CIĄG MAYERA-VIETORISA

TW. Jeśli X jest sumą wnętrz podprzestrzeni A, B to mamy ciąg dokładny (Mayera-Vietorisa)

$$\to H_n(A\cap B) \xrightarrow{\Phi} H_nA \oplus H_nB \xrightarrow{\Psi} H_nX \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A\cap B) \to \dots$$

$$\to H_0X \to 0$$

gdzie $\Phi(x) = [(i_{A\cap B\subset A})_*(x), -(i_{A\cap B\subset B})_*(x)]$

$$\Psi(x,y) = (i_{A\subset X})_*(x) + (i_{B\subset X})_*(y)$$

$$\begin{tikzcd} \partial: H_nX \arrow[r, "j_*"'] \arrow[rrr, bend right] & H_n(X,B) \arrow[r, "exc"'] & H_n(A, A\cap B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(A\cap B) \end{tikzcd}$$

dowód:

Przypomnijmy: $C_*(A+B)$ to łańcuchy singularne o sympleksach zawartych w pokryciu $\mathcal{U} = \{A, B\}$;

$$H_*(C_*(A+B)) = H_*X$$

Mamy krótki ciąg dokładny kompleksów łańcuchowych

$$0 \to C_*(A\cap B) \xrightarrow{\varphi} C_*A \oplus C_*B \xrightarrow{\psi} C_*(A+B) \to 0$$

$$\varphi(x) = (x, -x), \quad \psi(x,y) = x+y.$$

Indukuje on długi ciąg dokładny homologii

$$\begin{tikzcd} \to H_*(A\cap B) \arrow[r, "\varphi_*"] & H_*(C_*A \oplus C_*B) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & H_*(A+B) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & H_{*-1}(A\cap B) \to \dots \\ & H_*A \oplus H_*B & H_*X & \end{tikzcd}$$

gdzie $\varphi_* = \Phi$, $\psi_* = \Psi$.

Interpretacja brzegowania

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\arrow[r] & C_n(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1}(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\partial x"] & {} \\
\arrow[r] & C_nA\oplus C_nB \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1}A\oplus C_{n-1}B \arrow[r] \arrow[u, shift left] \arrow[d, "(\partial x,\partial y)"] & {} \\
\arrow[r] & C_n(A+B) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, bend left] & C_{n+1}(A+B) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$(x,y)\in$, $z\in$

$(\partial x,\partial y)$ — gdzie $\partial x = -\partial y$ bo $\partial(x+y)=0$

z - cykl w $C_n(A+B)$, $z=x+y$: $x\in C_nA$, $y\in C_nB$

Zatem $\partial[z]=[\partial x]$

przy czym $[x]\to[\partial x]$ jest brzegowaniem w ciągu pary $(A, A\cap B)$

zaś $[z]\to[x]$ jest włożeniem $H_*X \xrightarrow{j_*} H_*(X,B)$

wraz z wycięciem $H_*(X,B)\to H_*(A, A\cap B)$. $\square$

UWAGA 1.

Jeśli $A\cup B=X$, $A\subset U$, $B\subset V$, $A\cap B\subset U\cap V$ deformacyjne retrakty

to istnieje ciąg Mayera-Vietorisa dla A, B

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H_nA\oplus H_nB \arrow[r, "\partial^{AB}"] \arrow[d, "i"', "\cong"] & H_nX \arrow[r] \arrow[dr] & H_{n-1}A\cap B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}A\oplus H_{n-1}B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & {} \\
\arrow[r] & H_nU\oplus H_nV \arrow[ur, "\partial^{UV}"'] & & H_{n-1}U\cap V \arrow[r] & H_{n-1}U\oplus H_{n-1}V \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$\partial^{AB}=\partial^{UV}\circ i$$

Tak jest np dla CW-kompleksu X, i CW-podkompleksów A, B.

UWAGA 2.

Istnieje analogiczny ciąg Mayera-Vietorisa (na tych samych założeniach) dla homologii zredukowanych.

$$\to \tilde{H}_n(A\cap B) \to \tilde{H}_n A \oplus \tilde{H}_n B \to \tilde{H}_n X \to \tilde{H}_{n-1}(A\cap B) \to$$

$$\dots \to \tilde{H}_0 X \to 0 \quad . \ \square$$