JĘZYK ALGEBRY HOMOLOGICZNEJ

kompleks łańcuchowy A

$$\dots \to A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \to \dots \to A_1 \xrightarrow{\partial_1} A_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}, \quad \partial^2 = 0$$

PRZYKŁADY:

1. $A_k = C_k X$, $k \geq 0$, $\partial_0 = 0$ — kompleks łańcuchów singularnych przestrzeni X

2. $A_k = C_k X$, $k \geq 0$, $\bar{\partial}_0 = \varepsilon$, $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$

   zredukowany kompleks łańcuchów singularnych

   (trzeba zweryfikować, że $\bar{\partial}_0 \partial_1 : C_1 X \to \mathbb{Z}$ jest zerowe; ćw.)

3. $A \subset X$, relatywny kompleks łańcuchowy
   - $A_k = C_k X / C_k A$
   - $\partial_k^{rel} : C_k X / C_k A \to C_{k-1} X / C_{k-1} A$ indukowany przez $\partial_k : C_k X \to C_{k-1} X$

     oraz $\partial_k : C_k A \to C_{k-1} A$; $\partial_0^{rel} = 0$

   (trzeba sprawdzić, że $\partial_{k-1}^{rel} \partial_k^{rel} = 0$; proste ćwiczenie)

homologie kompleksu łańcuchowego A: $H_n(A) := \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$

w szczególności:

- $\tilde{H}_n X$ – homologie zredukowane przestrzeni X

  to homologie zredukowanego kompleksu singularnego jak w p. 2

- $H(X, A)$ – homologie relatywne pary $A \subset X$, to homologie kompleksu łańcuchowego $C_k(X, A)$

  UWAGA/ĆWICZENIE. Homologie relatywne można równoważnie określić tak:

  (1) relatywny n-cykl to łańcuch $c \in C_n X$ taki, że $\partial c \in C_n A \subset C_n X$

  (2) dwa relatywne n-cykle c_1, c_2 indukują tę samą klasę w $H_n(X, A)$

  gdy $c_1 - c_2 = \partial b + a$ gdzie $b \in C_{n+1} X$, $a \in C_n A \subset C_n X$

  (takie relatywne cykle są relatywnie homologiczne) odwzorowanie łańcuchowe $f: A \to B$ kompleksów łańcuchowych, $f = (f_n)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial"] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial"] & A_0 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_0"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "f_{-1}"] \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial"] & B_n \arrow[r, "\partial"] & B_{n-1} \arrow[r, "\partial"] & \cdots \arrow[r, "\partial"] & B_0 \arrow[r, "\partial"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$\forall n \geq 0 \quad \partial f_n = f_{n-1} \partial$ [diagram komutuje]

PRZYKŁADY.

① Rodzina $f_\#: C_nX \to C_nY$ dla $n \geq 0$, gdzie $f: X \to Y$ ciągłe, stanowi odwzorowanie łańcuchowe, bo $f_\# \partial = \partial f_\#$.
W szczególności, dla $A \subset X$ i dla inkluzji $i: A \to X$ mamy odwzorowanie łańcuchowe $i_\#: C_nA \to C_nX$.

② Odwzorowanie ilorazowe $j: C_n(X,A) \to C_nX$

$$C_n(X,A) = C_nX / C_nA$$

stanowią odwzorowanie łańcuchowe (prawie oczywiste ćwiczenie).

FAKT 1. Odwzorowanie łańcuchowe $f: A \to B$ indukuje homomorfizmy grup homologii $f_* = H_nf : H_n(A) \to H_n(B)$

Dowód: taki sam jak dla $f_\#: C_nX \to C_nY$. □

PRZYKŁAD. Mamy naturalne $j_*: H_nX \to H_n(X,A)$ indukowane przez ilorazowe $j: C_nX \to C_n(X,A)$.

