

ZADANIA Z TOPOLOGII RÓŻNICZKOWEJ

LISTA 1. Zbiory miary zero na rozmaitościach i twierdzenie Sarda

0. Znajdź funkcję $f : R \rightarrow R$, dla której zbiorem wartości krytycznych jest zbiór liczb wymiernych Q .
1. Uzasadnij, że dla dowolnej krzywej $\gamma : (a, b) \rightarrow R^3$ klasy C^2 , która jest *regularna* (tzn. $\forall t \in (a, b) \gamma'(t) \neq 0$) istnieje płaszczyzna $P \subset R^3$ taka, że rzut prostokątny krzywej γ na P jest nadal krzywą regularną.
2. Uzasadnij, że jeśli $m < p$ to dowolne odwzorowanie klasy C^1 rozmaitości M^m w sferę S^p jest homotopijne z odwzorowaniem stałym.
3. Wyprowadź z twierdzenia Sarda fakt, że jeśli $f : M \rightarrow N$ jest gładkie, oraz $\dim M < \dim N$, to obraz $f(M)$ ma miarę zero w N .
4. Niech $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$ będzie gładkim odwzorowaniem n -wymiarowej zwartej rozmaitości M , i założmy że $0 \notin f(M)$. Pokaż, że istnieje prosta w R^{n+1} przechodząca przez 0, która przecina $f(M)$ w skończenie wielu punktach.
5. Niech X będzie n -wymiarową rozmaitością, $m > 2n + 1$ liczbą naturalną, zaś dla $v \in R^m \setminus \{0\}$ niech π_v będzie rzutem prostokątnym R^m na podprzestrzeń $Ort(v) \subset R^m$ złożoną z wektorów prostopadłych do v .
 - (A) Pokaż, że jeśli $f : X \rightarrow R^m$ jest różnowartościowe klasy C^1 to istnieje $v \in R^m \setminus \{0\}$ takie, że złożenie $\pi_v \circ f : X \rightarrow Ort(v)$ jest różnowartościowe.
Wskazówka: rozważ pomocnicze odwzorowanie $h : \{(p, q) \in X \times X : p \neq q\} \rightarrow RP^{m-1}$ zadane przez $h(p, q) = [f(p) - f(q)] \in RP^{m-1}$.
 - (B) Pokaż, że jeśli $f : X \rightarrow R^m$ jest immersją klasy C^2 to istnieje $v \in R^m \setminus \{0\}$ takie, że złożenie $\pi_v \circ f : X \rightarrow Ort(v)$ jest dalej immersją.
Wskazówka: zdefiniuj i rozważ pomocnicze odwzorowanie

$$g : TX \setminus \{\text{zerowe wektory styczne do } X\} \rightarrow RP^{m-1}$$
 indukowane przez immersję f .
6. Wiadomo, że każdą rozmaitość można zanurzyć w R^N dla dostatecznie dużego N .
 - (A) Korzystając z tego faktu, oraz z punktu (A) poprzedniego zadania uzasadnij, że każdą zwartą rozmaitość n -wymiarową można zanurzyć w R^{2n+1} .
 - (B) Uzasadnij, że każdą rozmaitość n -wymiarową można immersjonować w R^{2n} .
7. *Konturem* rzutu prostokątnego powierzchni $P \subset R^3$ na płaszczyznę $\{z = 0\}$ nazywamy zbiór rzutów tych punktów $x \in P$, dla których płaszczyzna styczna $T_x P$ zawiera wektor $\frac{\partial}{\partial z}$. Uzasadnij, że kontur dowolnej gładkiej powierzchni jest zbiorem miary zero na płaszczyźnie $\{z = 0\}$.
8. Dla gładkiej krzywej $\gamma : R \rightarrow R^2$ rozważmy parametryczną rodzinę krzywych $\gamma_u : u \in R^2$ zadanych przez $\gamma_u(t) = \gamma(t) + u \cdot t$. Uzasadnij, że istnieją u dowolnie bliskie $(0, 0)$ takie, że krzywa γ_u jest regularna.
9. Dla funkcji $f : R \rightarrow R$ rozważmy rodzinę funkcji $f_u : u = (u_1, u_2) \in R^2$ określonych wzorem $f_u(t) = f(t) + u_1 \cdot t + u_2 \cdot t^2$. Uzasadnij, że istnieją u dowolnie bliskie $(0, 0)$ takie, że funkcja f_u jest tzw. *funkcją Morse'a*, tzn. w każdym punkcie t gdzie $f'_u = 0$ zachodzi $f''_u(t) \neq 0$.
10. Uzasadnij, że nie istnieje gładkie odwzorowanie $f : R^n \rightarrow R^n$ takie, że zbiór $f^{-1}(a)$ jest nieprzeliczalny dla każdego $a \in R^n$.

11. Niech M będzie rozmaitością bez brzegu, zaś K jej właściwym domkniętym podzbiorem. Pokaż, że dla dowolnego otwartego $U \subset M$ zawierającego K istnieje mniejsze otoczenie otwarte V zbioru K w M takie, że

- $\overline{V} \subset U$;
- $\overline{V}$ jest rozmaitością z brzegiem, który jest podrozmaitością w M .

Wskazówka: skonstruuj (albo po prostu rozważ) pomocniczą rzeczywistą funkcję gładką $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $K \subset f^{-1}(1)$ oraz $\text{supp}(f) \subset U$, a następnie rozważ jej wartość regularną z przedziału otwartego $(0, 1)$.