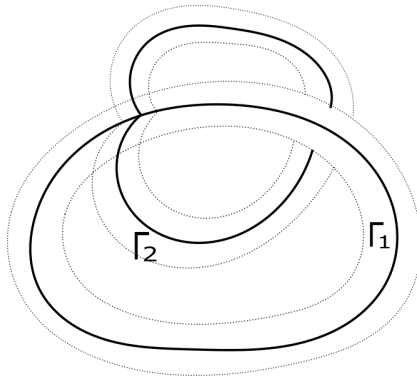
$$\begin{aligned} \chi(\Sigma_g) - 1 &= 1 \\ 2 - 2g - 1 &= 1 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

Jest to sfera z wyciętym dyskiem, czyli z dokładnością do homeomorfizmu — dysk.

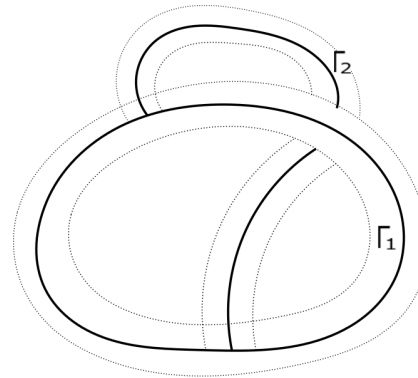


Rysunek 63: Graf szkieletowy Γ_Ω na torusie

Krzywa Γ_2 może mieć początek i koniec w tym samym punkcie krzywej Γ_1 (Rys. 64) lub w różnych punktach tej krzywej (Rys. 65). Mamy więc dwa możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω parkietażu Ω na orbifoldzie O_Ω typu symetrii \circ .

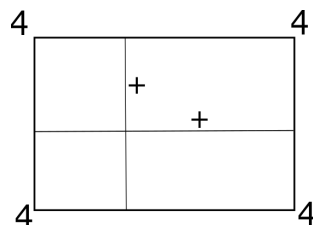


Rysunek 64: Graf szkieletowy Γ_Ω na torusie



Rysunek 65: Graf szkieletowy Γ_Ω na torusie

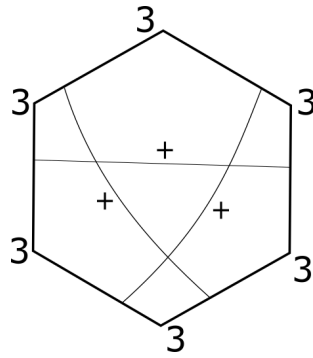
W pierwszym przypadku graf szkieletowy Γ_Ω składa się z dwóch krzywych dwustronnych Γ_1 i Γ_2 mających jeden punkt wspólny, który dzieli każdą z nich na dwie części. Prowadzi to do pojawienia się czterech krawędzi klepki w parkietażu. Stopień każdego z wierzchołków wynosi 4, ponieważ są one obrazami punktu wspólnego krzywych Γ_1 i Γ_2 . Jako że mamy tutaj do czynienia jedynie z symetrami translacyjnymi, krawędzie są przekształcane na krawędzie do nich równoległe z zachowaniem orientacji (znaki "+"). Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 66.



Rysunek 66: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii \circ

W drugim przypadku graf szkieletowy Γ_Ω składa się z dwóch krzywych dwustronnych Γ_1 i Γ_2 mających dwa punkty wspólne, które dzielą każdą z nich na trzy części. Prowadzi to do pojawienia się sześciu krawędzi klepki w parkietażu. Stopień każdego z wierzchołków wynosi 3, ponieważ są one obrazami punktów wspólnych krzywych Γ_1 i Γ_2 . Jako że mamy tutaj do czynienia jedynie z symetrami translacyjnymi, krawędzie są przekształcane na krawędzie do nich równoległe z zachowaniem orientacji (znaki "+"). Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny

klepki przedstawiony na Rysunku 67.

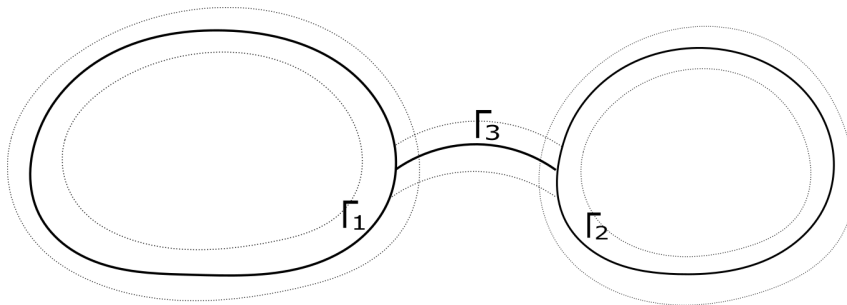


Rysunek 67: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii \circ

8.2 Parkietaże z dwoma rodzajami pojedynczych luster

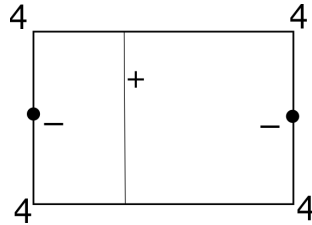
W przypadku parkietaży o typie symetrii $**$ orbifoldem O_Ω jest powierzchnia boczna walca, której brzeg jest śladem po pojedynczych lustrach parkietażu Ω . Jest ona homeomorficzna ze sferą z wyciętymi dwoma dyskami. Zgodnie z Twierdzeniem 7.7, cały brzeg orbifoldu O_Ω musi zawierać się w jego grafie szkieletowym Γ_Ω . Jako pierwsze elementy grafu szkieletowego możemy więc wybrać krzywe Γ_1 i Γ_2 będące brzegiem orbifoldu. Otrzymaliśmy więc powierzchnię O_Ω — sferę z wyciętymi dwoma dyskami, której brzeg zawiera się w grafie szkieletowym Γ_Ω .

W tym przypadku postępujemy identycznie, jak w przypadku powierzchni O'_Ω powstałej z torusa przez rozcięcie go krzywą dwustronną (Rozdział 8.1). Krzywa Γ_3 łącząca dwie komponenty brzegu powierzchni O_Ω rozcina ją, w wyniku czego otrzymujemy dysk. Ponieważ Γ_1 i Γ_2 są różnymi krzywymi, nie utożsamiamy punktów na nich i w efekcie otrzymujemy jeden możliwy graf szkieletowy Γ_Ω znajdujący się na orbifoldzie O_Ω .



Rysunek 68: Graf szkieletowy Γ_Ω na powierzchni bocznej walca

Mamy krzywe Γ_1 , Γ_2 oraz Γ_3 . Ponieważ krzywe Γ_1 i Γ_2 należą do brzegu parkietażu, płytka znajduje się po wspólnej stronie tych krzywych. Krzywa Γ_3 jest krzywą lokalnie dwustronną. Zatem każda klepka parkietażu ma 4 krawędzie. Ślad po krzywej Γ_3 zostaje przekształcony przez odbicie względem pojedynczych luster (śladów po krzywych Γ_1 i Γ_2), przez co stopień każdego wierzchołka wynosi 4. Krawędzie klepki, które powstają z krzywych Γ_1 i Γ_2 , zawierają się w pojedynczych lustrach parkietażu. Są zatem przekształcane same na siebie pod wpływem symetrii parkietażu, która jest przekształceniem zmieniającym orientację. W diagramie parkietażu będą więc połączone same ze sobą, ze znakiem $-$. Krawędzie powstałe z krzywej Γ_3 przechodzą na krawędzie do nich równoległe przez działanie translacji. W tym przypadku orientacja jest zachowana, zostaną więc sparowane ze znakiem $+$. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 69.



Rysunek 69: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii **

8.3 Parkietaże posiadające jedynie punkty obrotowe

Orbifoldami wzorów posiadających jedynie punkty obrotowe są sfery z wyróżnionymi punktami stożkowymi. Zgodnie z Twierdzeniem 7.6, graf szkieletowy Γ_Ω parkietażu musi przechodzić przez każdy punkt stożkowy. Ponieważ każda krzywa zamknięta zawarta w sferze rozspaja ją, Γ_Ω nie może zawierać żadnej krzywej zamkniętej. Zatem Γ_Ω jest spójnym grafem łączącym wszystkie punkty stożkowe orbifoldu O_Ω i kończącym się w tych punktach. Taki graf stanowi jedną komponentę brzegu powierzchni O'_Ω . Ponieważ O_Ω jest orientowalna, O'_Ω również jest orientowalna. Zatem O'_Ω jest dyskiem.

Zauważmy również, że na podstawie kształtu grafu Γ_Ω możemy określić kształt pojedynczej płytki parkietażu Ω . Wierzchołki parkietażu otrzymujemy na kilka sposobów:

Fakt 8.1. *Niech A będzie punktem stożkowym rzędu k , z którego wychodzi n gałęzi grafu szkieletowego Γ_Ω .*

1. *Jeśli $k > 2$ lub $n > 1$, to po rozcięciu orbifoldu O_Ω wzdłuż grafu szkieletowego Γ_Ω , z punktu A powstanie n wierzchołków stopnia $n \cdot k$ na obwodzie płytki parkietażu.*
2. *Jeśli $k = 2$ i $n = 1$, to po rozcięciu orbifoldu O_Ω wzdłuż grafu szkieletowego Γ_Ω , z punktu A nie powstanie wierzchołek parkietażu.*

Dowód. Ponieważ punkty stożkowe są śladami po punktach obrotowych, po rozwinięciu powierzchni orbifoldu w parkietaż, punkty takie zostaną przekształcone w punkty obrotowe.

1. Każda z n gałęzi wychodzących z punktu stożkowego zostanie przekształcona w k krawędzi wychodzących z wierzchołka parkietażu. Otrzymamy zatem wierzchołek stopnia $n \cdot k$. Ponadto, lokalnie punkt łączący n gałęzi grafu szkieletowego dzieli powierzchnię na n części. Każda z tych części jest przekształcana na fragment wnętrza klepki parkietażu ograniczonego krawędziami i wierzchołkiem parkietażu. Dlatego takich wierzchołków jest tyle samo, co takich fragmentów płaszczyzny, czyli n .
2. Gdy z punktu stożkowego rzędu 2 wychodzi jedna gałąź grafu szkieletowego, jest ona przekształcana w dwa fragmenty krawędzi wychodzące z punktu obrotowego będącego śladem po punkcie stożkowym A . Nie powstanie zatem w tym punkcie wierzchołek, ponieważ do jego utworzenia są potrzebne przynajmniej trzy takie fragmenty krawędzi. \square

Fakt 8.2. *Po rozcięciu orbifoldu O_Ω wzdłuż grafu szkieletowego Γ_Ω , z punktu zwyczajnego, w którym łączy się n gałęzi grafu szkieletowego Γ_Ω , powstaje n wierzchołków stopnia n na obwodzie płytki parkietażu.*

Dowód. Ponieważ w bliskim otoczeniu punktu zwyczajnego nie występuje żadna cecha symetrii parkietażu, każdy wierzchołek parkietażu, któremu odpowiada ten punkt na orbifoldzie, jest stopnia n . Ponadto, lokalnie punkt łączący n gałęzi grafu szkieletowego dzieli powierzchnię na n części. Każda z tych części jest przekształcana na fragment wnętrza klepki parkietażu ograniczony krawędziami i wierzchołkiem parkietażu. Dlatego takich wierzchołków jest tyle samo, co takich fragmentów płaszczyzny, czyli n . \square

Zauważmy następujące zależności:

Fakt 8.3. *W punkcie zwyczajnym orbifoldu posiadającego jedynie punkty stożkowe może łączyć się najwyżej tyle gałęzi grafu szkieletowego Γ_Ω , ile punktów stożkowych występuje w tym orbifoldzie.*

Dowód. Weźmy dowolny orbifold zawierający n punktów stożkowych i niezawierający innych punktów specjalnych. Załóżmy nie wprost, że w pewnym punkcie zwyczajnym A orbifolderu spotyka się więcej niż n gałęzi grafu Γ_Ω . Wtedy każda z nich musi kończyć się w pewnym punkcie stożkowym B_i orbifolderu. Ponieważ takich gałęzi jest więcej niż punktów stożkowych, w pewnym punkcie stożkowym muszą łączyć się dwie z nich. Rozważmy krzywą Ξ będącą sumą takich dwóch gałęzi. Poruszając się po takiej krzywej od punktu A , mamy kolejno pierwszą gałąź grafu Γ_Ω , punkt B_i , kolejną gałąź grafu Γ_Ω i ponownie punkt A . Pamiętając, że w przypadku wzorów posiadających jedynie punkty obrotowe, orbifoldem jest sfera, otrzymujemy sprzeczność, ponieważ Ξ jest krzywą zamkniętą rozspajającą orbifold. \square

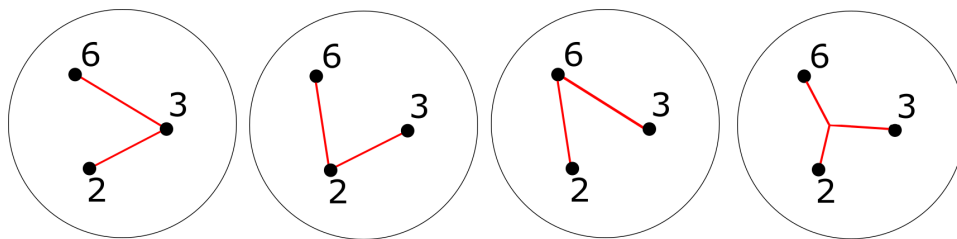
Fakt 8.4. *W punkcie stożkowym orbifolderu posiadającego n punktów stożkowych (i nieposiadającego innych punktów specjalnych) może łączyć się najwyżej $n - 1$ gałęzi grafu szkieletowego Γ_Ω .*

Dowód. Weźmy dowolny orbifold zawierający n punktów stożkowych i niezawierający innych punktów specjalnych. Załóżmy nie wprost, że w pewnym punkcie stożkowym A orbifolderu spotyka się przynajmniej n gałęzi grafu Γ_Ω . Wtedy każda z nich musi kończyć się w pewnym punkcie stożkowym B_i orbifolderu. Jeśli dla pewnej z nich $B_i = A$, to jest ona krzywą zamkniętą, a więc rozspaja orbifold. W przeciwnym razie, ponieważ takich gałęzi jest więcej niż punktów stożkowych, w pewnym punkcie stożkowym muszą łączyć się dwie z nich. Rozważmy krzywą Ξ będącą sumą takich dwóch gałęzi. Poruszając się po takiej krzywej od punktu A , mamy kolejno pierwszą gałąź grafu Γ_Ω , punkt B_i , kolejną gałąź grafu Γ_Ω i ponownie punkt A . Pamiętając, że w przypadku wzorów posiadających jedynie punkty obrotowe, orbifoldem jest sfera, otrzymujemy sprzeczność, ponieważ Ξ jest krzywą zamkniętą rozspajającą orbifold. \square

Rozważmy teraz możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω w przypadku różnych typów symetrii zawierających jedynie punkty obrotowe.

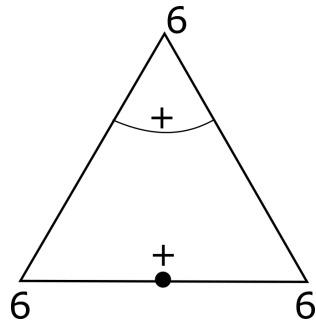
Typ symetrii 632

Graf szkieletowy Γ_Ω jest grafem spójnym (zgodnie z Twierdzeniem 7.5), nierozspajającym orbifolderu. Nie może zatem zawierać żadnej zamkniętej krzywej. Gałęzie grafu mogą łączyć się w jednym z trzech punktów stożkowych albo w punkcie zwyczajnym orbifolderu. Jeśli łączą się w punkcie stożkowym, zgodnie z Faktem 8.4 i Twierdzeniem 7.6, mogą to być jedynie dwie gałęzie kończące się w pozostałych punktach stożkowych. Jeśli łączą się w punkcie zwyczajnym, zgodnie z Faktem 8.3 i Twierdzeniem 7.6, muszą to być trzy gałęzie kończące się w punktach stożkowych. Graf szkieletowy Γ_Ω nie może zawierać krzywej zamkniętej, mamy zatem 4 możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii 632.



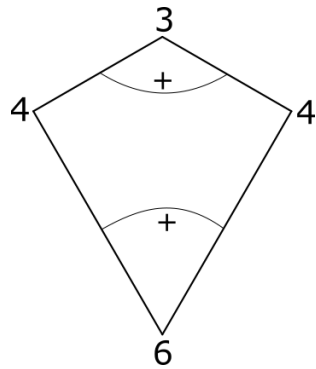
Rysunek 70: Możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii 632

W pierwszym przypadku po rozcięciu orbifolderu wzdłuż grafu szkieletowego, otrzymujemy płytkę posiadającą 1 wierzchołek stopnia 6 powstały z punktu stożkowego rzędu 6 oraz dwa wierzchołki stopnia 6 powstałe z punktu stożkowego rzędu 3. Krawędzie powstałe z gałęzi wychodzącej z punktu stożkowego rzędu 6 są przekształcane przez obrót wokół wierzchołka będącego śladem po tym punkcie. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkt obrotowy rzędu 2 znajduje się na krawędzi łączącej dwa punkty obrotowe rzędu 3. Krawędź ta jest więc przekształcana na siebie przez obrót (będący przekształceniem zachowującym orientację, stąd znak "+"). Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 71.