UWAGA. Gdy $c \in \ker \partial_n$ reprezentuje klasę $[c] \in H_nA = \ker\partial_n / \operatorname{im}\partial_{n+1}$ to zachodzi

$$\underbrace{H_nf([c])}_{= f_*([c])} = [f(c)].$$

homotopia łańcuchowa

odwzorowań łańcuchowych $f, g : A \to B$

to homomorfizmy $F : A_* \to B_{*+1}$ $(F_n : A_n \to B_{n+1})$ takie, że

$$\partial F = g - f - F\partial .$$

PRZYKŁAD. Dla ciągłych $\varphi, \psi : X \to Y$ homotopijnych przez $H : X \times I \to Y$ $(H(\cdot,1) = \psi,\ H(\cdot,0) = \varphi)$ i dla operatora pryzmy $P : C_* X \to C_{*+1}(X \times I)$ złożenie $H_\# \circ P$ jest homotopią łańcuchową odwzorowań łańcuchowych $\varphi_\#, \psi_\# : C_* X \to C_* Y$, bo zachodzi

$$\partial H_\# P = \psi_\# - \varphi_\# - H_\# P \partial .$$

FAKT 2 Odwzorowania łańcuchowe $f, g : A \to B$ dla których istnieje homotopia łańcuchowa (łańcuchowo homotopijne) indukują identyczne homomorfizmy homologii : $\forall n \geq 0\ H_n f = H_n g$.

Dowód: jeśli $c \in \ker \partial_n$ (spełniający $\partial_n c = 0$) reprezentuje klasę homologii $[c] \in \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1} = H_n A$ to zachodzi

$$g_*([c]) - f_*([c]) = H_n g([c]) - H_n f([c]) =$$
$$= [g(c)] - [f(c)] = [g(c) - f(c)] =$$
$$= [\partial F(c) + F\partial c] = \underbrace{[\partial F(c)]}_{=0} + \underbrace{[F\partial c]}_{=0} = 0$$

bo elementy z $\operatorname{im} \partial_{n+1}$ indukują zerowe elementy w $H_n A$

bo $\partial c = 0$ więc $F\partial c = 0$

$\square$

CIĄGI ~~DOKŁ~~ DOKŁADNE

2pre

<u>Definicja</u> Ciąg homomorfizmów grup abelowych (skończony lub nieskończony)

$$\dots \to A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \dots$$

nazywamy <u>dokładnym</u> gdy $\forall n \quad \ker \alpha_n = \operatorname{im} \alpha_{n+1}$

UWAGI.

(1) Jeśli ciąg j.w. jest określony dla $n \geq 0$ (oraz $A_{-1} = \mathbb{Z}$)
to inkluzja $\operatorname{im} \alpha_{n+1} \subset \ker \alpha_n$ jest równoważna równości
$\alpha_n \alpha_{n+1} = 0$, i wtedy mamy kompleks łańcuchowy.

Gdy ponadto $\ker \alpha_n \subset \operatorname{im} \alpha_{n+1}$,
oznacza to że homologie $H_n A = 0$.

Homologie $H_n A$ można więc traktować jako miarę odstępstwa
kompleksu łańcuchowego A od bycia ciągiem dokładnym.

(2)

(i) ciąg $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ jest dokładny $\Leftrightarrow \ker \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha$ injektywny

(ii) ciąg $A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ jest dokładny $\Leftrightarrow \operatorname{im} \alpha = B \Leftrightarrow \alpha$ surjektywny

(iii) $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ jest dokładny $\Leftrightarrow \alpha$ jest izomorfizmem

(iv) $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ jest dokładny $\Leftrightarrow$

α injektywny, β surjektywny oraz $\ker \beta = \operatorname{im} \alpha \Leftrightarrow$

β indukuje izomorfizm $C \approx B / \operatorname{im} \alpha$

(gdy injekcję $A \xrightarrow{\alpha} B$ traktujemy jak inkluzję, możemy
napisać $C \approx B/A$).

Krótki ciąg dokładny kompleksów łańcuchowych $0 \to A \to B \to C \to 0$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

- Komutuje [$i: A \to B$, $j: B \to C$ odwzorowania łańcuchowe]
- Kolumny są dokładne

PRZYKŁAD. $Y \subset X$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C_n Y & \to & C_n X & \to & C_n(X,Y) & \to & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & A_n & & B_n & & C_n & & \end{array}$$

dokładny z def.

krótki ciąg dokładny kompleksów łańcuchowych pary (X,Y).

TWIERDZENIE. Krótki ciąg dokładny $0 \to A \to B \to C \to 0$ kompleksów łańcuchowych wyznacza długi ciąg dokładny grup homologii

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \to \cdots$$

UWAGA: homomorfizmy $\partial : H_*(C) \to H_{*-1}(A)$ za chwilę zdefiniujemy abstrakcyjnie (w pełnej ogólności kompleksów łańcuchowych jw.)

