

ZADANIA Z TOPOLOGII RÓŻNICZKOWEJ

LISTA 2. Rozmaitości dżetów

Ćwiczenia.

1. Opisz przestrzeń 0-dżetów $J^0(X, Y)$ oraz postać 0-dżetowego rozszerzenia odwzorowania $f : X \rightarrow Y$.
2. Opisz za pomocą naturalnej parametryzacji przestrzeń $J^k(R, R)$ oraz rozszerzenia $j^k f$ funkcji gładkich $f : R \rightarrow R$. Zrób też to samo dla $J^k(R^n, R)$.
3. Opisz za pomocą naturalnej parametryzacji przestrzeń $J^1(R^n, R^m)$ oraz rozszerzenia $j^1 f$ funkcji $f : R^n \rightarrow R^m$ klasy C^1 .
4. Uzasadnij, że pojęcie rzędu jest dobrze określone dla (a) 1-dżetów oraz (b) k -dżetów dla dowolnego $k \geq 1$.
5. Określ naturalne odwzorowanie $\pi_{k,l} : J^k(X, Y) \rightarrow J^l(X, Y)$ dla $k > l$ i uzasadnij, że jest ono dobrze określone, gładkie, i że jest submersją, a nawet lokalnie trywialnym rozwłóknieniem. Z czym są dyfeomorficzne przeciwobrazy $\pi_{k,l}^{-1}(\sigma)$ (czyli włókna rozwłóknienia $\pi_{k,l}$)?
6. Uzasadnij, że zbiór 1-dżetów rzędu maksymalnego jest otwartym podzbiorem rozmaitości $J^1(X, Y)$. Czy to samo zachodzi dla dowolnego $J^k(X, Y)$?
7. Czy w przestrzeni $J^k(X, Y)_{p,q}$ jest sens mówić o k -dżecie odpowiadającym zerowaniu się wszystkich pochodnych cząstkowych rzędów $\leq k$, tzn. czy taka własność jest niezależna od map?
8. Dla dowolnych rozmaitości X, Y oraz dla dowolnego $k \geq 1$ znajdź gładkie zanurzenie i produktu $X \times Y$ w rozmaitości dżetów $J^k(X, Y)$ takie, że $\pi \circ i = \text{id}_{X \times Y}$ (gdzie $\pi : J^k(X, Y) \rightarrow X \times Y$ to naturalne rzutowanie).
9. Przypomnijmy, że niezależna od map definicja k -styczności w punkcie p orzeka, że dla odwzorowań $f, g : X \rightarrow Y$ takich, że $f(p) = g(p)$ zachodzi
 - (1) $f \approx_1 g$ w p gdy $(df)_p = (dg)_p$, oraz $f \approx_{k+1} g$ w p gdy $df \approx_k dg$ w każdym $v \in T_p X$. Korzystając z tej definicji uzasadnij następującą własność: dla $f, f'' : X \rightarrow Y$ oraz $g, g' : Y \rightarrow Z$, jeśli $f \approx_k f''$ w punkcie p oraz $g \approx g'$ w punkcie $f(p)$, to $gf \approx g'f''$ w punkcie p .

Zadania.

8. Uzasadnij, że dla dowolnego $r \leq \min(n, m)$ zbiór 1-dżetów rzędu r jest podrozmaitością (a) w $J^1(X^n, Y^m)$ (b) w $J^k(X^n, Y^m)$ dla dowolnego k .
9. Rozważmy działanie mnożenia w przestrzeni dżetów $J^k(R^n, R^n)_{0,0}$ (czyli dżetów odwzorowań $f : R^n \rightarrow R^n$ takich, że $f(0) = 0$) indukowane przez składanie gładkich odwzorowań $(R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$.
 - (a) Uzasadnij, że elementy odwracalne w $J^1(R^n, R^n)_{0,0}$ względem tego mnożenia można utożsamić z macierzami z $GL(n, R)$.
 - (b) Uzasadnij, że dla dowolnego k elementy odwracalne w $J^k(R^n, R^n)_{0,0}$ tworzą grupę Liego (tzn. tworzą grupę, stanowią podrozmaitość, zaś działania grupowe mnożenia i odwracania są gładkie).
10. Jak można zanurzyć $J^k(X, Y)$ w $J^l(X, Y)$ dla $1 \leq k < l$? Czy istnieje jakieś kanoniczne zanurzenie?

Charakteryzacje k -styczności (alternatywne definicje k -dżetów)

Niech $\gamma_1, \gamma_2 : R \rightarrow X$ będą gładkimi krzywymi na rozmaitości X . Mówimy, że krzywe te są *funkcyjnie k -styczne* w $t_0 \in R$ jeśli dla dowolnej gładkiej funkcji $h : X \rightarrow R$ różnica funkcji $h \circ \gamma_1 - h \circ \gamma_2 : R \rightarrow R$ ma znikające pochodne rzędów $0 \leq i \leq k$ w t_0 (w szczególności, wartość tej funkcji w t_0 wynosi 0).

11. Uzasadnij, że krzywe γ_1, γ_2 jak wyżej są k -styczne w t_0 wtedy i tylko wtedy gdy są funkcyjnie k -styczne w t_0 .
12. Niech $f, g : X \rightarrow Y$ będą gładkimi odwzorowaniami rozmaitości. Uzasadnij, że odwzorowania te są k -styczne w punkcie $p \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej gładkiej krzywej $\gamma : R \rightarrow X$ takiej, że $\gamma(0) = p$ krzywe $f \circ \gamma$ i $g \circ \gamma$ w Y są funkcyjnie k -styczne w 0.

"Algebraiczna" charakteryzacja k -styczności

Dla $x \in X$ niech $C_x^\infty(X, R)$ oznacza algebrę kielków w punkcie x gładkich funkcji rzeczywistych $X \rightarrow R$. Niech $\mathcal{M}(X, x) \subset C_x^\infty(X, R)$ będzie ideałem kielków tych funkcji, które znikają w x . Niech $\mathcal{M}(X, x)^k$ będzie algebraiczną potęgą ideału $\mathcal{M}(X, x)$, czyli najmniejszą podalgebrą zawierającą iloczyn k elementów z $\mathcal{M}(X, x)$.

13. Uzasadnij, że gładkie odwzorowania $f, g : X \rightarrow Y$ są k -styczne w punkcie $x \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego kielka $\varphi \in C_y^\infty(Y, R)$, gdzie $y = f(x) = g(x) \in Y$, zachodzi $\varphi \circ f - \varphi \circ g \in \mathcal{M}(X, x)^{k+1}$.