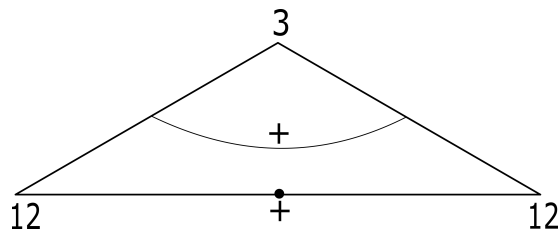
Rysunek 71: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 632

W drugim przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, otrzymujemy płytkę posiadającą 1 wierzchołek stopnia 6 powstały z punktu stożkowego rzędu 6, 1 wierzchołek stopnia 3 powstały z punktu stożkowego rzędu 3 oraz 2 wierzchołki stopnia 4 powstałe z punktu stożkowego rzędu 2. Krawędzie powstałe z gałęzi wychodzących z punktów stożkowych rzędu 6 i rzędu 3 są przekształcane przez obrót wokół wierzchołków będących śladami po tych punktach. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny kleпки przedstawiony na Rysunku 72.



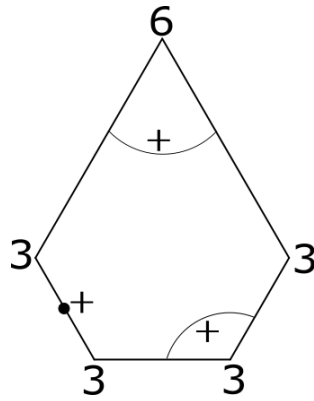
Rysunek 72: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 632

W trzecim przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, mamy płytkę posiadającą 1 wierzchołek stopnia 3 powstały z punktu stożkowego rzędu 3 oraz 2 wierzchołki stopnia 12 powstałe z punktu stożkowego rzędu 6. Krawędzie powstałe z gałęzi wychodzącej z punktu stożkowego rzędu 3 są przekształcane przez obrót wokół wierzchołka będącego śladem po tym punkcie. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkt obrotowy rzędu 2 znajduje się na krawędzi łączącej dwa punkty obrotowe rzędu 6. Krawędź ta jest więc przekształcana na siebie przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny kleпки przedstawiony na Rysunku 73.



Rysunek 73: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 632

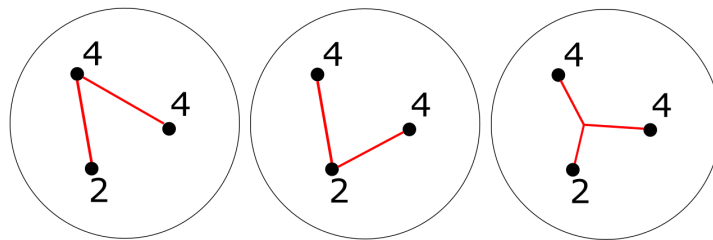
W czwartym przypadku płytkę posiada 3 wierzchołki stopnia 3 powstałe z połączenia trzech gałęzi grafu, 1 wierzchołek stopnia 3 powstały z punktu stożkowego rzędu 3 oraz 1 wierzchołek stopnia 6 powstały z punktu stożkowego rzędu 6. Krawędzie powstałe z gałęzi wychodzących z punktów stożkowych rzędu 6 i rzędu 3 są przekształcane przez obrót wokół wierzchołków będących śladami po tych punktach. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkt obrotowy rzędu 2 znajduje się na krawędzi łączącej dwa wierzchołki powstałe z połączenia gałęzi grafu. Krawędź ta jest więc przekształcana na siebie przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny kleпки przedstawiony na Rysunku 74.



Rysunek 74: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 632

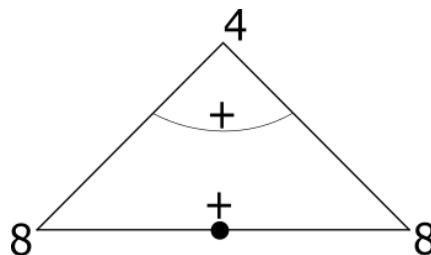
Typ symetrii 442

Tym razem mamy do czynienia z punktami stożkowymi rzędu 2 i rzędu 4. Gałęzie grafu mogą łączyć się w jednym z punktów stożkowych albo w punkcie zwyczajnym orbifoldu. Jeśli łączą się w punkcie stożkowym, zgodnie z Faktem 8.4 i Twierdzeniem 7.6, mogą to być jedynie dwie gałęzie kończące się w pozostałych punktach stożkowych. Jeśli łączą się w punkcie zwyczajnym, zgodnie z Faktem 8.3 i Twierdzeniem 7.6, muszą to być trzy gałęzie kończące się w punktach stożkowych. Graf szkieletowy Γ_Ω nie może zawierać krzywej zamkniętej, mamy zatem 3 możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii 442.



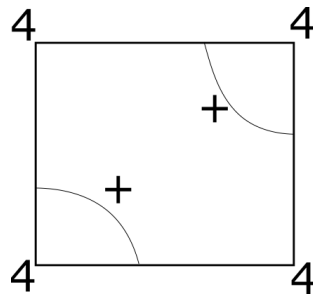
Rysunek 75: Możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii 442

W pierwszym przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, otrzymujemy płytkę posiadającą 1 wierzchołek stopnia 4 powstały z punktu stożkowego rzędu 4, z którego wychodzi jedna gałąź grafu szkieletowego oraz dwa wierzchołki stopnia 8 powstałe z punktu stożkowego rzędu 4, z którego wychodzą dwie gałęzie grafu szkieletowego. Krawędzie powstałe z pojedynczej gałęzi wychodzącej z punktu stożkowego rzędu 4 są przekształcane przez obrót wokół wierzchołka będącego śladem po tym punkcie. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkt obrotowy rzędu 2 znajduje się na krawędzi łączącej dwa punkty obrotowe rzędu 4. Krawędź ta jest więc przekształcana na siebie przez obrót (będący przekształceniem zachowującym orientację, stąd znak "+"). Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny kleпки przedstawiony na Rysunku 76.



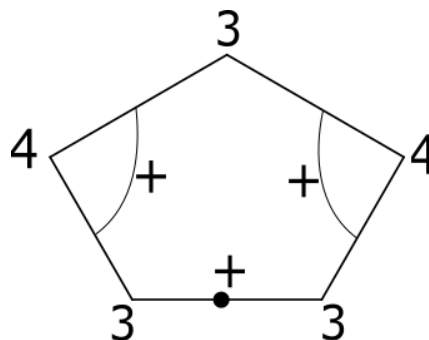
Rysunek 76: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 442

W drugim przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, otrzymujemy płytkę posiadającą 2 wierzchołki stopnia 4 powstałe z punktów stożkowych rzędu 4 oraz 2 wierzchołki stopnia 4 powstałe z punktu stożkowego rzędu 2. Krawędzie powstałe z gałęzi wychodzących z punktów stożkowych rzędu 4 są przekształcane przez obrót wokół wierzchołków będących śladami po tych punktach. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 77.



Rysunek 77: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 442

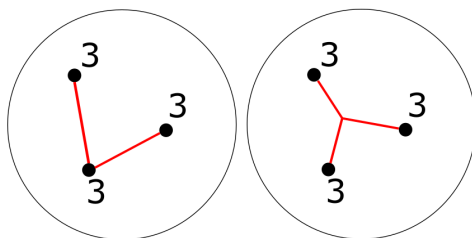
W trzecim przypadku płytka posiada 3 wierzchołki stopnia 3 powstałe z połączenia trzech gałęzi grafu i 2 wierzchołki stopnia 4 powstałe z punktów stożkowych rzędu 4. Krawędzie powstałe z gałęzi wychodzących z punktów stożkowych rzędu 4 są przekształcane przez obrót wokół wierzchołków będących śladami po tych punktach. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkt obrotowy rzędu 2 znajduje się na krawędzi łączącej dwa wierzchołki powstałe z połączenia gałęzi grafu. Krawędź ta jest więc przekształcana na siebie przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 78.



Rysunek 78: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 442

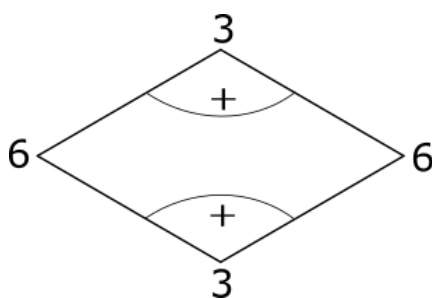
Typ symetrii 333

W tym przypadku wszystkie punkty stożkowe są tego samego rzędu. Gałęzie grafu mogą łączyć się w jednym z punktów stożkowych albo w punkcie zwyczajnym orbifoldu. Jeśli łączą się w punkcie stożkowym, zgodnie z Faktem 8.4 i Twierdzeniem 7.6, mogą to być jedynie dwie gałęzie kończące się w pozostałych punktach stożkowych. Jeśli łączą się w punkcie zwyczajnym, zgodnie z Faktem 8.3 i Twierdzeniem 7.6, muszą to być trzy gałęzie kończące się w punktach stożkowych. Graf szkieletowy Γ_Ω nie może zawierać krzywej zamkniętej, mamy zatem 2 możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii 333.



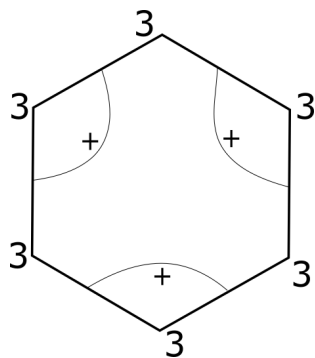
Rysunek 79: Możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii 333

W pierwszym przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, otrzymujemy płytkę posiadającą 2 wierzchołki stopnia 3 powstałe z punktów stożkowych rzędu 3, z których wychodzą pojedyncze gałęzie grafu szkieletowego oraz dwa wierzchołki stopnia 6 powstałe z punktu stożkowego rzędu 3, z którego wychodzą dwie gałęzie grafu szkieletowego. Pojedyncze krawędzie powstałe z gałęzi wychodzących z punktów stożkowych rzędu 3 są przekształcane przez obrót wokół wierzchołków będących śladami po tych punktach. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 80.



Rysunek 80: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 333

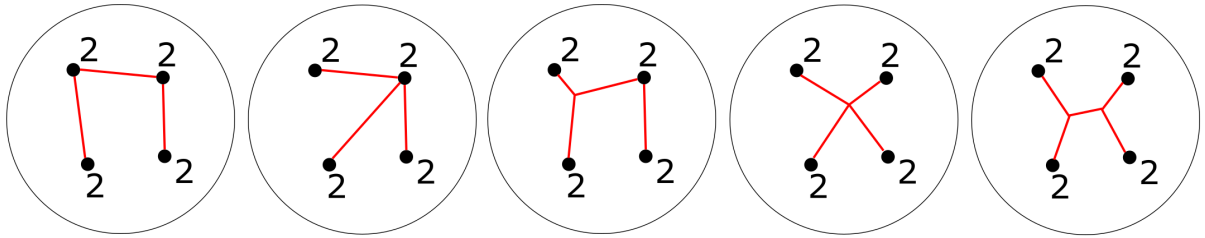
W drugim przypadku płytka posiada 3 wierzchołki stopnia 3 powstałe z połączenia trzech gałęzi grafu i 3 wierzchołki stopnia 3 powstałe z punktów stożkowych rzędu 3. Krawędzie powstałe z gałęzi wychodzących z punktów stożkowych rzędu 3 są przekształcane przez obrót wokół wierzchołków będących śladami po tych punktach. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 81.



Rysunek 81: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 333

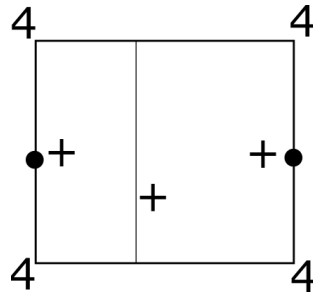
Typ symetrii 2222

W tym przypadku wszystkie punkty stożkowe są tego samego rzędu. Gałęzie grafu mogą łączyć się w jednym z punktów stożkowych albo w punkcie zwyczajnym orbifoldu. Jeśli łączą się w punkcie stożkowym, zgodnie z Faktem 8.4 i Twierdzeniem 7.6, mogą to być dwie lub trzy gałęzie kończące się w pozostałych punktach stożkowych. Jeśli łączą się w punkcie zwyczajnym, zgodnie z Faktem 8.3 i Twierdzeniem 7.6, mogą to być trzy lub cztery gałęzie kończące się w punktach stożkowych. Graf szkieletowy Γ_Ω nie może zawierać krzywej zamkniętej, mamy zatem 5 możliwych położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii 2222.



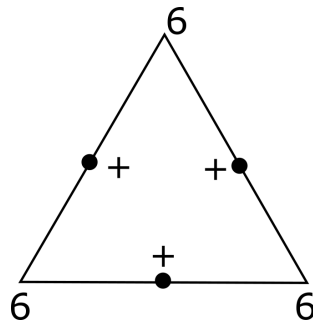
Rysunek 82: Możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii 2222

W pierwszym przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, mamy płytkę posiadającą 4 wierzchołki stopnia 4 powstałe z punktów stożkowych rzędu 2, z których wychodzą po 2 gałęzie grafu szkieletowego. Krawędź α powstała z gałęzi łączącej te punkty jest przekształcana przez obrót wokół punktu A będącego śladem po jednym z pozostałych punktów stożkowych, a następnie przez obrót wokół punktu łączącego krawędź zawierającą A z obrazem krawędzi α . Zatem krawędź α jest przekształcana na przeciwną krawędź przez złożenie dwóch obrotów będące przekształceniem zachowującym orientację. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkty obrotowe rzędu 2 znajdują się na krawędziach łączących dwa punkty obrotowe rzędu 2 będące wcześniej wspomnianymi wierzchołkami. Krawędzie te są więc przekształcane na siebie same przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 83.



Rysunek 83: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 2222

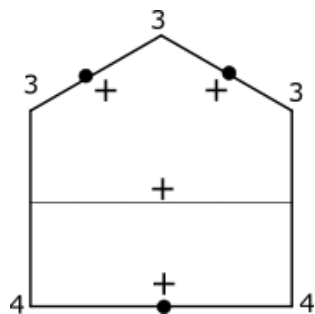
W drugim przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, mamy płytkę posiadającą 3 wierzchołki stopnia 6 powstałe z punktu stożkowego rzędu 2, z którego wychodzą 3 gałęzie grafu szkieletowego. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkty obrotowe rzędu 2 znajdują się na krawędziach klepki, są to ślady po pozostałych punktach stożkowych. Krawędzie te są więc przekształcane na siebie same przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 84.



Rysunek 84: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 2222

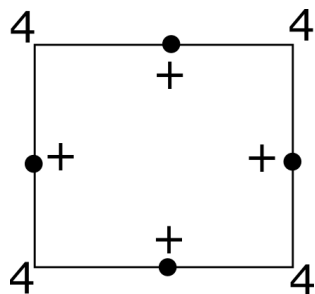
W trzecim przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, mamy płytkę posiadającą 2 wierzchołki stopnia 4 powstałe z punktu stożkowego rzędu 2, z którego wychodzą 2 gałęzie grafu szkieletowego oraz 3 wierzchołki stopnia 3 powstałe z połączenia trzech krawędzi grafu w punkcie zwyczajnym orbifoldu. Krawędź α powstała z gałęzi łączącej wierzchołki stopnia

4 i stopnia 3 jest przekształcana przez obrót wokół punktu A będącego śladem po punkcie stożkowym połączonym krawędzią z wierzchołkiem stopnia 4, a następnie przez obrót wokół punktu łączącego krawędź zawierającą A z obrazem krawędzi α . Zatem krawędź α jest przekształcana na przeciwległą krawędź przez złożenie dwóch obrotów będące przekształceniem zachowującym orientację. Innym wytłumaczeniem tego jest fakt, że krawędź ta musi być przekształcana na krawędź łączącą punkty tego samego typu oraz że jedynymi symetriami tego typu parkietaży są obroty, które zachowują orientację. Krawędź taka nie przechodzi sama na siebie, ponieważ musiałoby to zachodzić za sprawą obrotu względem punktu na niej leżącego, a taki punkt obrotowy nie istnieje. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkty obrotowe rzędu 2 znajdują się na krawędziach łączących wierzchołki tego samego stopnia (jako ślady po punktach stożkowych, z których wychodzi jedna gałąź grafu szkieletowego). Krawędzie te są więc przekształcane na siebie same przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 85.



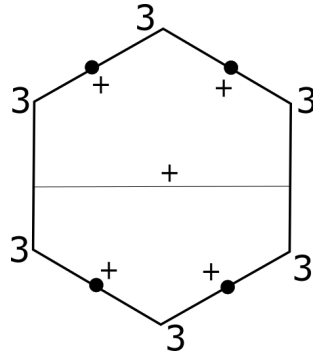
Rysunek 85: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 2222

W czwartym przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, mamy płytkę posiadającą 4 wierzchołki stopnia 4 powstałe z połączenia czterech krawędzi grafu w punkcie zwyczajnym orbifoldu. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkty obrotowe rzędu 2 znajdują się na krawędziach łączących dwa wierzchołki (jako ślady po punktach stożkowych, z których wychodzi jedna gałąź grafu szkieletowego). Krawędzie te są więc przekształcane na siebie same przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 86.



