ORIENTACJA n-SYMPLEKSU I INDUKOWANA ORIENTACJA jego (n-1)-ŚCIAN

- dowolne permutacje σ wierzchołków sympleksu Δ^n rozszerza się jednoznacznie do liniowego izomorfizmu $\sigma : \Delta^n \to \Delta^n$

(to samo oznaczenie σ)

- takie σ jest singularnym cyklem relatywnym w $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$
(bo $\partial\sigma \in C_{n-1}\partial\Delta^n$)

ĆWICZENIE/ZADANIE.
- Indukcyjnie względem wymiaru n
(z użyciem ciągów dokładnych par, itp) dowodzimy:

LEMAT. ① $\forall n \geq 1$ klasa homologii $[\sigma] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ jest generatorem tej grupy (izomorficznej z $\mathbb{Z}$).

② Jeśli permutacje σ_1, σ_2 mają różne parzystości, to $[\sigma_1] = -[\sigma_2] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

[W konsekwencji, permutacje σ_1, σ_2 tej samej parzystości wyznaczają ten sam generator $[\sigma_1] = [\sigma_2] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.]

- Orientację sympleksu Δ^n (jako n-dysku) możemy zatem utożsamić z uporządkowaniem jego wierzchołków z dokładnością do permutacji parzystych.

INDUKOWANIE ORIENTACJI NA ŚCIANY.

$\Delta^n = [e_0, \dots, e_n]$

Jeśli orientacja na Δ^n jest zadana przez uporządkowanie $(e_{\sigma(0)}, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, gdzie σ jest permutacją zbioru $\{0, 1, \dots, n\}$

to indukowana orientacja na ścianie

$[e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}]$ jest zadana przez

uporządkowanie $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$

ćw (1) To określenie pozwala wyznaczyć indukowane orientacje na wszystkich $(n-1)$-ścianach sympleksu Δ^n, i jest jednoznaczne (nie zależy od zmodyfikowania σ o permutację parzystą).

(2) $\underline{n \geq 2}$ Δ^{n-1}_α - ściana w Δ^n

$$\begin{tikzcd} H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] & H_{n-1}\partial\Delta^n \arrow[r, "j_*", "\cong"'] & H_{n-1}(\partial\Delta^n, \partial\Delta^n \setminus \mathrm{int}\, \Delta^{n-1}_\alpha) \\ & & H_{n-1}(\Delta^{n-1}_\alpha, \partial\Delta^{n-1}_\alpha) \arrow[u, "\cong\ \text{odpowiednie ilorazów}", "i_*"'] \end{tikzcd}$$

Powyżej określone indukowanie orientacji jest zgodne z homomorfizmem złożonym $i_*^{-1} j_* \partial$

($i_*^{-1} j_* \partial$ przeprowadza generator $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ odpowiadający wyjściowej orientacji na Δ^n na generator grupy $H_{n-1}(\Delta^{n-1}_\alpha, \partial\Delta^{n-1}_\alpha)$ odpowiadający orientacji indukowanej).

S3

- Jeśli sympleks Δ^n potraktujemy jako CW-kompleks (w ten sposób, że k-wymiarowymi komórkami będą jego k-wymiarowe ściany) to powyższy sposób indukowania orientacji z Δ^n na ściany Δ^{n-1}_α ma następującą własność:

  - wybierając dowolnie orientacje dla wszystkich komórek w CW-kompleksie Δ^n, współczynniki incydencji dla pary $\Delta^n, \Delta^{n-1}_\alpha$ (ozn. $i_{\Delta^n,\Delta^{n-1}_\alpha}$) wynosi

$$i_{\Delta^n,\Delta^{n-1}_\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{gdy wybrana orientacja na } \Delta^{n-1}_\alpha \text{ jest zgodna z orientacją indukowaną z wybranej orientacji na } \Delta^n \\ -1 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

BEZPOŚREDNIA WERYFIKACJA - ĆWICZENIE

Kompleks symplicjalny (abstrakcyjny) to para

$\mathcal{X} = (V, S)$, gdzie V to zbiór - zwany zbiorem wierzchołków $\mathcal{X}$,

zaś S to rodzina skończonych niepustych podzbiorów V,

zwanych sympleksami $\mathcal{X}$, takie że

(1) jeśli $\sigma \in S$ oraz $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$, to $\tau \in S$

[zamkniętość na niepuste podzbiory]

(2) każdy $v \in V$ należy do conajmniej jednego $\sigma \in S$.