PRZYKŁAD. Krótki ciąg dokładny $0 \to C_* Y \xrightarrow{i} C_* X \xrightarrow{j} C_*(X,Y) \to 0$ wyznacza ~~się~~ d. ciąg dokładny pary

$$\to H_n Y \xrightarrow{i_*} H_n X \xrightarrow{j_*} H_n(X,Y) \xrightarrow{\partial} H_{n-1} Y \xrightarrow{i_*} H_{n-1} X \to \cdots$$

[abstrakcyjny algebraiczny homomorfizm $\partial : H_n(X,Y) \to H_{n-1} Y$ zinterpretujemy w naturalny geometryczny sposób]

<u>Homomorfizm(y) łączące</u> $H_*(C) \xrightarrow{\partial} H_{*-1}(A)$ $\left[H_n(C) \to H_{n-1}(A)\right]$

$\bar{a}$ $\quad b'$

$$\begin{tikzcd} & a \in A_{n-1} \arrow[d, "i"] \\ b \in B_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & \partial b \in B_{n-1} \\ c \in C_n \arrow[d] & \\ 0 & \end{tikzcd}$$

- niech $c \in C_n$ cykl, czyli $\partial c = 0$
- z dokładności kolumny, $c = j(b)$ dla pewnego $b \in B_n$
- $j(\partial b) = 0$ bo $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$
- z dokładności poprzedniej kolumny,

  $\partial b = i(a)$ dla pewnego $a \in A_{n-1}$

- FAKT. a jest cyklem, czyli $\partial a = 0$.

  <u>dowód</u>: * $i: A_{n-2} \to B_{n-2}$ jest injekcją

  bo $0 \to A_{n-2} \to B_{n-2}$ dokładny

  * wystarczy pokazać że $i(\partial a) = 0$
  * $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial \partial b = \partial^2 b = 0$. $\square$

- FAKT. Klasa homologii $[a] \in H_{n-1}(A)$ zależy tylko od klasy homologii $[c] \in H_n(C)$.

  <u>dowód</u>: * z injektywności $A_{n-1} \xrightarrow{i} B_{n-1}$ a jest jednoznacznie wyznaczone przez ∂b

  * - dla b' takiego że $j(b') = c$

    z dokładności kolumny $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$

    mamy $b' - b = i(\bar{a})$ dla pewnego $\bar{a} \in A_n$;

  * - mamy $\partial b' = \partial b + \partial i(\bar{a}) = i(a) + i(\partial \bar{a}) =$

    $= i(a + \partial \bar{a})$;

  * - zatem a' dla b' to $a' = a + \partial \bar{a}$

    no i mamy $[a] = [a'] \in H_{n-1}(A)$.

  * - jeśli w klasie homologii $[c]$ bierzemy innego reprezentanta c' (t.że $[c'] = [c]$)

    to $c' = c + \partial e$ dla pewnego $e \in C_{n+1}$

  - mamy $e = j(f)$ dla pewnego $f \in B_{n+1}$

    (z dokładności $B_{n+1} \to C_{n+1} \to 0$)

  - wtedy $c' = c + \partial e = j(b) + \partial j(f) = j(b) + j(\partial f) = j(b + \partial f)$

    więc za b': $j(b') = c'$ można wziąć $b' = b + \partial f$

- wtedy mamy $\overset{a'}{=} \partial b' = \partial(b+\partial f) = \partial b + \partial^2 f = \partial b = a$
a więc odpowiednie a pozostaje nie zmienione. $\square$

• DEFINIUJEMY
$\partial[c] = [a]$.