Rysunek 86: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 2222

W piątym przypadku po rozcięciu orbifoldu wzdłuż grafu szkieletowego, mamy płytkę posiadającą 6 wierzchołków stopnia 3 powstałych z połączenia trzech krawędzi grafu w dwóch punktach zwyczajnych orbifoldu. Krawędź α powstała z gałęzi łączącej te punkty jest przekształcana przez obrót wokół punktu A będącego śladem po jednym z pozostałych punktów stożkowych, a następnie przez obrót wokół punktu B będącego śladem po punkcie stożkowym bezpośrednio połączonym z tym samym wierzchołkiem, co punkt A . Zatem krawędź α jest przekształcana na przeciwległą krawędź przez złożenie dwóch obrotów będące przekształceniem zachowującym orientację. Dodatkowo, zgodnie z Faktem 8.1, punkty obrotowe rzędu 2 znajdują się na krawędziach łączących wierzchołki tego samego rodzaju (jako ślady po punktach stożkowych, z których wychodzi jedna gałąź grafu szkieletowego). Krawędzie te są więc przekształcane na siebie same przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 87.



Rysunek 87: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 2222

8.4 Parkietaże posiadające jedynie punkty kalejdoskopowe

Orbifoldami wzorów posiadających jedynie punkty kalejdoskopowe są dyski z wyróżnionymi punktami narożnymi. Zgodnie z Twierdzeniem 7.7, graf szkieletowy Γ_Ω parkietażu musi zawierać cały brzeg orbifoldu. Ponieważ każda krzywa zamknięta zawarta w dysku, jak również każda krzywa właściwie włożona w dysk, rozspaja go, Γ_Ω nie może zawierać tego rodzaju krzywych. Ponieważ w tego typu parkietażach nie występują punkty stożkowe, graf szkieletowy nie może mieć końców wewnątrz dysku. Zatem Γ_Ω w całości pokrywa się z brzegiem orbifoldu O_Ω .

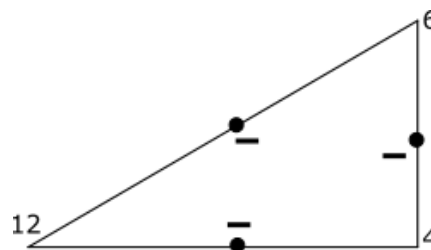
Zauważmy następujący fakt o parkietażach mających tego typu symetrie.

Fakt 8.5. *Punkty narożne rzędu n orbifoldu O_Ω , z których nie wychodzą gałęzie niezawierające się w brzegu, są przekształcane w wierzchołki stopnia $2n$ parkietażu Ω .*

Dowód. Punkty narożne rzędu n orbifoldu są śladami po punktach kalejdoskopowych rzędu n parkietażu. n to liczba osi symetrii przecinających się w tych punktach. Punkt przecięcia (punkt kalejdoskopowy) dzieli każdą z tych prostych na dwie półproste. Otrzymujemy $2n$ półprostych, których punktem wspólnym jest ślad po punkcie narożnym. Półproste te zawierają krawędzie parkietażu (jest ich również $2n$), zaś wierzchołek parkietażu jest śladem po punkcie narożnym (ma więc stopień równy $2n$). \square

Typ symetrii *632

W przypadku wzorów o typie symetrii *632, orbifoldem jest dysk z wyróżnionymi trzema punktami narożnymi o stopniach 6, 3 i 2. Każdy z tych punktów jest przekształcamy na wierzchołek parkietażu. Mamy więc do czynienia, zgodnie z Faktem 8.5, z trzema wierzchołkami płytki mającymi stopnie 12, 6 i 4. Krawędzie płytki są śladami po brzegu orbifoldu. Ponieważ zawierają się w osiach symetrii, są przekształcane na siebie ze zmianą orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 88.

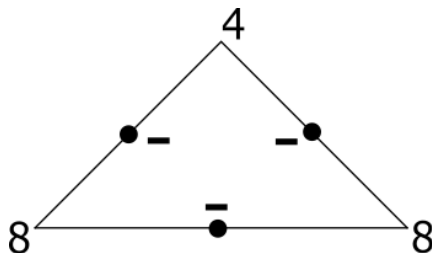


Rysunek 88: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii *632

Typ symetrii *442

W przypadku wzorów o typie symetrii *442, orbifoldem jest dysk z wyróżnionymi trzema punktami narożnymi o stopniach 4, 4 i 2. Każdy z tych punktów jest przekształcamy na wierzchołek parkietażu. Mamy więc do czynienia, zgodnie z Faktem 8.5, z trzema wierzchołkami płytki mającymi stopnie 8, 8 i 4. Krawędzie płytki są śladami po brzegu orbifoldu. Ponieważ

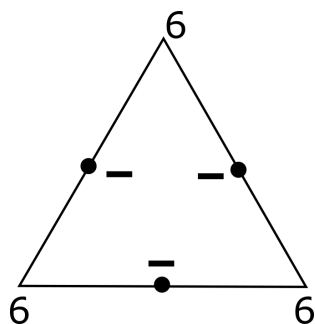
zawierają się w osiach symetrii, są przekształcane na siebie ze zmianą orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 89.



Rysunek 89: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $*884$

Typ symetrii $*333$

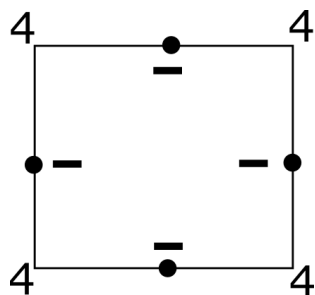
W przypadku wzorów o typie symetrii $*333$, orbifoldem jest dysk z wyróżnionymi trzema punktami narożnymi stopnia 3. Każdy z tych punktów jest przekształcamy na wierzchołek parkietażu. Mamy więc do czynienia, zgodnie z Faktem 8.5, z trzema wierzchołkami płytki mającymi stopień 6. Krawędzie płytki są śladami po brzegu orbifoldu. Ponieważ zawierają się w osiach symetrii, są przekształcane na siebie ze zmianą orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 90.



Rysunek 90: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $*333$

Typ symetrii $*2222$

W przypadku wzorów o typie symetrii $*2222$, orbifoldem jest dysk z wyróżnionymi czterema punktami narożnymi stopnia 2. Każdy z tych punktów jest przekształcamy na wierzchołek parkietażu. Mamy więc do czynienia, zgodnie z Faktem 8.5, z czterema wierzchołkami płytki mającymi stopień 4. Krawędzie płytki są śladami po brzegu orbifoldu. Ponieważ zawierają się w osiach symetrii, są przekształcane na siebie ze zmianą orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 91.



Rysunek 91: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $*2222$

8.5 Parkietaże posiadające punkty obrotowe i kalejdoskopowe

W przypadku wzorów posiadających punkty obrotowe i kalejdoskopowe, orbifoldem jest dysk z wyróżnionym punktem stożkowym wewnątrz i wyróżnionymi punktami narożnymi na brzegu. Zgodnie z Twierdzeniem 7.7, cały brzeg orbifoldu musi być zawarty w grafie szkieletowym Γ_Ω , zaś zgodnie z Twierdzeniem 7.6, punkt stożkowy orbifoldu również musi zawierać się w Γ_Ω . Przypomnijmy również, że zgodnie z Twierdzeniem 7.5, graf szkieletowy musi być spójny, musi zatem istnieć gałąź łącząca punkt stożkowy z brzegiem orbifoldu. Mamy następujące fakty dotyczące grafu szkieletowego Γ_Ω :

Fakt 8.6. *W orbifoldzie będącym dyskiem i zawierającym k punktów stożkowych, z każdego punktu stożkowego może wychodzić najwyżej k gałęzi grafu szkieletowego Γ_Ω .*

Dowód. Weźmy dowolny orbifold będący dyskiem i zawierający k punktów stożkowych. Załóżmy nie wprost, że w pewnym punkcie stożkowym A orbifoldu spotyka się przynajmniej $k + 1$ gałęzi grafu Γ_Ω . Wtedy każda z nich musi kończyć się w pewnym punkcie stożkowym B_i orbifoldu albo na brzegu orbifoldu. Jeśli dla pewnej z nich $B_i = A$, to jest ona krzywą zamkniętą, a więc rozspaja orbifold. Rozważmy przypadek, gdy pewne dwie różne gałęzie Γ_i oraz Γ_j kończą się w punktach C i D na brzegu orbifoldu. Poruszając się po tych krzywych i po brzegu orbifoldu, mamy kolejno punkt A , krzywą Γ_i , punkt C , fragment brzegu orbifoldu zawarty między punktami C i D , krzywą Γ_j oraz ponownie punkt A . Taka krzywa jest więc krzywą zamkniętą zawartą w dysku, a więc rozspaja ona dysk. W przypadku, gdy tylko jedna gałąź grafu Γ_Ω łączy punkt A z brzegiem orbifoldu, mamy k gałęzi wychodzących z punktu A do pewnych innych punktów stożkowych, których jest $k - 1$. Ponieważ takich gałęzi jest więcej niż punktów stożkowych, w pewnym punkcie stożkowym muszą łączyć się dwie z nich. Rozważmy krzywą Ξ będącą sumą takich dwóch gałęzi. Poruszając się po takiej krzywej od punktu A , mamy kolejno pierwszą gałąź grafu Γ_Ω , punkt B_i , kolejną gałąź grafu Γ_Ω i ponownie punkt A . Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ Ξ jest krzywą zamkniętą rozspajającą orbifold. \square

Fakt 8.7. *Punkt narożny rzędu n , z którego wychodzi krawędź grafu szkieletowego Γ_Ω mająca koniec w punkcie stożkowym, jest przekształcony w 2 wierzchołki parkietażu stopnia $4n$.*

Dowód. Punkt narożny jest elementem brzegu orbifoldu, więc gałąź wychodząca z punktu narożnego dzieli lokalnie orbifold na dwie części. Każda z tych części jest przekształcana na fragment wnętrza klepki parkietażu ograniczony krawędziami i wierzchołkiem parkietażu. Dlatego otrzymujemy dwa wierzchołki parkietażu powstające z jednego punktu narożnego.

Przekształcając graf szkieletowy Γ_Ω w szkielet Σ_Ω , mamy do czynienia z dwoma rodzajami krawędzi. Pierwsze z nich są śladami po brzegu orbifoldu. Prowadząc rozumowanie identyczne, jak w dowodzie Faktu 8.5, wnioskujemy, że w każdym wierzchołku parkietażu spotyka się $2n$ takiego typu krawędzi.

Drugi rodzaj to krawędzie powstające z gałęzi łączącej punkt stożkowy z punktem narożnym orbifoldu. Punktu narożny rzędu n jest przekształcony w punkt kalejdoskopowy rzędu n , zaś fragment grafu szkieletowego zawarty w brzegu orbifoldu jest przekształcony w osie symetrii przecinające się w tym punkcie. Ponieważ osi tych jest n , dzielą one płaszczyznę na $2n$ części. W każdym takim fragmencie płaszczyzny z rozważanego wierzchołka wychodzi krawędź parkietażu będąca śladem po gałęzi łączącej punkt narożny z punktem stożkowym orbifoldu. Takich krawędzi jest więc $2n$.

Mamy więc w sumie $2n + 2n = 4n$ krawędzi parkietażu wychodzących z punktu kalejdoskopowego będącego śladem po punkcie narożnym orbifoldu. \square

Fakt 8.8. *Punkt brzegowy orbifoldu niebędący punktem narożnym, z którego wychodzi k krawędzi grafu szkieletowego Γ_Ω niezawierających się w brzegu orbifoldu, jest przekształcony w $k + 1$ wierzchołków parkietażu stopnia $2k + 2$.*

Dowód. k gałęzi wychodzących z punktu leżącego na brzegu orbifoldu dzieli lokalnie orbifold na $k + 1$ części. Każda z tych części jest przekształcana na fragment wnętrza klepki parkietażu ograniczony krawędziami i wierzchołkiem parkietażu. Dlatego otrzymujemy $k + 1$ wierzchołków parkietażu powstających z jednego punktu brzegowego.

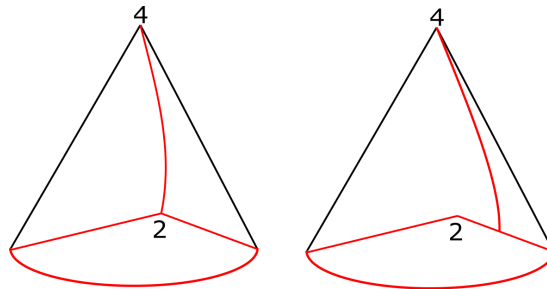
Również tym razem mamy do czynienia z dwoma rodzajami krawędzi wychodzących z punktu brzegowego, z którego wychodzą gałęzie grafu szkieletowego niezawierające się w brzegu orbifoldu. Pierwsze z nich to ślady po brzegu orbifoldu. Punkt taki dzieli brzeg orbifoldu na dwie części, otrzymujemy więc dwie półproste zawierające krawędzie parkietażu. Stąd mamy dwie krawędzie będące śladami po brzegu parkietażu.

Drugi rodzaj krawędzi powstaje z gałęzi grafu niezawierających się w brzegu orbifoldu. Gdy mamy do czynienia z k takimi gałęziami grafu szkieletowego Γ_Ω , są one przekształcane na krawędzie należące do szkieletu Σ_Ω . Powstaje k krawędzi znajdujących się po jednej stronie prostej będącej śladem po brzegu orbifoldu oraz k krawędzi będących ich obrazami przez odbicie względem tej prostej (będącej osią symetrii parkietażu).

Mamy zatem $2 + 2k$ krawędzi parkietażu wychodzących z wierzchołka będącego śladem po punkcie brzegowym (nienaróznym) parkietażu. \square

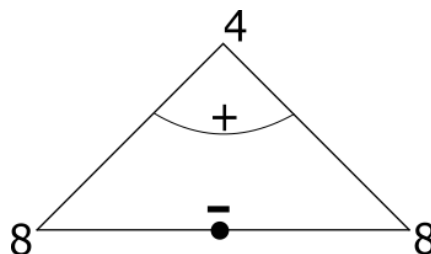
Typ symetrii $4 * 2$

W przypadku typu symetrii $4 * 2$ mamy do czynienia z punktem stożkowym rzędu 4 i punktem narożnym rzędu 2. Graf szkieletowy Γ_Ω musi zawierać zarówno brzeg orbifoldu i punkt stożkowy. Zgodnie z Faktem 8.6, z punktu stożkowego może wychodzić tylko jedna gałąź grafu Γ_Ω . Ponieważ nie może to być krzywa zamknięta, musi ona kończyć się na brzegu orbifoldu. Mamy dwa możliwe przypadki: może ona kończyć się w punkcie narożnym lub w punkcie brzegowym niebędącym punktem narożnym.



Rysunek 92: Możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii $4 * 2$

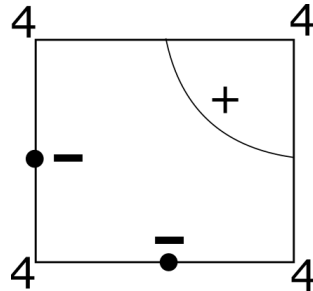
W pierwszym przypadku gałąź wychodząca z punktu stożkowego kończy się w punkcie narożnym orbifoldu. Zgodnie z Faktem 8.7, punkt narożny rzędu 2 jest przekształcany w 2 wierzchołki stopnia 8. Zgodnie z Faktem 8.1, punkt stożkowy rzędu 4, z którego wychodzi jedna gałąź orbifoldu, jest przekształcany w wierzchołek stopnia 4. Krawędzie wychodzące z wierzchołka stopnia 4 są przekształcane wzajemnie przez obrót, ponieważ wierzchołek będący ich punktem wspólnym, jest punktem obrotowym rzędu 4. Krawędź łącząca wierzchołki stopnia 8 jest przekształcana na siebie przez symetrię osiową, ponieważ jest fragmentem osi symetrii parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny kleпки przedstawiony na Rysunku 93.



Rysunek 93: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $4 * 2$

W drugim przypadku gałąź wychodząca z punktu stożkowego kończy się w punkcie brzegowym orbifoldu, niebędącym punktem narożnym. Zgodnie z Faktem 8.1, punkt stożkowy rzędu 4, z którego wychodzi jedna gałąź orbifoldu, jest przekształcany w wierzchołek stopnia 4. Zgodnie z Faktem 8.5, punkt narożny rzędu 2 jest przekształcany w wierzchołek stopnia 4. Zgodnie z Faktem 8.8, punkt brzegowy, z którego wychodzi gałąź kończąca się w punkcie stożkowym

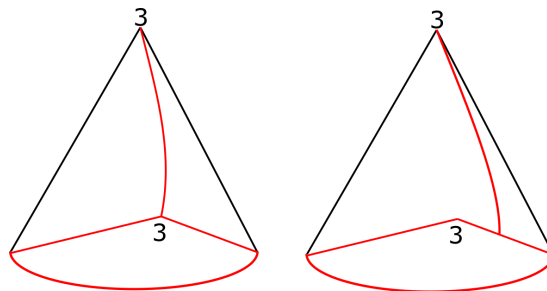
orbifoldu, jest przekształcany w dwa wierzchołki stopnia 4. Krawędzie łączące wierzchołki powstałe z punktów leżących na brzegu orbifoldu są przekształcane na siebie same przez symetrię osiową, ponieważ są one fragmentami osi symetrii parkietażu. Krawędzie wychodzące z wierzchołka będącego śladem po punkcie stożkowym są wzajemnie przekształcane przez obrót, ponieważ wierzchołek ten jest punktem obrotowym parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny kleпки przedstawiony na Rysunku 94.