Geometryczna realizacja kompleksu symplicjalnego $\mathcal{X} = (V, S)$.

Jest to przestrzeń topologiczna $X = |\mathcal{X}|$ opisana następująco:

- dla każdego $\sigma \in S$, $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$, rozważmy sympleks $\Delta_\sigma = \Delta^k_\sigma$, którego wierzchołki utożsamiamy z elementami $v_0, \dots, v_k$
- dla $\tau \subset \sigma$ rozważmy odwzorowanie $i_{\tau\sigma} : \Delta_\tau \to \Delta_\sigma$

  opisane następująco:

  jeśli $\{v_0, \dots, v_m\}$ to wierzchołki Δ_τ, które są zarazem wierzchołkami Δ_σ

  to $i_{\tau\sigma}\left(\sum_{i=0}^{m} t_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{m} t_i v_i \in \Delta_\sigma$

  [liniowe włożenie Δ_τ na odpowiednią ścianę w Δ_σ]

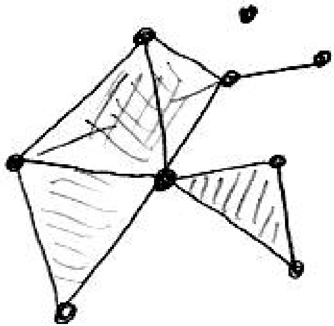
- $X = \bigsqcup_{\sigma \in S} \Delta_\sigma \big/ \sim$ [z topologią ilorazową]

  gdzie $\sim$ jest relacją indukowaną przez

  równoważności $x \sim i_{\tau\sigma}(x) : x \in \Delta_\tau, \tau \subset \sigma \in S$

UWAGI. Zbiór V identyfikuje się w naturalny sposób z podzbiorem w X. Dla każdego $\sigma \in S$, Δ_σ zanurza się w X przez odwzorowanie ilorazowe (homeomorficznie na obraz) i jego obraz też oznaczamy przez $\Delta_\sigma \subset X$.

PRZYKŁAD



UWAGI. ① 1-szkielet X^1 kompleksu symplicjalnego jest grafem (bez krawędzi wielokrotnych, i bez pętli).

② Podzbiór zbioru wierzchołków rozpina co najwyżej jeden sympleks. Stąd możemy mówić o sympleksie <u>rozpiętym</u> przez zbiór swoich wierzchołków.

• $X = |\mathcal{K}|$ może być zinterpretowany jako CW-kompleks:

- $X^0 = V$, $X^k = \bigcup \{\Delta_\sigma : \dim \Delta_\sigma \le k\}$,
- komórki to sympleksy Δ_σ
- gdy $\Delta_\sigma \subset X$, $\dim \Delta_\sigma = k+1$, odwzorowanie charakterystyczne

  $\varphi_\sigma : \partial\Delta_\sigma \to X^k$ jest obcięciem (do $\partial\Delta_\sigma$) naturalnego

  włożenia Δ_σ w X (którego obraz ląduje w X^k).

UWAGA. Odwzorowanie charakterystyczne φ_σ jest homeomorfizmem (a nawet izomorfizmem) na podkompleks w X^k będący sumą komórek Δ_τ: $\tau \subset \sigma$, $\dim \Delta_\tau = k$.

Z tego powodu, jeśli ustalimy orientacje w Δ_σ i Δ_τ, otrzymamy że współczynnik incydencji $i_{\Delta_\sigma, \Delta_\tau} \in \{-1, +1\}$.

Dokładniej, zachodzi następujący fakt (ĆWICZENIE):

FAKT. Współczynnik incydencji $i_{\Delta_\sigma, \Delta_\tau}$ wynosi $+1$ dokładnie wtedy, gdy wybrana orientacja ściany Δ_τ pokrywa się z orientacją indukowaną z Δ_σ, natomiast $i_{\Delta_\sigma, \Delta_\tau} = -1$ w przeciwnym wypadku.

[Współczynniki incydencji w kompleksie symplicjalnym są więc całkowicie jawną czysto kombinatoryczną informacją.]

HOMOLOGIE SYMPLICJALNE kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$

to z definicji

homologie komórkowe jego realizacji geometrycznej $|\mathcal{K}|$

traktowanej jako CW-kompleks

UWAGA. Homologie symplicjalne (skończonego) kompleksu symplicjalnego

są całkowicie jawnie wyliczalne.