TRZEBA JESZCZE POKAZAĆ HOMOMORFICZNOŚĆ

PRZYKŁAD. Homomorfizm Łączący $H_n(X,Y) \xrightarrow{\partial} H_{n-1} Y$

$c \in C_n(X,Y)$ cykl relatywny

$b \in C_n X$ łańcuch reprezentujący cykl c

$[c = b + C_n Y$ - warstwa$]$

$\partial b \in C_{n-1} X$

$\partial b = i(a)$ dla $a \in C_{n-1} Y$

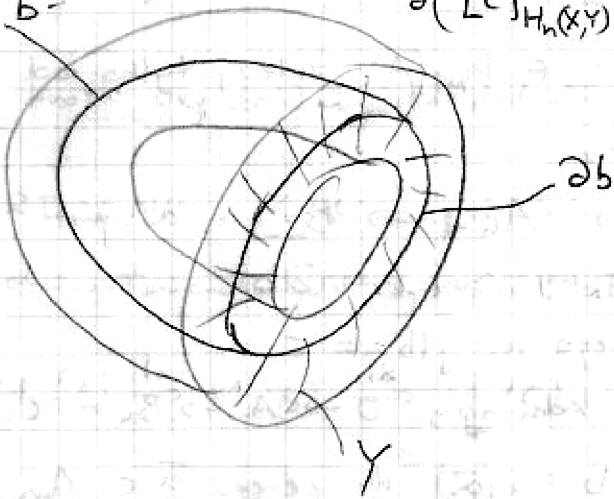
ale $i : C_{n-1} Y \to C_{n-1} X$ jest identycznościowym włożeniem

więc de facto $\partial b \in C_{n-1} Y$ i w dodatku jest cyklem } to można też uzasadnić bezpośrednio

Homomorfizm Łączący $\partial([c]) = [\partial b]$

$$\partial([c]_{H_n(X,Y)}) = [\partial b]_{H_{n-1} Y}$$

$b =$



$[j(b)] \longmapsto [\partial b]$

DOWÓD TWIERDZENIA

[dokładność indukowanego długiego ciągu homologii

$$\ldots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \to \ldots]$$

Jest 6 inkluzji do sprawdzenia:

* $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} j_*$. Mamy $ji = 0$, więc $j_* i_* = 0$

 skąd inkluzja. □

* $\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$. Wystarczy pokazać $\partial \circ j_* = 0$.

 Niech $\bar{b} \in B_n$ będzie cyklem, i niech $c = j(\bar{b})$.
 Wtedy w definicji homomorfizmu łączącego dla c możemy wziąć $b = \bar{b}$
 i wtedy $\partial b = \partial \bar{b} = 0$, zatem $a = 0$, skąd $[a] = 0$.
 Zatem $\partial j_*([\bar{b}]) = [a] = 0$

$$\begin{aligned} &\partial j_*([\bar{b}]) = [a] = 0 \\ &\quad \| \\ &\partial([j(\bar{b})]) \\ &\quad \| \\ &\partial([c]) = [a] \end{aligned}$$
□

* $\operatorname{Im} \partial \subset \operatorname{Ker} i_*$. Niech $[c] \in H_n(C)$.

 Z def. homomorfizmu łączącego mamy

 $i_* \partial([c]) = i_*([a]) = [\partial b] = 0$, czyli $i_* \partial = 0$, skąd inkluzja. □

* $\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$.

- Klasa homologii w $\operatorname{Ker} j_*$ jest reprezentowana przez cykl $b \in B_n$ taki, że $j(b)$ jest brzegiem, czyli $j(b) = \partial c'$ dla pewnego $c' \in C_{n+1}$.
- Ponieważ j jest surjekcją, $c' = j(b')$ dla pewnego $b' \in B_{n+1}$
- Mamy $j(b - \partial b') = j(b) - j(\partial b') = j(b) - \partial j(b') = j(b) - \partial c' = 0$
- Zatem $b - \partial b' = i(a)$ dla pewnego $a \in A_n$. Ponadto a jest cyklem, bo $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0$, zaś i jest injekcją.
- Więc $i_*([a]) = [b - \partial b'] = [b]$, czyli

 $[b] \in \operatorname{Im} i_*$. □

Ker $\partial \subset \operatorname{Im} j_*$. W oznaczeniach z definicji homomorfizmu łączącego ∂, jeśli c reprezentuje klasę homologii z Ker ∂ to $a = \partial a'$ dla pewnego $a' \in A_n$. Element $b - i(a')$ jest cyklem bo

$$\partial(b - i(a')) = \partial b - \partial i(a') = \partial b - i(\partial a') = \partial b - i(a) = 0.$$

Ponadto $j(b - i(a')) = j(b) - ji(a') = j(b) = c$, więc j_* odwzorowuje $[b - i(a')]$ na $[c]$.

Ker $i_* \subset \operatorname{Im} \partial$. Mając dany cykl $a \in A_{n-1}$, z $[a] \in \operatorname{Ker} i_*$, czyli taki że $i(a) = \partial b$ dla pewnego $b \in B_n$, otrzymujemy że $j(b)$ jest cyklem w C_n, bo $\partial j(b) = j(\partial b) = ji(a) = 0$. Ale wtedy, zgodnie z definicją homomorfizmu łączącego, mamy

$$\partial[j(b)] = [a]. \quad \square$$