Rysunek 94: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $4 * 2$

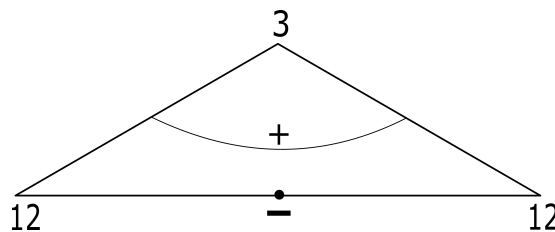
Typ symetrii $3 * 3$

W przypadku typu symetrii $3 * 3$ mamy do czynienia z punktem stożkowym rzędu 3 i punktem narożnym rzędu 3. Graf szkieletowy Γ_Ω musi zawierać zarówno brzeg orbifoldu i punkt stożkowy. Zgodnie z Faktem 8.6, z punktu stożkowego może wychodzić tylko jedna gałąź grafu Γ_Ω . Ponieważ nie może to być krzywa zamknięta, musi ona kończyć się na brzegu orbifoldu. Mamy dwa możliwe przypadki: może ona kończyć się w punkcie narożnym lub w punkcie brzegowym niebędącym punktem narożnym.



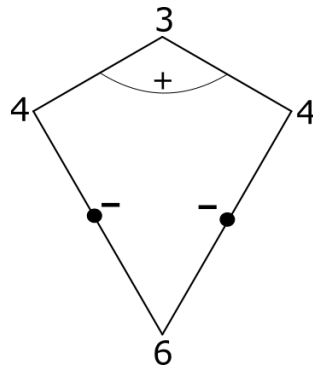
Rysunek 95: Możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii $3 * 3$

W pierwszym przypadku gałąź wychodząca z punktu stożkowego kończy się w punkcie narożnym orbifoldu. Zgodnie z Faktem 8.7, punkt narożny rzędu 3 jest przekształcany w 2 wierzchołki stopnia 12. Zgodnie z Faktem 8.1, punkt stożkowy rzędu 3, z którego wychodzi jedna gałąź orbifoldu, jest przekształcany w wierzchołek stopnia 3. Krawędzie wychodzące z wierzchołka stopnia 3 są przekształcane wzajemnie przez obrót, ponieważ wierzchołek będący ich punktem wspólnym, jest punktem obrotowym rzędu 3. Krawędź łącząca wierzchołki stopnia 12 jest przekształcana na siebie przez symetrię osiową, ponieważ jest fragmentem osi symetrii parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny kleпки przedstawiony na Rysunku 96.



Rysunek 96: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $3 * 3$

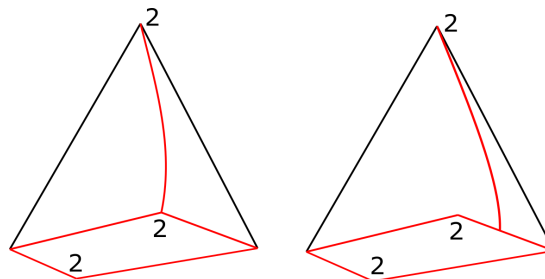
W drugim przypadku gałąź wychodząca z punktu stożkowego kończy się w punkcie brzegowym orbifoldu, niebędącym punktem narożnym. Zgodnie z Faktem 8.1, punkt stożkowy rzędu 3, z którego wychodzi jedna gałąź orbifoldu, jest przekształcany w wierzchołek stopnia 3. Zgodnie z Faktem 8.5, punkt narożny rzędu 3 jest przekształcany w wierzchołek stopnia 6. Zgodnie z Faktem 8.8, punkt brzegowy, z którego wychodzi gałąź kończąca się w punkcie stożkowym orbifoldu, jest przekształcany w dwa wierzchołki stopnia 4. Krawędzie łączące wierzchołki powstałe z punktów leżących na brzegu orbifoldu są przekształcane na siebie same przez symetrię osiową, ponieważ są one fragmentami osi symetrii parkietażu. Krawędzie wychodzące z wierzchołka będącego śladem po punkcie stożkowym są wzajemnie przekształcane przez obrót, ponieważ wierzchołek ten jest punktem obrotowym parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 97.



Rysunek 97: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $4 * 2$

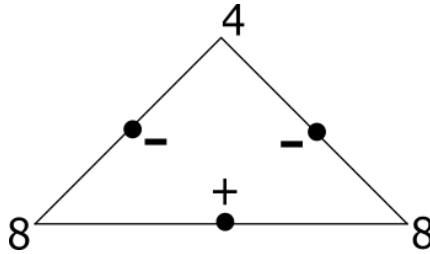
Typ symetrii $2 * 22$

W przypadku typu symetrii $2 * 22$ mamy do czynienia z punktem stożkowym rzędu 2 i dwoma punktami narożnymi rzędu 2. Graf szkieletowy Γ_Ω musi zawierać zarówno brzeg orbifoldu i punkt stożkowy. Zgodnie z Faktem 8.6, z punktu stożkowego może wychodzić tylko jedna gałąź grafu Γ_Ω . Ponieważ nie może to być krzywa zamknięta, musi ona kończyć się na brzegu orbifoldu. Mamy dwa możliwe przypadki: może ona kończyć się w punkcie narożnym lub w punkcie brzegowym niebędącym punktem narożnym.



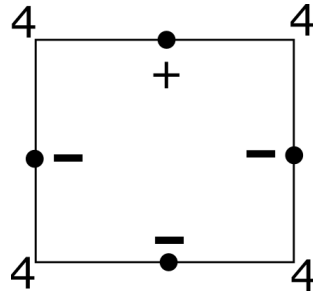
Rysunek 98: Możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii $2 * 22$

W pierwszym przypadku gałąź wychodząca z punktu stożkowego kończy się w punkcie narożnym orbifoldu. Zgodnie z Faktem 8.7, punkt narożny rzędu 2, z którego wychodzi gałąź grafu szkieletowego łącząca go z punktem stożkowym, jest przekształcany w 2 wierzchołki stopnia 8. Zgodnie z Faktem 8.5, drugi punkt narożny rzędu 2 jest przekształcany w wierzchołek stopnia 4. Zgodnie z Faktem 8.1, punkt stożkowy rzędu 2, z którego wychodzi jedna gałąź orbifoldu, jest przekształcany w punkt obrotowy rzędu 2 znajdujący się na krawędzi parkietażu. Zatem krawędź, na której się on znajduje, jest przekształcana sama na siebie przez obrót. Krawędzie łączące wierzchołki powstałe z punktów leżących na brzegu orbifoldu są przekształcane na siebie same przez symetrię osiową, ponieważ są one fragmentami osi symetrii parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 99.



Rysunek 99: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $2 * 22$

W drugim przypadku gałąź wychodząca z punktu stożkowego kończy się w punkcie brzegowym orbifoldu, niebędącym punktem narożnym. Zgodnie z Faktem 8.1, punkt stożkowy rzędu 2, z którego wychodzi jedna gałąź orbifoldu, jest przekształcany w punkt obrotowy rzędu 2 znajdujący się na krawędzi parkietażu. Zatem krawędź, na której się on znajduje, jest przekształcana sama na siebie przez obrót. Zgodnie z Faktem 8.5, punkty narożne rzędu 2 są przekształcane w wierzchołki stopnia 4. Zgodnie z Faktem 8.8, punkt brzegowy, z którego wychodzi gałąź kończąca się w punkcie stożkowym orbifoldu, jest przekształcany w dwa wierzchołki stopnia 4. Krawędzie łączące wierzchołki powstałe z punktów leżących na brzegu orbifoldu i będące śladami po brzegu orbifoldu, są przekształcane na siebie same przez symetrię osiową, ponieważ są one fragmentami osi symetrii parkietażu. Krawędzie wychodzące z wierzchołka będącego śladem po punkcie stożkowym są wzajemnie przekształcane przez obrót, ponieważ wierzchołek ten jest punktem obrotowym parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 100.

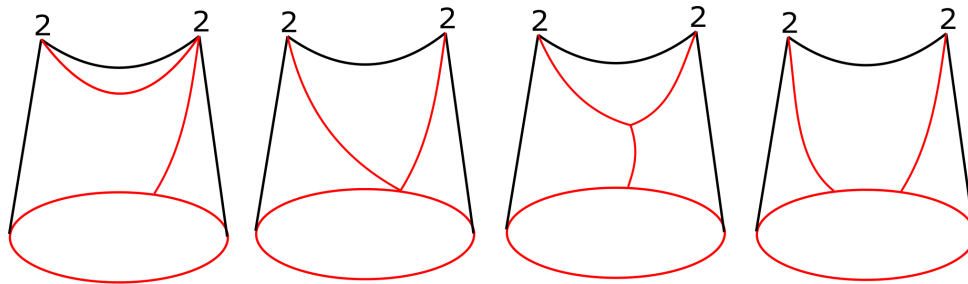


Rysunek 100: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $2 * 22$

8.6 Parkietaże posiadające punkty obrotowe i jeden rodzaj pojedynczych luster

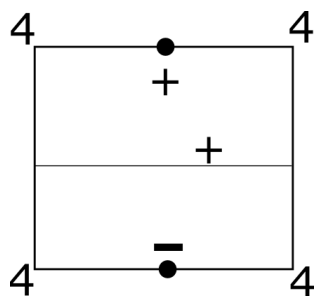
W tym podrozdziale będziemy mieli do czynienia z jednym typem symetrii — $22*$. Orbifoldem wzoru o tym typie symetrii jest dysk z wyróżnionymi dwoma rodzajami punktów stożkowych rzędu 2. Zgodnie z Twierdzeniem 7.7, cały brzeg orbifoldu musi być zawarty w grafie szkieletowym Γ_Ω , zaś zgodnie z Twierdzeniem 7.6, punkty stożkowe orbifoldu również muszą zawierać się w Γ_Ω . Przypomnijmy również, że zgodnie z Twierdzeniem 7.5, graf szkieletowy musi być spójny, muszą zatem istnieć gałęzie łączące punkty stożkowe z brzegiem orbifoldu.

Jeśli połączymy jeden z punktów stożkowych z brzegiem orbifoldu (takie połączenie musi istnieć ze względu na spójność Γ_Ω) gałęzią Γ_1 , należy połączyć drugi punkt stożkowy z istniejącym już fragmentem grafu szkieletowego gałęzią Γ_2 . Mamy cztery możliwości wyboru takiej gałęzi. Może ona kończyć się w drugim punkcie stożkowym, w punkcie wspólnym brzegu orbifoldu i krzywej Γ_1 , w innym punkcie Γ_1 albo w innym punkcie brzegu orbifoldu. W każdym wypadku, po rozcięciu orbifoldu wzdłuż takiego grafu, otrzymujemy dysk, w którym z każdego punktu stożkowego wychodzi gałąź grafu szkieletowego. Nie możemy już dołączyć żadnej gałęzi, ponieważ gdyby taka gałąź istniała, to musiałaby mieć początek i koniec w pewnym punkcie istniejącego już grafu (oznaczymy te punkty przez A i B). Wtedy, rozważając krzywą zaczynającą się w A , przechodzącą przez fragment wcześniej istniejącego grafu szkieletowego do punktu B , pokrywającą się z nową gałęzią i kończącą w punkcie A , otrzymujemy krzywą zamkniętą, która rozspaja dysk. Wszystkie możliwe położenia grafu szkieletowego przedstawia Rysunek 101.



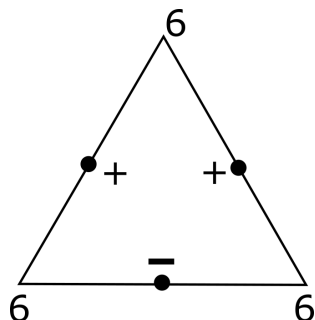
Rysunek 101: Możliwe położenia grafu szkieletowego Γ_Ω na orbifoldzie wzoru o typie symetrii 22^*

W pierwszym przypadku jedna z gałęzi wychodzi z punktu stożkowego rzędu 2 i kończy się na brzegu orbifoldu (oznaczymy ją przez Γ_1), a druga zaczyna się i kończy w dwóch różnych punktach stożkowych orbifoldu (oznaczymy ją przez Γ_2). Zgodnie z Faktem 8.8, punkt wspólny brzegu orbifoldu i krzywej Γ_1 jest przekształcany w 2 wierzchołki stopnia 4. Zgodnie z Faktem 8.1, punkt stożkowy rzędu 2, w którym łączą się krzywe Γ_1 i Γ_2 , jest przekształcany w 2 wierzchołki parkietażu stopnia 4, zaś punkt stożkowy rzędu 2, z którego wychodzi krzywa Γ_1 , jest przekształcany w punkt obrotowy znajdujący się na krawędzi klepki. Krawędź taka łączy dwa wierzchołki powstałe z punktu stożkowego i jest przekształcana na siebie przez obrót. Krawędź powstała z brzegu orbifoldu jest przekształcana na siebie przez symetrię osiową, jako że zawiera się ona w osi symetrii parkietażu. Pozostałe krawędzie przechodzą na siebie nawzajem przez złożenie obrotów względem punktów będących śladami po punktach stożkowych, czyli przez przekształcenia zachowujące orientację. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 102.



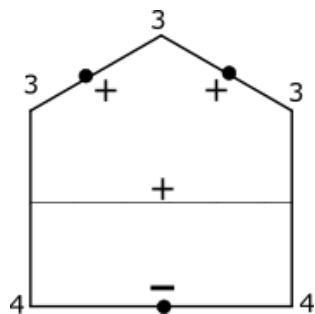
Rysunek 102: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 22^*

W drugim przypadku z każdego punktu stożkowego rzędu 2 wychodzi jedna z gałęzi kończących się we wspólnym punkcie na brzegu orbifoldu (oznaczymy te gałęzie przez Γ_1 i Γ_2). Zgodnie z Faktem 8.8, punkt wspólny brzegu orbifoldu i krzywych Γ_1 i Γ_2 jest przekształcany w 3 wierzchołki stopnia 6. Zgodnie z Faktem 8.1, punkty stożkowe rzędu 2 są przekształcane w punkty obrotowe znajdujące się na krawędzi klepki. Krawędź taka jest przekształcana na siebie przez obrót. Krawędź powstała z brzegu orbifoldu jest przekształcana na siebie przez symetrię osiową, jako że zawiera się ona w osi symetrii parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 103.



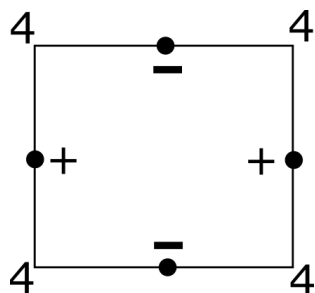
Rysunek 103: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 22^*

W trzecim przypadku z każdego punktu stożkowego rzędu 2 wychodzi jedna z gałęzi grafu szkieletowego Γ_Ω (oznaczymy je przez Γ_1 i Γ_2). Z punktu na brzegu orbifoldu wychodzi gałąź grafu (oznaczymy ją przez Γ_3). Wszystkie gałęzie Γ_1 , Γ_2 i Γ_3 spotykają się w pewnym punkcie zwyczajnym orbifoldu. Zgodnie z Faktem 8.8, punkt wspólny brzegu orbifoldu i krzywej Γ_3 jest przekształcany w 2 wierzchołki stopnia 4. Zgodnie z Faktem 8.2, punkt wspólny krzywych Γ_1 , Γ_2 i Γ_3 jest przekształcany w 3 wierzchołki stopnia 3. Zgodnie z Faktem 8.1, punkty stożkowe rzędu 2 są przekształcane w punkty obrotowe znajdujące się na krawędzi klepki. Krawędź taka jest przekształcana na siebie samą przez obrót. Krawędź powstała z brzegu orbifoldu jest przekształcana na siebie przez symetrię osiową, jako że zawiera się ona w osi symetrii parkietażu. Pozostałe krawędzie przechodzą na siebie nawzajem przez złożenie obrotów względem punktów będących śladami po punktach stożkowych, czyli przez przekształcenia zachowujące orientację. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 104.



Rysunek 104: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 22^*

W czwartym przypadku z każdego punktu stożkowego rzędu 2 wychodzi jedna z gałęzi kończących się w różnych punktach na brzegu orbifoldu (oznaczymy te gałęzie przez Γ_1 i Γ_2). Zgodnie z Faktem 8.8, każdy z punktów wspólnych brzegu orbifoldu i krzywych Γ_1 i Γ_2 jest przekształcany w 2 wierzchołki stopnia 4. Zgodnie z Faktem 8.1, punkty stożkowe rzędu 2 są przekształcane w punkty obrotowe znajdujące się na krawędziach klepki. Krawędzie takie są przekształcane na siebie same przez obrót. Krawędzie powstałe z brzegu orbifoldu są przekształcane na siebie same przez symetrię osiową, jako że zawierają się one w osiach symetrii parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 105.



Rysunek 105: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii 22^*

8.7 Parkietaże posiadające specjalne symetrie z poślizgiem

Jak już wcześniej zauważyliśmy, występowanie specjalnych symetrii z poślizgiem jako symetrii parkietażu, wpływa na nieorientowalność powierzchni będącej jego orbifoldem. W tym podrozdziale zajmiemy się trzema typami symetrii: $*\times$, $\times\times$ oraz $22\times$.

