CHARAKTERYSTYKA EULERA

Def. Dla CW-kompleksu X, skończonego,

$$\chi(X) := \sum_n (-1)^n c_n \quad \text{, gdzie } c_n \text{ - liczba } n\text{-komórek w } X$$

Def. Dla skończ. gen. grupy abelowej G ranga G, $rk(G)$, to takie n, że $G \cong \mathbb{Z}^n \oplus \{\text{skończona}\}$

[taki rozkład zawsze istnieje, zaś n jest w nim jednoznaczne]

TWIERDZENIE. $\chi(X) = \sum_n (-1)^n rk(H_n X)$.

WNIOSEK. Charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem typu homotopijnego X, w szczególności nie zależy od sposobu przedstawienia X jako CW-kompleksu.

[Przestrzenie o równych χ nie są homeo, a nawet nie są homotopijnie równoważne]

FAKT POMOCNICZY.

Jeśli $0 \to A \to B \to C \to 0$ jest ciągiem dokładnym sk. gen. grup abelowych, to $rk(B) = rk(A) + rk(C)$. [bez dowodu]

<u>Dowód Twierdzenia:</u>

Rozważmy kompleks łańcuchowy komórkowy dla X:

$$\to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to$$

i niech $Z_n = \ker d_n$ - cykle, $B_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$ - brzegi, $H_n = Z_n / B_n$.

* Mamy $c_n = rk(C_n)$ bo $C_n \cong \mathbb{Z}^{c_n}$.

* Mamy ciągi dokładne:

$$0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$$

$$0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0$$

Skąd
$$rk(C_n) = rk(Z_n) + rk(B_{n-1})$$
$$rk(Z_n) = rk(B_n) + rk(H_n)$$

a więc
$$rk(C_n) = rk(B_n) + rk(B_{n-1}) + rk(H_n).$$

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n c_n = \sum_n (-1)^n \operatorname{rk}(C_n) = \sum_{n=0}^{\dim X} (-1)^n \operatorname{rk}(C_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\dim X} (-1)^n \left[\operatorname{rk}(B_n) + \operatorname{rk}(B_{n-1}) + \operatorname{rk}(H_n)\right] =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\dim X} (-1)^n \operatorname{rk}(H_n)\right] + \underbrace{\operatorname{rk}(B_{-1})}_{= 0} + (-1)^{\dim X} \underbrace{\operatorname{rk}(B_{\dim X})}_{= 0} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\dim X} (-1)^n \operatorname{rk}(H_n) = \sum_n (-1)^n \operatorname{rk}(H_n). \qquad \square$$

PRZYKŁADY. $\chi(M_g) = 2 - 2g$; $\chi(N_g) = 2 - g$.

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n \text{ parzyste} \\ 0 & n \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$

UWAGA. Dla rozmaitości (zamkniętej) M^d nieparzystego wymiaru d mamy $\chi(M^d)=0$

SZKIC DOWODU:

Rozważmy triangulację M (traktowaną jako strukturę komórkową) i jej parametry $c_k : 0 \leq k \leq d$ (liczba k-komórek).

Rozważmy dualne rozbicie komórkowe rozmaitości M z parametrami $\tilde{c}_k : 0 \leq k \leq d$

Wówczas $\forall k \quad \tilde{c}_k = c_{d-k}$.

Stąd

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \tilde{c}_k = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k c_{d-k} =$$

$$= - \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} c_{d-k} = - \sum_{j=0}^{d} (-1)^j c_j = -\chi(M).$$

Zatem $\chi(M)=0$. $\square$