8.7.1 Typ symetrii $*\times$

W przypadku parkietaży o tym typie symetrii, mamy do czynienia z pojedynczymi lustrami i równoległymi do nich osiami specjalnych symetrii z poślizgiem. Orbifoldem O_Ω jest wstęga Möbiusa, której brzeg jest śladem po pojedynczych lustrach parkietażu. Zgodnie z Twierdzeniem 7.7, cały brzeg orbifoldu jest zawarty w grafie szkieletowym Γ_Ω . Ponieważ wstęga Möbiusa nie

jest homeomorficzna z dyskiem, graf szkieletowy musi zawierać pewną krzywą Γ_1 , która (zgodnie z Twierdzeniem 7.5) ma punkt wspólny z brzegiem orbifoldu. Oznaczmy ten punkt przez A . Ponieważ na powierzchni orbifoldu nie ma żadnych punktów stożkowych, zaczynając od punktu A i poruszając się po grafie Γ_Ω , musimy w pewnym momencie znaleźć się w punkcie B , który już wcześniej odwiedziliśmy. Mamy 3 możliwości wybrania takiego punktu:

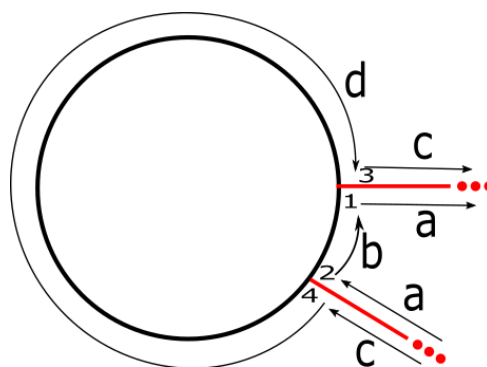
1. Γ_1 ma początek na brzegu O_Ω i koniec na brzegu O_Ω w punkcie różnym od A ,
2. Γ_1 ma początek na brzegu O_Ω i koniec w punkcie wspólnym brzegu O_Ω i Γ_1 (w punkcie A),
3. Γ_1 ma początek na brzegu O_Ω i koniec na krzywej Γ_1 (poza brzegiem orbifoldu).

W każdym z tych przypadków, ze względu na nieorientowalność wstęgi Möbiusa, będziemy musieli rozważyć krzywe dwustronne i jednostronne.

Pomocny nam będzie schemat pokazujący brzeg wstęgi Möbiusa z dołączoną krzywą Γ_1 . Będzie na nim również dobrze widoczny typ kombinatoryczny płytek, wytłumaczymy zatem, jak tworzyć taki schemat. Najpierw rysujemy krzywą będącą brzegiem wstęgi Möbiusa wraz z jej bliskim otoczeniem zawartym w orbifoldzie. Możemy je przedstawić jako okrąg z wąskim pasem znajdującym się po jednej jego stronie (na Rysunku 106 jest to krzywa zamknięta). Następnie dołączamy odpowiednio końce krzywej (w tym przypadku Γ_1). Punkty przecięcia (być może krzywej samej ze sobą) utworzą wierzchołki parkietażu, zaś fragmenty krzywych między nimi — krawędzie. Poruszając się po tak narysowanych krzywych, zaznaczamy strzałkami (zgodnie z kierunkiem obchodzenia) i literami kolejne krawędzie oraz liczbami kolejne wierzchołki; pomoże to w ustaleniu reguł przylegania. Uwzględniając to, czy poszczególne krzywe zamknięte były jednostronne, czy dwustronne, obchodzimy schemat do momentu, w którym napotkamy wierzchołek, w którym już byliśmy. Jeśli przez pewne krawędzie nie przechodziliśmy z któreś strony, należy, zaczynając w punkcie należącym do któreś z nich, rozpocząć poruszanie się po schemacie. Jeśli przeszliśmy każdą krawędź z każdej ze stron (zawartych w rozważanej powierzchni), otrzymana powierzchnia ma tyle komponent brzegu, ile razy zaczynaliśmy obchodzenie schematu w pewnym nowym punkcie. Reguły przylegania krawędzi ustalamy na podstawie tego, które litery opisują ten sam fragment krzywej i czy strzałki są skierowane zgodnie (wtedy mamy do czynienia ze zmianą orientacji), czy przeciwnie (wtedy orientacja jest zachowywana). Działanie takiego schematu zobaczymy na przykładzie wstęgi Möbiusa, gdzie krzywą Γ_1 oznaczymy kolorem czerwonym, a brzeg wstęgi Möbiusa kolorem czarnym.

Przypadek 1. W przypadku 1. krzywa Γ_1 ma początek i koniec na brzegu orbifoldu, ale w różnych punktach A i B . Ze względu na nieorientowalność wstęgi Möbiusa, możemy rozważyć przypadki, gdy krzywa taka, wraz z zawartym między jej końcami fragmentem brzegu, jest krzywą dwustronną lub jednostronną.

Krzywa dwustronna



Rysunek 106: Graf szkieletowy Γ_Ω na wstędze Möbiusa

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, a następnie przez b i znajdujemy się znów w wierzchołku 1. Ponieważ nie przeszliśmy jeszcze przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron, musimy rozpocząć obchodzenie schematu od jeszcze nieodwiedzonego wierzchołka 3. Przechodząc kolejne fragmenty krzywych, znajdujemy się ponownie w wierzchołku 3, tym razem każda ze stron krzywych została odwiedzona. Mamy więc powierzchnię z dwiema komponentami brzegu. Powierzchnia ta nie jest dyskiem. Sprawdźmy, czy jest to powierzchnia spójna.

Wstęga Möbiusa jest powierzchnią nieorientowalną, mającą 1 komponentę brzegu i charakterystykę Eulera $\chi(O_\Omega) = 0$. Rozcinając ją wzdłuż krzywej właściwie włożonej nierozspajającej, opisanej w tym przypadku, otrzymujemy powierzchnię O'_Ω z dwiema komponentami brzegu. Zgodnie z Twierdzeniem 4.7, otrzymujemy powierzchnię z charakterystyką Eulera $\chi(O'_\Omega) = 1$.

Zgodnie z twierdzeniami klasyfikującymi:

- Jeśli O'_Ω jest powierzchnią orientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - 2g - 2 &= 1 \\ 2g &= -1 \\ g &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zatem nie istnieje taka powierzchnia O'_Ω .

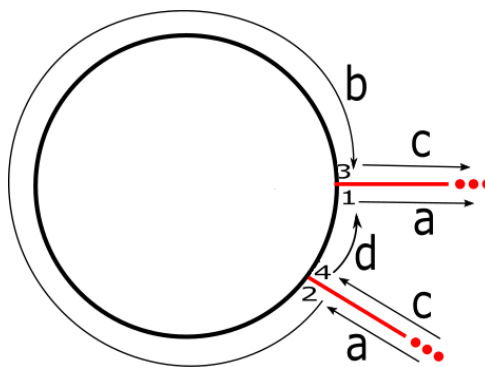
- Jeśli O'_Ω jest powierzchnią nieorientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - n - 2 &= 1 \\ n &= -1 \end{aligned}$$

Zatem nie istnieje taka powierzchnia spójna O'_Ω .

Możemy więc wykluczyć przypadek krzywej dwustronnej mającej początek i koniec na brzegu orbifoldu, ale w różnych punktach A i B .

Krzywa jednostronna

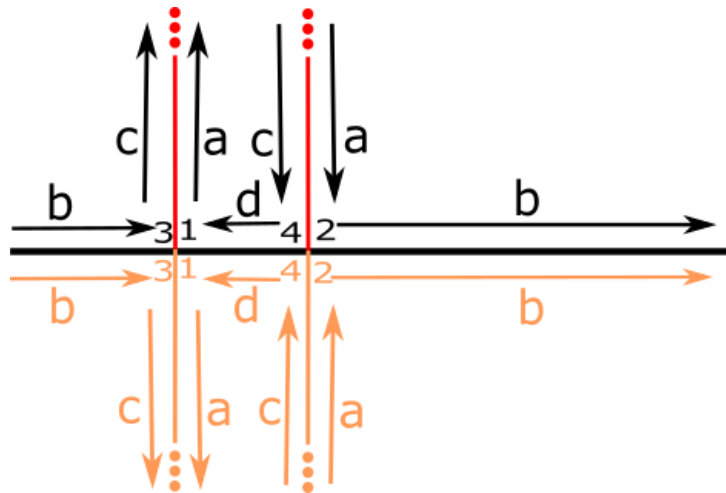


Rysunek 107: Graf szkieletowy Γ_Ω na wstędze Möbiusa

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do d kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. W Przykładzie 4.6 sprawdziliśmy, że taka powierzchnia musi być dyskiem.

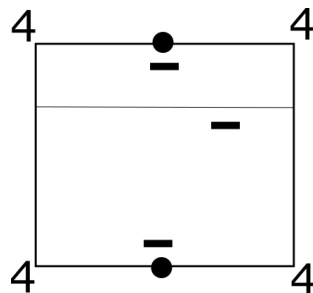
Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. W tym celu pomoże nam Rysunek 108, na którym kolorem pomarańczowym zaznaczono elementy parkietu, które powstaną

przez odbicie poszczególnych elementów orbifoldu względem pojedynczego lustra będącego śladem po brzegu orbifoldu.



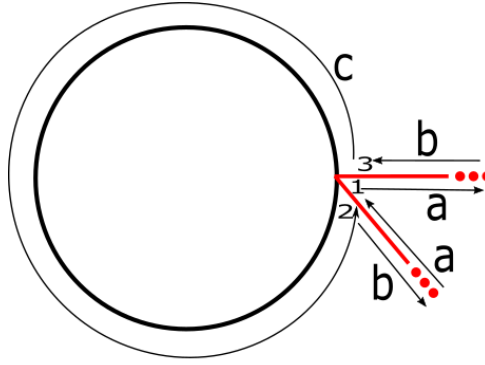
Rysunek 108: Fragment parkietażu Ω ze szkieletem Σ_Ω powstały przez rozwinięcie orbifoldu O_Ω na płaszczyźnie

Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 4 krawędzie (oznaczone kolejno literami $a - d$) i 4 wierzchołki stopnia 4 (fragmenty krzywej Γ_1 są odbijane przez pojedyncze lustro będące śladem po brzegu orbifoldu). Krawędź a przylega do krawędzi c ze zmianą orientacji, krawędzie b oraz d są przekształcane same na siebie, ponieważ są zawarte w pojedynczych lustrach parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 109.



Rysunek 109: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $*\times$

Przypadek 2. W przypadku 2. krzywa Γ_1 ma początek i koniec w punkcie A na brzegu orbifoldu. Ze względu na nieorientowalność wstęgi Möbiusa, możemy rozważyć przypadki, gdy krzywa taka jest krzywą dwustronną lub jednostronną.



Rysunek 110: Graf szkieletowy Γ_Ω na wstędze Möbiusa

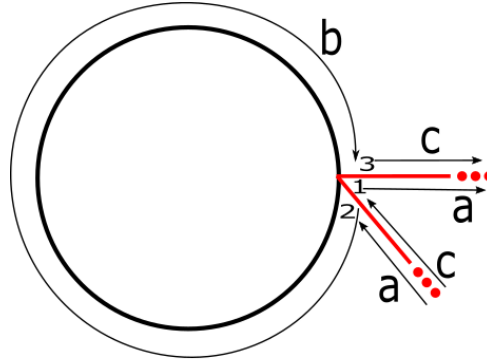
Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a i znajdujemy się znów w wierzchołku 1. Ponieważ nie przeszliśmy jeszcze przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron, musimy rozpocząć obchodzenie schematu od jeszcze nieodwiedzzonego wierzchołka 2. Przechodząc kolejne fragmenty krzywych, znajdujemy się ponownie w wierzchołku 2, tym razem każda ze stron krzywych została odwiedzona. Mamy więc powierzchnię z dwiema komponentami brzegu. Powierzchnia ta nie jest dyskiem. Sprawdźmy, czy jest to powierzchnia spójna.

Wstęga Möbiusa jest powierzchnią nieorientowalną, mającą 1 komponentę brzegu i charakterystykę Eulera $\chi(O_\Omega) = 0$. Rozcinając ją wzdłuż krzywej opisanej w tym przypadku, otrzymujemy powierzchnię z dwiema komponentami brzegu. Obliczmy charakterystykę Eulera otrzymanej powierzchni. Wybierzmy taką triangulację, w której w punkcie A znajduje się wierzchołek triangulacji. Liczba obszarów trójkątnych triangulacji nie ulega zmianie, gdyż możemy tak wybrać triangulację, aby brzegi obszarów zawierały linię cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę krawędzi tej triangulacji zawartych w krzywej Γ_1 . Wówczas liczba wierzchołków tej triangulacji zawartych w Γ_1 również wynosi n . Wtedy liczba krawędzi triangulacji powierzchni O'_Ω zwiększą się o n , gdyż każda z krawędzi zawartych w krzywej Γ_1 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O'_Ω . Liczba wierzchołków triangulacji zwiększy się o $n + 1$, ponieważ każdy wierzchołek zawarty w Γ_1 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O'_Ω , z wyjątkiem wierzchołka B , który pojawi się trzykrotnie.

$$\begin{aligned} T' &= T \\ W' &= W + n + 1 \\ K' &= K + n \end{aligned}$$

Zatem $\chi(O'_\Omega) = T' + W' - K' = T + W + n + 1 - K - n = T + W + 1 - K = 1$.

Ponownie otrzymaliśmy powierzchnię o charakterystyce Eulera $\chi(O'_\Omega) = 1$, mającą dwie komponenty brzegu. Bez względu na orientowalność, taka powierzchnia spójna nie istnieje. Możemy więc wykluczyć przypadek krzywej dwustronnej mającej początek i koniec w punkcie A na brzegu orbifoldu.



Rysunek 111: Graf szkieletowy Γ_Ω na wstędze Möbiusa

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez c , który kończy się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Sprawdzamy, jaka to powierzchnia.

Wstęga Möbiusa jest powierzchnią nieorientowalną, mającą 1 komponentę brzegu i charakterystykę Eulera $\chi(O_\Omega) = 0$. Rozcinając ją wzdłuż krzywej opisanej w tym przypadku, otrzymujemy powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Obliczając jej charakterystykę Eulera w sposób identyczny, jak w przypadku krzywej dwustronnej, otrzymujemy $\chi(O'_\Omega) = 1$.

Zgodnie z twierdzeniami klasyfikującymi:

- Jeśli O'_Ω jest powierzchnią orientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - 2g - 1 &= 1 \\ 2g &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

Zatem O'_Ω jest sferą z wyciętym dyskiem, jest więc homeomorficzna z dyskiem.

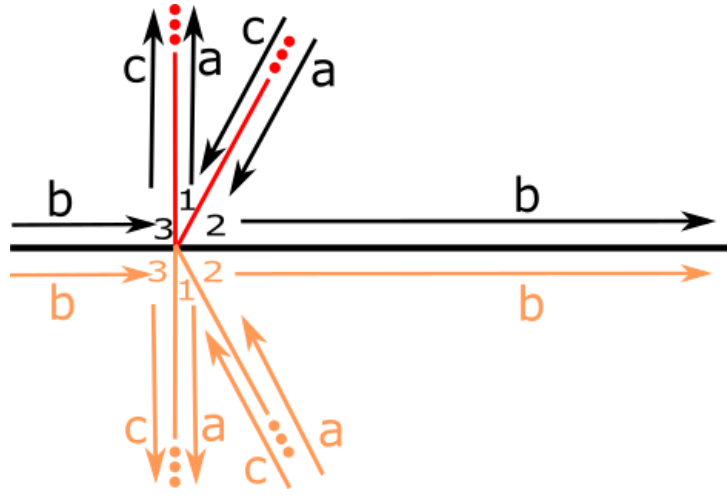
- Jeśli O'_Ω jest powierzchnią nieorientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - n - 1 &= 1 \\ n &= 0 \end{aligned}$$

Zatem nie istnieje taka powierzchnia spójna O'_Ω .

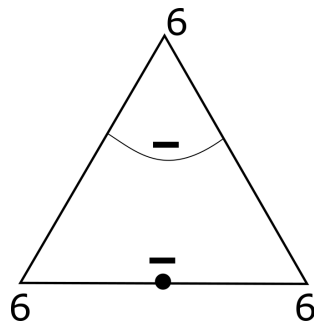
Rozważana powierzchnia O'_Ω jest więc dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. W tym celu pomoże nam Rysunek 112, na którym kolorem pomarańczowym zaznaczono elementy parkietażu, które powstaną przez odbicie poszczególnych elementów orbifoldu względem pojedynczego lustra będącego śladem po brzegu orbifoldu.



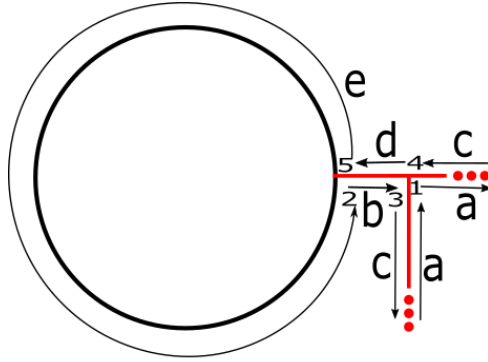
Rysunek 112: Fragment parkietażu Ω ze szkieletem Σ_Ω powstały przez rozwinięcie orbifoldu O_Ω na płaszczyźnie

Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 3 krawędzie (oznaczone kolejno literami $a - c$) i 3 wierzchołki stopnia 6 (fragmenty krzywej Γ_1 są odbijane przez pojedyncze lustro będące śladem po brzegu orbifoldu). Krawędź a przylega do krawędzi c ze zmianą orientacji, zaś krawędź b jest przekształcana na siebie, ponieważ zawiera się w pojedynczym lustrze parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 113.



Rysunek 113: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $*\times$

Przypadek 3. W przypadku 3. krzywa Γ_1 ma początek w punkcie A na brzegu O_Ω i koniec w punkcie B na krzywej Γ_1 (poza brzegiem orbifoldu). Ze względu na nieorientowalność wstęgi Möbiusa, możemy rozważyć przypadki, gdy krzywa będąca zamkniętym fragmentem krzywej Γ_1 wyznaczonym przez punkt B , jest krzywą dwustronną lub jednostronną.



Rysunek 114: Graf szkieletowy Γ_Ω na wstędze Möbiusa

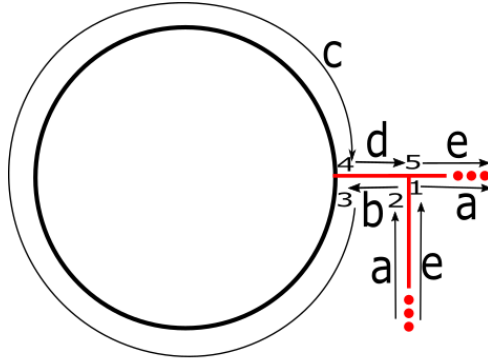
Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a i znajdujemy się znów w wierzchołku 1. Ponieważ nie przeszliśmy jeszcze przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron, musimy rozpocząć obchodzenie schematu od jeszcze nieodwiedzonego wierzchołka 2. Przechodząc kolejne fragmenty krzywych, znajdujemy się ponownie w wierzchołku 2, tym razem każda ze stron krzywych została odwiedzona. Mamy więc powierzchnię z dwiema komponentami brzeżu. Powierzchnia ta nie jest dyskiem. Sprawdźmy, czy jest to powierzchnia spójna.

Wstęga Möbiusa jest powierzchnią nieorientowalną, mającą 1 komponentę brzeżu i charakterystykę Eulera $\chi(O_\Omega) = 0$. Rozcinając ją wzdłuż krzywej opisanej w tym przypadku, otrzymujemy powierzchnię z dwiema komponentami brzeżu. Obliczmy charakterystykę Eulera otrzymanej powierzchni. Wybierzmy taką triangulację, w której w punktach A i B znajdują się wierzchołki triangulacji. Liczba obszarów trójkątnych triangulacji nie ulega zmianie, gdyż możemy tak wybrać triangulację, aby brzegi obszarów zawierały linię cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę krawędzi tej triangulacji zawartych w krzywej Γ_1 . Wówczas liczba wierzchołków tej triangulacji zawartych w Γ_1 również wynosi n . Wtedy liczba krawędzi triangulacji powierzchni O'_Ω zwiększą się o n , gdyż każda z krawędzi zawartych w krzywej Γ_1 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O'_Ω . Liczba wierzchołków triangulacji zwiększy się o $n + 1$, ponieważ każdy wierzchołek zawarty w Γ_1 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O'_Ω , z wyjątkiem wierzchołka B , który pojawi się trzykrotnie.

$$\begin{aligned} T' &= T \\ W' &= W + n + 1 \\ K' &= K + n \end{aligned}$$

Zatem $\chi(O'_\Omega) = T' + W' - K' = T + W + n + 1 - K - n = T + W + 1 - K = 1$.

Ponownie otrzymaliśmy powierzchnię o charakterystyce Eulera $\chi(O'_\Omega) = 1$, mającą dwie komponenty brzeżu. Bez względu na orientowalność, taka powierzchnia spójna nie istnieje. Możemy więc wykluczyć przypadek krzywej dwustronnej mającej początek w punkcie A na brzegu O_Ω i koniec w punkcie B na krzywej Γ_1 (poza brzegiem orbifoldu).



Rysunek 115: Graf szkieletowy Γ_Ω na wstędze Möbiusa

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do e kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Sprawdzamy, jaka to powierzchnia.

Wstęga Möbiusa jest powierzchnią nieorientowalną, mającą 1 komponentę brzegu i charakterystykę Eulera $\chi(O_\Omega) = 0$. Rozcinając ją wzdłuż krzywej opisanej w tym przypadku, otrzymujemy powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Obliczając jej charakterystykę Eulera w sposób identyczny, jak w przypadku krzywej dwustronnej, otrzymujemy $\chi(O'_\Omega) = 1$.

Zgodnie z twierdzeniami klasyfikującymi:

- Jeśli O'_Ω jest powierzchnią orientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - 2g - 1 &= 1 \\ 2g &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

Zatem O'_Ω jest sferą z wyciętym dyskiem, jest więc homeomorficzna z dyskiem.

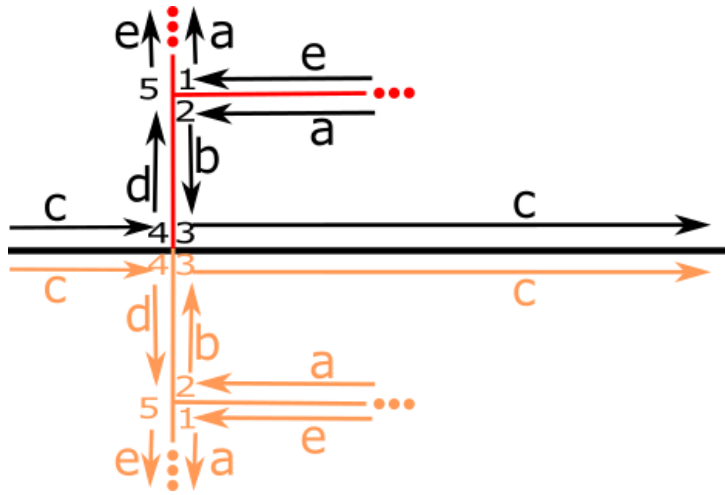
- Jeśli O'_Ω jest powierzchnią nieorientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - n - 1 &= 1 \\ n &= 0 \end{aligned}$$

Zatem nie istnieje taka powierzchnia spójna O'_Ω .

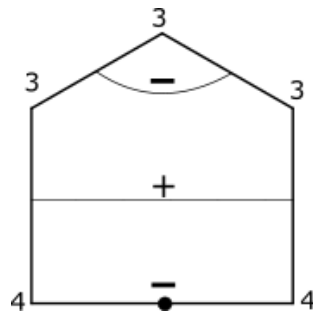
Rozważana powierzchnia O'_Ω jest więc dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. W tym celu pomoże nam Rysunek 116, na którym kolorem pomarańczowym zaznaczono elementy parkietażu, które powstaną przez odbicie poszczególnych elementów orbifoldu względem pojedynczego lustra będącego śladem po brzegu orbifoldu.



Rysunek 116: Fragment parkietażu Ω ze szkieletem Σ_Ω powstały przez rozwinięcie orbifoldu O_Ω na płaszczyźnie

Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 5 krawędzi (oznaczonych kolejno literami $a - e$) i 5 wierzchołków. Dwa z nich mają stopień 3 (wierzchołki 1, 2 i 5), a pozostałe są stopnia 4 (w tych wierzchołkach fragmenty krzywej Γ_1 są odbijane przez pojedyncze lustro będące śladem po brzegu orbifoldu). Krawędź a przylega do krawędzi e ze zmianą orientacji, krawędź b do krawędzi d z zachowaniem orientacji, zaś krawędź c jest przekształcana na siebie ze zmianą orientacji, ponieważ zawiera się w pojedynczym lustrze parkietażu. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 117.



Rysunek 117: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $*\times$

8.7.2 Typ symetrii $\times\times$

W przypadku parkietaży o tym typie symetrii, mamy do czynienia z dwoma rodzajami specjalnych symetrii z poślizgiem. Orbifoldem O_Ω jest butelka Kleina. Ponieważ butelka Kleina nie jest homeomorficzna z dyskiem, graf szkieletowy Γ_Ω musi zawierać pewną krzywą Γ_1 . Ponieważ na powierzchni orbifoldu nie ma żadnych punktów stożkowych, krzywa Γ_1 musi być krzywą zamkniętą. Może to być krzywa jednostronna albo dwustronna.

Butelka Kleina rozcięta krzywą dwustronną. Zgodnie z Przykładem 4.5, w przypadku rozcięcia butelki Kleina krzywą dwustronną, otrzymamy pierścień, czyli sferę z wyciętymi dwoma dyskami. Należy przy tym pamiętać, że każdy z brzegów jest śladem po krzywej Γ_1 , a więc każdy punkt tej krzywej znajduje się zarówno na jednym, jak na drugim brzegu powierzchni O'_Ω . Powierzchnia O'_Ω nie jest homeomorficzna z dyskiem, będziemy zatem potrzebować krzywej Γ_2 rozcinającej powierzchnię O'_Ω . Krzywa ta w sumie z krzywą Γ_1 daje graf szkieletowy spójny. Powtarzamy rozumowanie, które przeprowadziliśmy w Podrozdziale 8.1 i otrzymujemy dwie możliwości położenia krzywej Γ_2 na pierścieniu, które prowadzą do otrzymania dysku O''_Ω w wyniku rozcięcia butelki Kleina wzdłuż grafu szkieletowego Γ_Ω :

1. krzywa Γ_2 ma początek i koniec w tym samym punkcie krzywej Γ_1 , ale na różnych komponentach brzegu;
2. krzywa Γ_2 ma początek i koniec w różnych punktach krzywej Γ_1 , na różnych komponentach brzegu.

Oba przypadki możemy przedstawić na schematach, tym razem jednak krzywa Γ_1 jest krzywą dwustronną, zatem reprezentowana będzie przez okrąg z wąskim pasem wokół. Krzywą Γ_1 oznaczymy kolorem czarnym, a krzywą Γ_2 kolorem czerwonym. Ponieważ Γ_1 jest krzywą dwustronną, zastanówmy się, w jaki sposób powstałe komponenty brzegu do siebie przylegają po sklejeniu O'_Ω w O_Ω . Dla ustalenia uwagi zorientujmy krzywą Γ_1 na butelce Kleina. Rozcinając powierzchnię wzdłuż Γ_1 , otrzymujemy pierścień, który możemy schematycznie przedstawić na Rysunku 118.



Rysunek 118: Pierścień

Brzegi pierścienia powstałego po rozcięciu krzywą zorientowaną Γ_1 są zorientowane przeciwnie. Jest tak, ponieważ gdyby były zorientowane zgodnie, po ponownym sklejeniu wzdłuż śladu po krzywej Γ_1 , otrzymalibyśmy torus, który nie jest homeomorficzny z butelką Kleina.

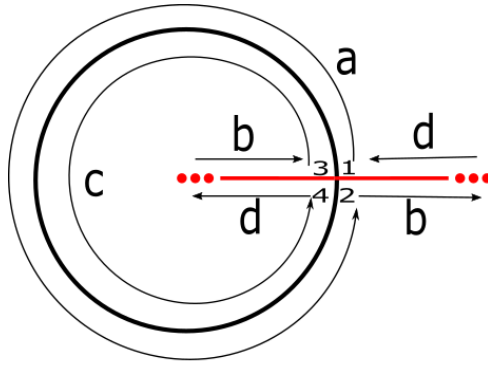


Rysunek 119: Pierścień z brzegami zorientowanymi zgodnie



Rysunek 120: Pierścień z brzegami zorientowanymi przeciwnie

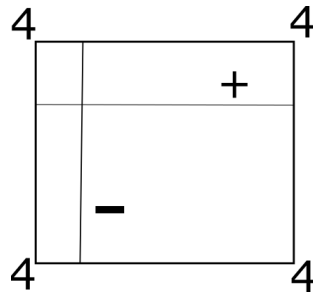
Przypadek 1.



Rysunek 121: Graf szkieletowy Γ_Ω na butelce Kleina

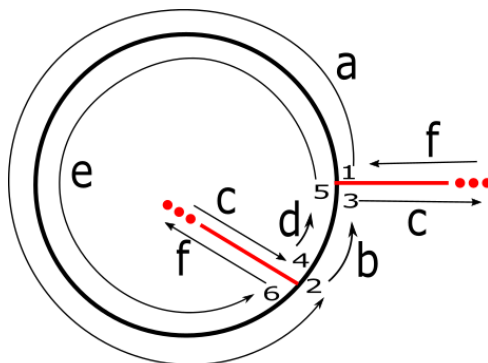
Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do d kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.1, O''_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 4 krawędzie (oznaczone kolejno literami $a - d$) i 4 wierzchołki stopnia 4 (w każdym wierzchołku spotykają się 4 fragmenty krzywych). Krawędź a przylega do krawędzi c ze zmianą orientacji, zaś krawędź b do krawędzi d z zachowaniem orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 122.



Rysunek 122: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $\times \times$

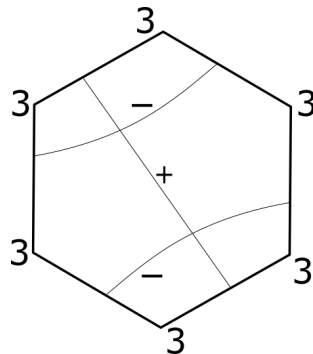
Przypadek 2.



Rysunek 123: Graf szkieletowy Γ_Ω na butelce Kleina

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do f kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.1, O''_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 6 krawędzi (oznaczonych kolejno literami $a - f$) i 6 wierzchołków stopnia 3 (w każdym wierzchołku spotykają się 3 fragmenty krzywych. Krawędź a przylega do krawędzi e ze zmianą orientacji, krawędź b do krawędzi d również ze zmianą orientacji, zaś krawędź c do krawędzi f z zachowaniem orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 124.



Rysunek 124: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $\times \times$

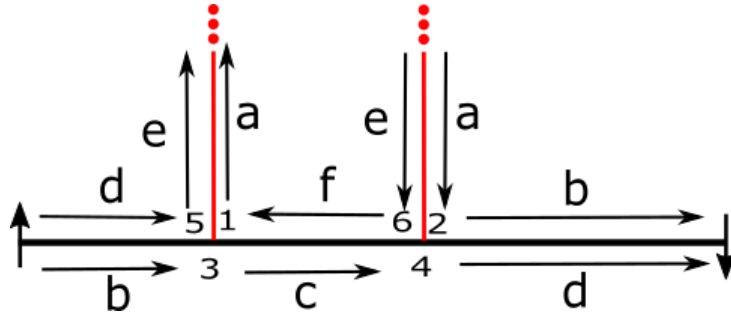
Butelka Kleina rozcięta krzywą jednostronną. Zgodnie z Przykładem 4.5, w przypadku rozcięcia butelki Kleina krzywą jednostronną, otrzymamy wstęgę Möbiusa. W tym przypadku również musimy pamiętać, że brzeg jest śladem po krzywej Γ_1 , a więc każdy punkt tej krzywej znajduje się dwukrotnie na brzegu powierzchni O'_Ω . Powierzchnia O'_Ω nie jest homeomorficzna z dyskiem, będziemy zatem potrzebować krzywej Γ_2 rozcinającej powierzchnię O'_Ω . Krzywa ta w sumie z krzywą Γ_1 daje graf szkieletowy spójny. Powtarzamy rozumowanie, które przeprowadziliśmy w Podrozdziale 8.7.1, pamiętając o tym, że każdy punkt krzywej Γ_1 znajduje się dwukrotnie na brzegu powierzchni O'_Ω . Założenie to sprawi, że w przypadku krzywej Γ_2 mającej początek i koniec w różnych punktach brzegu powierzchni O'_Ω , będziemy musieli rozważyć sytuację, w której są to dwa różne punkty krzywej Γ_1 oraz sytuację, w której jest to ten sam punkt. Otrzymujemy zatem cztery możliwości położenia krzywej Γ_2 na pierścieniu, które prowadzą do otrzymania dysku O''_Ω w wyniku rozcięcia butelki Kleina wzdłuż grafu szkieletowego Γ_Ω :

1. Γ_2 ma początek i koniec w różnych punktach krzywej Γ_1 ;
2. Γ_2 ma początek i koniec w różnych punktach brzegu O'_Ω , ale w jednym punkcie krzywej Γ_1 ;
3. Γ_2 ma początek i koniec w tym samym punkcie brzegu O'_Ω ;
4. Γ_2 ma początek na brzegu O'_Ω , a koniec na krzywej Γ_2 (poza brzegiem O'_Ω).

Wszystkie cztery przypadki przedstawimy na schematach. Tym razem krzywa Γ_1 jest krzywą jednostronną, zatem reprezentowana będzie przez odcinek. Na schemacie rysujemy krzywą Γ_1 wraz z jej bliskim otoczeniem zawartym w orbifoldzie. Możemy je przedstawić jako odcinek z wąskim pasem wokół, którego dwa końce są sklezione, jak końce wstęgi Möbiusa. Krzywą Γ_1 oznaczymy kolorem czarnym, a krzywą Γ_2 kolorem czerwonym.

Przypadek 1.

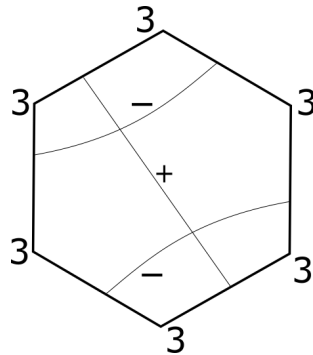
Sytuację, w której krzywa Γ_2 wraz z zawartym między jej końcami fragmentem krzywej Γ_1 jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 125: Graf szkieletowy Γ_Ω na butelce Kleina

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do f kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 6 krawędzi (oznaczone kolejno literami $a - f$) i 6 wierzchołków stopnia 3 (w każdym wierzchołku spotykają się 3 fragmenty krzywych). Krawędź a przylega do krawędzi e ze zmianą orientacji, krawędź b przylega do krawędzi d ze zmianą orientacji, zaś krawędź c do krawędzi f z zachowaniem orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 126.

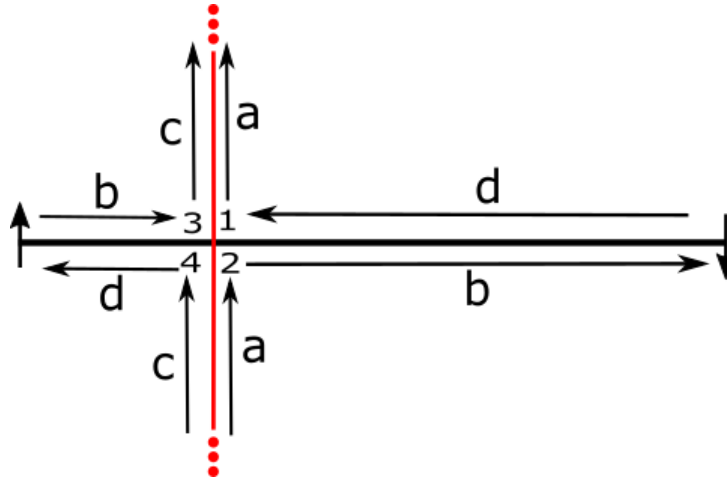


Rysunek 126: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $\times \times$

Zauważmy, że typ kombinatoryczny tego parkietażu wystąpił już, gdy rozcinaliśmy butelkę Kleina najpierw krzywą dwustronną Γ_1 , a później krzywą Γ_2 mającą początek i koniec w różnych punktach krzywej Γ_1 . W tym przypadku rozcinamy butelkę Kleina najpierw krzywą jednostronną Γ_1 , a później krzywą Γ_2 , które przecinają się w dwóch różnych punktach. Rozcięcia takie są równoważne.

Przypadek 2.

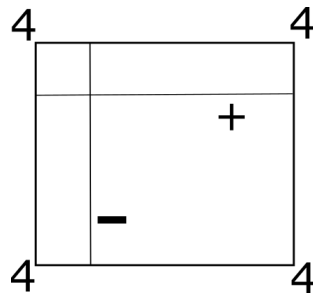
Sytuację, w której krzywa Γ_2 wraz z zawartym między jej końcami fragmentem krzywej Γ_1 jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 127: Graf szkieletowy Γ_Ω na butelce Kleina

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do d kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 4 krawędzie (oznaczone kolejno literami $a - d$) i 4 wierzchołki stopnia 4 (w każdym wierzchołku spotykają się 4 fragmenty krzywych). Krawędź a przylega do krawędzi c ze zmianą orientacji, zaś krawędź b do krawędzi d z zachowaniem orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 128.

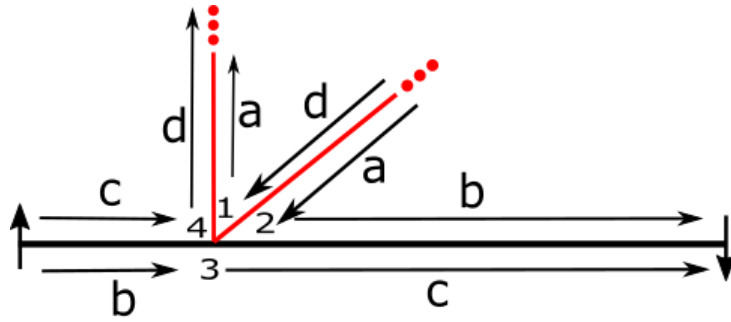


Rysunek 128: Typ kombinatoryczny parkietu o typie symetrii $\times \times$

Zauważmy, że typ kombinatoryczny tego parkietu wystąpił już, gdy rozczinaliśmy butelkę Kleina najpierw krzywą dwustronną Γ_1 , a później jednostronną Γ_2 , które przecinały się w jednym punkcie. W tym przypadku rozcinamy butelkę Kleina najpierw krzywą jednostronną Γ_1 , a później krzywą dwustronną Γ_2 , które przecinają się w jednym punkcie. Rozcięcia takie są równoważne.

Przypadek 3.

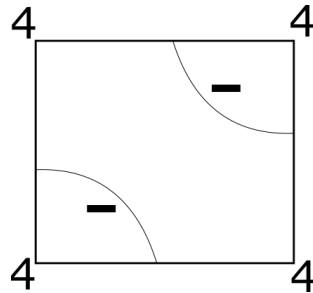
Sytuację, w której krzywa Γ_2 jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 129: Graf szkieletowy Γ_Ω na butelce Kleina

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do d kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

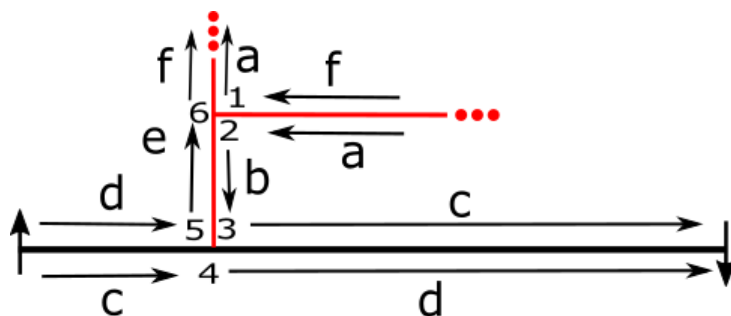
Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 4 krawędzie (oznaczone kolejno literami $a - d$) i 4 wierzchołki stopnia 4 (w każdym wierzchołku spotykają się 4 fragmenty krzywych). Krawędź a przylega do krawędzi d ze zmianą orientacji, zaś krawędź b do krawędzi c również ze zmianą orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 130.



Rysunek 130: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $\times \times$

Przypadek 4.

Sytuację, w której zamknięty fragment krzywej Γ_2 wyznaczony przez jej koniec jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).

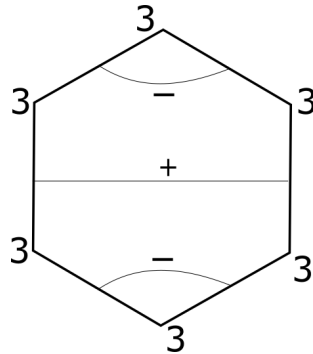


Rysunek 131: Graf szkieletowy Γ_Ω na butelce Kleina

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do

wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do f kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O'_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 6 krawędzi (oznaczone kolejno literami $a - f$) i 6 wierzchołków stopnia 3 (w każdym wierzchołku spotykają się 3 fragmenty krzywych). Krawędź a przylega do krawędzi f ze zmianą orientacji, krawędź b do krawędzi e z zachowaniem orientacji, zaś krawędź c do krawędzi d również ze zmianą orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 132.



Rysunek 132: Typ kombinatoryczny parkietazu o typie symetrii $\times \times$

8.7.3 Typ symetrii $22 \times$

Typ symetrii $22 \times$ charakteryzuje się tym, że oprócz specjalnych symetrii z poślizgiem posiada dwa rodzaje punktów obrotowych rzędu 2. Orbifoldem O_Ω takiego typu symetrii jest płaszczyzna rzutowa z dwoma wyróżnionymi punktami stożkowymi. Zgodnie z Twierdzeniem 7.6, oba punkty stożkowe muszą być zawarte w grafie szkieletowym Γ_Ω . Ponieważ, zgodnie z Twierdzeniem 7.5, graf szkieletowy Γ_Ω musi być spójny, znajdziemy fragment takiego grafu łączący punkty stożkowe. Mamy więc krzywą Γ_1 łączącą punkty stożkowe, wzdłuż której rozcinamy orbifold O_Ω , uzyskując powierzchnię O'_Ω . Jest to powierzchnia z jedną komponentą brzegu, będącą śladem po krzywej Γ_1 . Sprawdźmy teraz, jaka to powierzchnia.

Obliczmy w tym celu charakterystykę Eulera otrzymanej powierzchni. Płaszczyzna rzutowa ma charakterystykę Eulera równą $\chi(O_\Omega) = 1$ i jest powierzchnią nieorientowalną, więc powierzchnia O'_Ω może być zarówno powierzchnią orientowalną, jak nieorientowalną. Wybierzmy taką triangulację, w której w punktach stożkowych znajdują się wierzchołki triangulacji. Liczba trójkątnych obszarów triangulacji nie ulega zmianie, ponieważ możemy tak wybrać triangulację, aby brzegi obszarów zawierały się w linii cięcia. Dla tak wybranej triangulacji oznaczmy przez n liczbę krawędzi tej triangulacji zawartych w Γ_1 . Wówczas liczba wierzchołków tej triangulacji zawartych w Γ_1 wynosi $n + 1$. Wtedy liczba krawędzi triangulacji powierzchni O'_Ω zwiększy się o n , gdyż każda z krawędzi zawartych w Γ_1 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O'_Ω . Liczba wierzchołków triangulacji zwiększy się o $n - 1$, ponieważ każdy wierzchołek zawarty w Γ_1 pojawi się dwukrotnie na brzegu powierzchni O'_Ω , z wyjątkiem wierzchołków znajdujących się w punktach stożkowych, które pojawią się na nim jednokrotnie.

$$\begin{aligned} T' &= T \\ K' &= K + n \\ W' &= W + n - 1 \end{aligned}$$

Zatem $\chi(O'_\Omega) = T' + W' + K' = T + W + n - 1 - K - n = T + W - K - 1 = 0$.

Na podstawie twierdzenie klasyfikującego powierzchnie z brzegiem, sprawdzamy, jaka to powierzchnia. Rozpatrujemy dwa przypadki:

- Jeśli O'_Ω jest powierzchnią orientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - 2g - 1 &= 0 \\ 2g &= 1 \\ g &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

O'_Ω nie jest więc powierzchnią orientowalną.

- Jeśli O'_Ω jest powierzchnią nieorientowalną, to

$$\begin{aligned} 2 - n - 1 &= 0 \\ n &= 1 \end{aligned}$$

O'_Ω powstaje z płaszczyzny rzutowej przez wycięcie dysku.

Otrzymana powierzchnia jest więc wstęgą Möbiusa. Każdy punkt tej krzywej znajduje się dwukrotnie na brzegu wstęgi, z wyjątkiem końców linii cięcia, czyli punktów obrotowych. Ponieważ powierzchnia O'_Ω nie jest homeomorficzna z dyskiem, musimy dołączyć krzywą Γ_2 , która w sumie z krzywą Γ_1 da graf szkieletowy spójny. Powtarzamy rozumowanie przeprowadzone w Podrozdziale 8.7.1, pamiętając, że w tym przypadku punkty leżące na krzywej Γ_1 znajdują się dwukrotnie na brzegu powierzchni O'_Ω . Jak w Podrozdziale 8.7.2, otrzymujemy 4 możliwe położenia krzywej Γ_2 , które po rozcięciu wzdłuż Γ_Ω dają dysk:

1. Γ_2 ma początek i koniec w różnych punktach krzywej Γ_1 ;
2. Γ_2 ma początek i koniec w różnych punktach brzegu O'_Ω , ale w jednym punkcie krzywej Γ_1 ;
3. Γ_2 ma początek i koniec w tym samym punkcie brzegu O'_Ω ;
4. Γ_2 ma początek na brzegu O'_Ω , a koniec na krzywej Γ_2 (poza brzegiem O'_Ω).

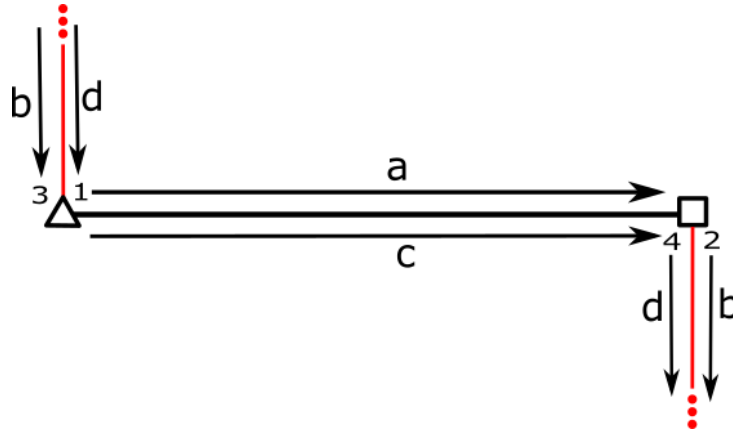
Tym razem jednak na krzywej Γ_1 mamy wyróżnione dwa punkty obrotowe. Będziemy musieli zatem w każdym z przypadków rozważyć sytuację, gdy krzywa Γ_2 ma jeden lub dwa końce w pewnym punkcie stożkowym lub w punkcie zwyczajnym. Wszystkie przypadki przedstawimy na schematach. Krzywą Γ_1 oznaczymy kolorem czarnym, krzywą Γ_2 kolorem czerwonym, a punkty stożkowe symbolami \square i \triangle . Podobnie, jak w Podrozdziale 8.7.2, wystarczy rozważyć odpowiednie krzywe jednostronne, z tego samego powodu, co w Podrozdziale 8.7.1.

Przypadek 1. Gdy Γ_2 ma początek i koniec w różnych punktach krzywej Γ_1 , mamy do rozważenia sytuację, gdy:

- (a) początek i koniec krzywej Γ_2 są w punktach stożkowych,
- (b) tylko jeden z końców krzywej Γ_2 jest w punkcie stożkowym,
- (c) żaden z końców krzywej Γ_2 nie jest w punkcie stożkowym.

Przypadek 1a.

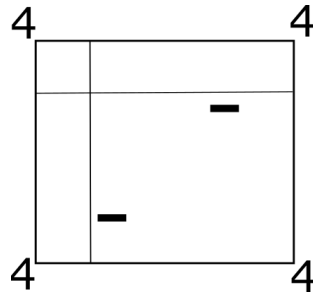
Sytuację, w której krzywa Γ_2 wraz z zawartym między jej końcami fragmentem krzywej Γ_1 jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 133: Graf szkieletowy Γ_Ω na płaszczyźnie rzutowej

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do d kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

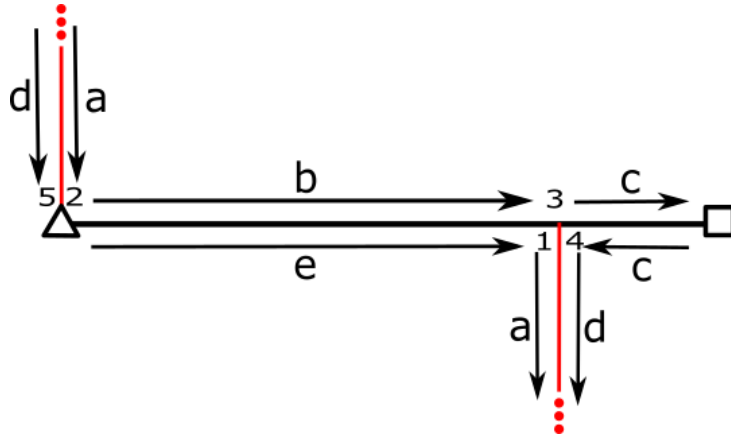
Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 4 krawędzie (oznaczone kolejno literami $a - d$) i 4 wierzchołki stopnia 4 (wierzchołki są śladami po punktach obrotowych rzędu 2, więc zgodnie z Faktem 8.1, każdy z nich jest przekształcany w 2 wierzchołki stopnia 4). Krawędź a przylega do krawędzi c ze zmianą orientacji, a krawędź b do krawędzi d również ze zmianą orientacji. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 134.



Rysunek 134: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $22 \times$

Przypadek 1b.

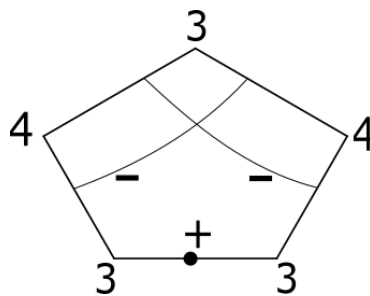
Sytuację, w której krzywa Γ_2 wraz z zawartym między jej końcami fragmentem krzywej Γ_1 jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 135: Graf szkieletowy Γ_Ω na płaszczyźnie rzutowej

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do e kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O_Ω'' jest dyskiem.

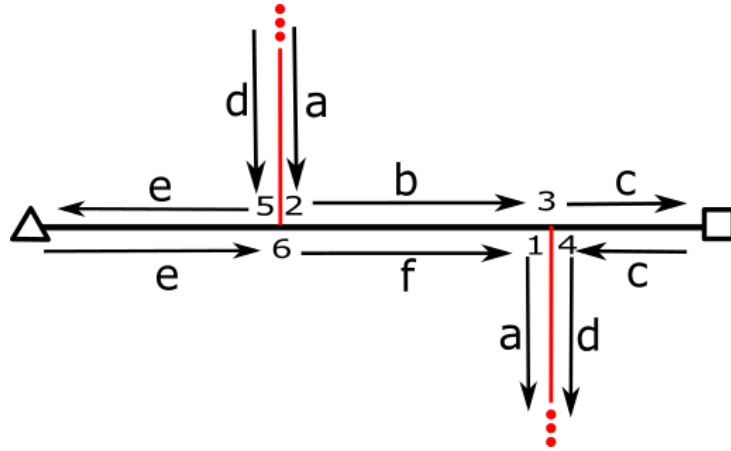
Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 5 krawędzi (oznaczonych kolejno literami $a - e$) i 5 wierzchołków — dwa stopnia 4 (wierzchołki te są śladami po punkcie stożkowym rzędu 2, który, zgodnie z Faktem 8.1, jest przekształcany w 2 wierzchołki stopnia 4) i trzy wierzchołki stopnia 3 (będące śladami po punkcie zwyczajnym, w którym spotykają się trzy gałęzie grafu szkieletowego). Krawędź a przylega do krawędzi d ze zmianą orientacji, a krawędź b do krawędzi e również ze zmianą orientacji. Na krawędzi c znajduje się punkt obrotowy rzędu 2, więc zgodnie z Faktem 8.1 jest ona przekształcana na siebie przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 136.



Rysunek 136: Typ kombinatoryczny parkietu o typie symetrii $22\times$

Przypadek 1c.

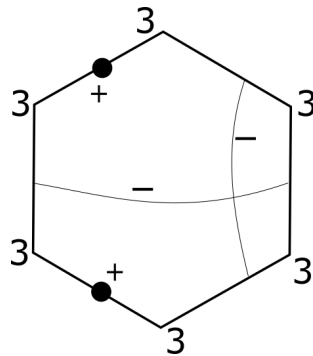
Sytuację, w której krzywa Γ_2 wraz z zawartym między jej końcami fragmentem krzywej Γ_1 jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 137: Graf szkieletowy Γ_Ω na płaszczyźnie rzutowej

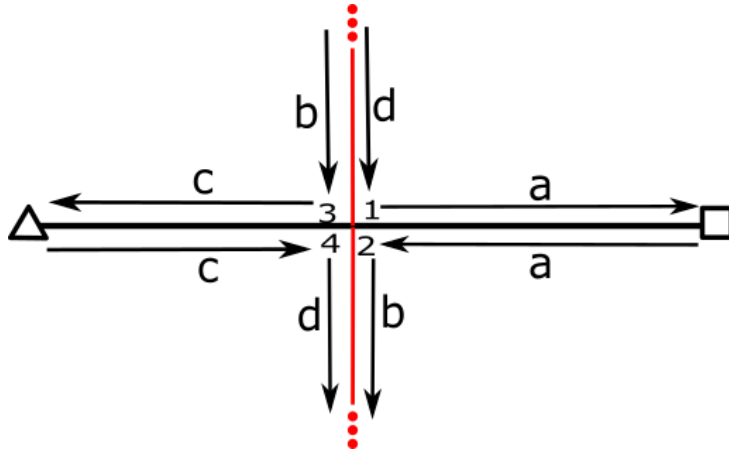
Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do f kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 6 krawędzi (oznaczonych kolejno literami $a - f$) i 6 wierzchołków stopnia 3 (będących śladami po punktach zwyczajnych, w których spotykają się trzy gałęzie grafu szkieletowego). Krawędź a przylega do krawędzi d ze zmianą orientacji, krawędź b do krawędzi f ze zmianą orientacji, zaś na krawędziach c i e znajdują się punkty obrotowe rzędu 2, więc zgodnie z Faktem 8.1, krawędzie te są przekształcane na siebie same przez obrót. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 138.



Rysunek 138: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $22 \times$

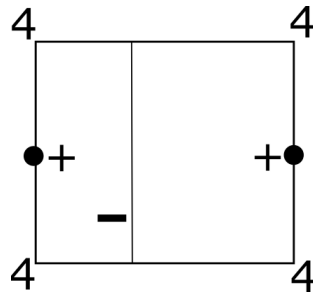
Przypadek 2. Gdy Γ_2 ma początek i koniec w różnych punktach brzegu O'_Ω , ale w jednym punkcie krzywej Γ_1 , mamy do rozważenia jedynie sytuację, gdy początek i koniec krzywej Γ_2 nie są w punkcie stożkowym. Sytuację, w której krzywa Γ_2 wraz z zawartym między jej końcami fragmentem krzywej Γ_1 jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 139: Graf szkieletowy Γ_Ω na płaszczyźnie rzutowej

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do d kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 4 krawędzie (oznaczone kolejno literami $a - d$) i 4 wierzchołki stopnia 4 (każdy z nich jest śladem po punkcie zwyczajnym, w którym łączą się cztery gałęzie krzywej Γ_Ω). Krawędź b przylega do krawędzi d ze zmianą orientacji, a krawędzie a i d przylegają do samych siebie z zachowaniem orientacji, zgodnie z Faktem 8.1. Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 140.



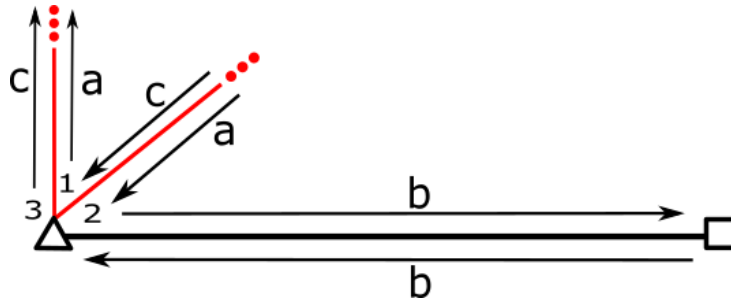
Rysunek 140: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $22 \times$

Przypadek 3. Gdy Γ_2 ma początek i koniec w tym samym punkcie brzegu O'_Ω , mamy do rozważenia sytuacje, gdy:

- (a) początek i koniec krzywej Γ_2 są w punkcie stożkowym,
- (b) początek i koniec krzywej Γ_2 nie są w punkcie stożkowym.

Przypadek 3a.

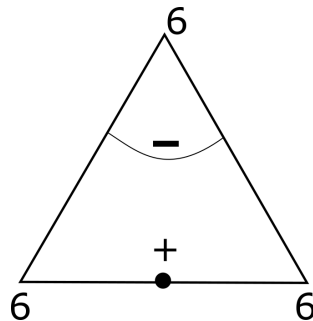
Sytuację, w której krzywa Γ_2 jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 141: Graf szkieletowy Γ_Ω na płaszczyźnie rzutowej

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez c , który kończy się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

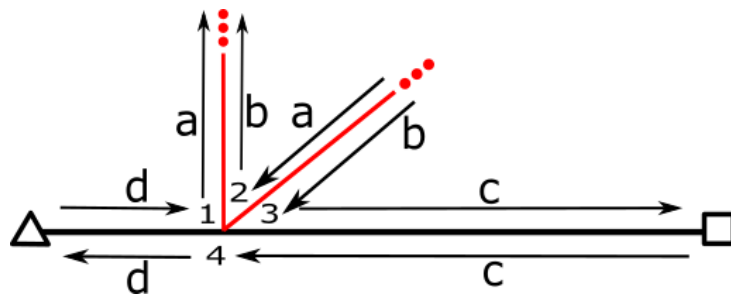
Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 3 krawędzie (oznaczone kolejno literami $a - c$) i 3 wierzchołki stopnia 6 (wierzchołki są śladami po punkcie obrotowym rzędu 2, więc zgodnie z Faktem 8.1, każdy z nich jest przekształcany w 3 wierzchołki stopnia 6). Krawędź a przylega do krawędzi c ze zmianą orientacji, a krawędź b do siebie z zachowaniem orientacji (zgodnie z Faktem 8.1). Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny kleпки przedstawiony na Rysunku 142.



Rysunek 142: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $22 \times$

Przypadek 3b.

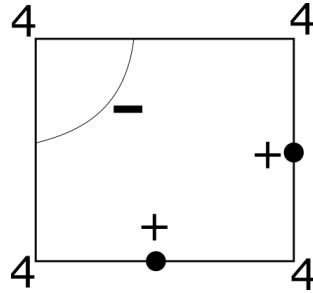
Sytuację, w której krzywa Γ_2 jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 143: Graf szkieletowy Γ_Ω na płaszczyźnie rzutowej

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do d kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 4 krawędzie (oznaczone kolejno literami $a - d$) i 4 wierzchołki stopnia 4 (wierzchołki są śladami po punkcie zwyczajnym orbifoldu, w którym spotykają się 4 gałęzie grafu szkieletowego Γ_Ω). Krawędź a przylega do krawędzi b ze zmianą orientacji, a krawędzie c i d przylegają do siebie samych z zachowaniem orientacji (zgodnie z Faktem 8.1). Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 144.



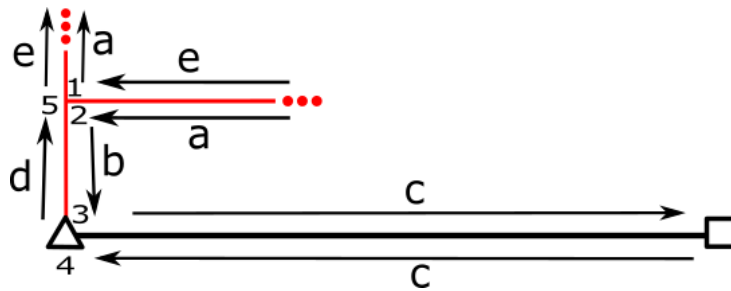
Rysunek 144: Typ kombinatoryczny parkietazu o typie symetrii $22\times$

Przypadek 4. Gdy Γ_2 ma początek na brzegu O'_Ω , a koniec na krzywej Γ_2 (poza brzegiem O'_Ω), mamy do rozważenia sytuacje, gdy:

- (a) początek krzywej Γ_2 jest w punkcie stożkowym,
- (b) początek krzywej Γ_2 nie jest w punkcie stożkowym.

Przypadek 4a.

Sytuację, w której zamknięty fragment krzywej Γ_2 wyznaczony przez jej koniec jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).

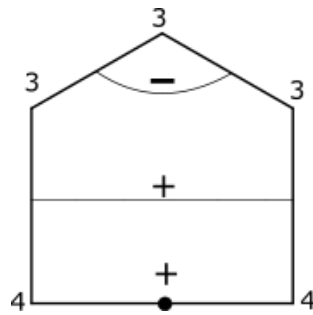


Rysunek 145: Graf szkieletowy Γ_Ω na płaszczyźnie rzutowej

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do e kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 5 krawędzi (oznaczonych kolejno literami $a - e$) i 5 wierzchołków — dwa stopnia 4 (wierzchołki te są śladami po punkcie stożkowym rzędu 2, który, zgodnie z Faktem 8.1, jest przekształcany w 2 wierzchołki stopnia 4) i trzy wierzchołki stopnia 3 (będące śladami po punkcie zwyczajnym, w którym spotykają się trzy gałęzie grafu szkieletowego). Krawędź a przylega do krawędzi e ze zmianą orientacji, krawędź b do krawędzi d z zachowaniem

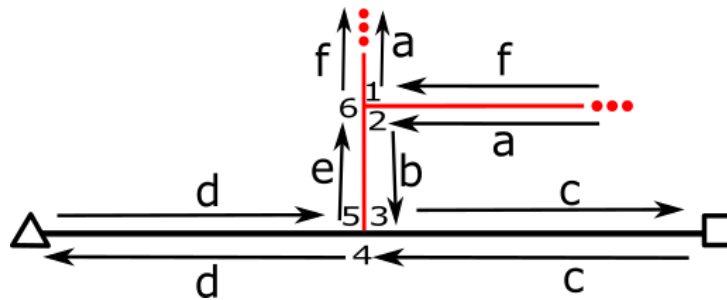
orientacji, a krawędź c przylega do siebie samej z zachowaniem orientacji (zgodnie z Faktem 8.1). Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 146.



Rysunek 146: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $22 \times$

Przypadek 4b.

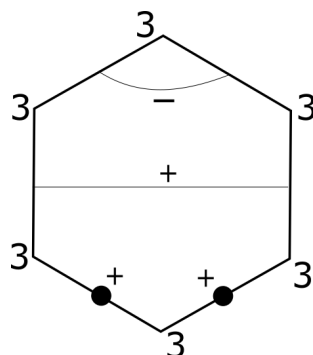
Sytuację, w której zamknięty fragment krzywej Γ_2 wyznaczony przez jej koniec jest krzywą dwustronną, możemy wykluczyć, ponieważ nie powstaje wtedy powierzchnia spójna (tak jak w Podrozdziale 8.7.1).



Rysunek 147: Graf szkieletowy Γ_Ω na płaszczyźnie rzutowej

Poruszając się od wierzchołka 1, przechodzimy przez a do wierzchołka 2, następnie przez b do wierzchołka 3 i przez kolejne fragmenty krzywych, aż do f kończącego się w wierzchołku 1. Zauważamy, że przeszliśmy przez wszystkie fragmenty krzywych po każdej ze stron. Mamy więc powierzchnię z jedną komponentą brzegu. Zgodnie z Podrozdziałem 8.7.1, O''_Ω jest dyskiem.

Należy teraz odczytać reguły przylegania poszczególnych krawędzi. Zgodnie ze schematem, mamy do czynienia z płytką mającą 6 krawędzi (oznaczonych kolejno literami $a - f$) i 6 wierzchołków stopnia 3 będących śladami po punktach zwyczajnych, w których spotykają się trzy gałęzie grafu szkieletowego). Krawędź a przylega do krawędzi f ze zmianą orientacji, krawędź b do krawędzi e z zachowaniem orientacji, a krawędzie c i d przylegają do siebie samych z zachowaniem orientacji (zgodnie z Faktem 8.1). Otrzymujemy zatem typ kombinatoryczny klepki przedstawiony na Rysunku 148.



Rysunek 148: Typ kombinatoryczny parkietażu o typie symetrii $22 \times$

8.8 Podsumowanie

Korzystając z metody zaproponowanej przez Johna Conway'a w [1], dokonaliśmy klasyfikacji parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach. Metoda ta polega na takim rozcięciu grafem szkieletowym Γ_Ω orbifoldu O_Ω przyporządkowanego danemu typowi symetrii, aby otrzymać dysk reprezentujący pojedynczą klepkę parkietażu.

Okazało się, że dla każdego z siedemnastu typów symetrii wzorów płaskich istnieje przynajmniej jeden typ kombinatoryczny parkietażu izohedralnego realizujący ten typ symetrii. W sumie otrzymaliśmy 46 typów kombinatorycznych parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach.

Możemy też zauważyć, że każdy spośród 46 typów kombinatorycznych jest jednoznacznie przypisany do dokładnie jednego typu symetrii parkietażu oraz że zachodzą poniższe wynikania:

- w pojedynczej klepce dwie różne krawędzie przylegają ze zmianą orientacji wtedy i tylko wtedy, gdy wśród symetrii tego parkietażu występuje specjalna symetria z poślizgiem;
- w pojedynczej klepce występuje krawędź przylegająca do siebie ze zmianą orientacji wtedy i tylko wtedy, gdy wśród symetrii tego parkietażu występuje symetria osiowa (w postaci pojedynczych luster lub punktów kalejdoskopowych);
- jeśli w pojedynczej klepce występuje krawędź przylegająca do siebie z zachowaniem orientacji, to wśród symetrii tego parkietażu występuje obrót.

Otrzymana klasyfikacja w pełni odpowiada wynikom zawartym w [1] (Rozdział 15 zatytułowany "Types of Tilings", str. 185–196) oraz w [3] (Rozdział 6.1 zatytułowany "Incidence Symbols and Adjacency Diagrams" i Rozdział 6.2 zatytułowany "The Classification of Isohedral Tilings", str. 269–295).

Bibliografia

- [1] Conway John, Burgiel Heidi, Goodman-Strauss Chaim, *Symmetries of Things*, CRC Press, Wellesley 2008.
- [2] Duda Roman, *Wprowadzenie do topologii, część II, Topologia algebraiczna i topologia rozmaitości*, Seria Biblioteka Matematyczna, tom 61, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986.
- [3] Grünbaum Branko, Shephard Geoffrey Colin, *Tilings and Patterns* W. H. Freeman and Company, Nowy York 1987.
- [4] Guggenheimer Heinrich, *Plane Geometry and Its Groups* Holden-Day, San Francisco 1967.
- [5] Hilbert David, Cohn-Vossen Stefan, *Geometria pogładowa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1956, Rozdział VI zatytułowany "Topologia", str. 256–296.
- [6] Kaplan Craig Steven, *Introductory Tiling Theory for Computer Graphics*, Morgan & Claypool Publishers, 2009.
- [7] Kijewska Kalina, *O symetriach wzorów płaskich*, praca magisterska, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 2014.
- [8] Martin George Edward, *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry* Springer-Verlag, Nowy York, Heidelberg, Berlin 1982.
- [9] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Klein_Bottle_Mark.svg
- [10] https://pl.wikipedia.org/wiki/Charakterystyka_Eulera
- [11] [https://pl.wikipedia.org/wiki/Triangulacja_\(matematyka\)](https://pl.wikipedia.org/wiki/Triangulacja_(matematyka))
- [12] <https://www.clker.com/clipart-moebius-strip-cables-1.html>