

WŁADYSŁAW SZCZOTKA  (Wrocław)

Fenomen Steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej Tematyka

*Dedykuję mojemu Mistrzowi
profesorowi Bolesławowi Kopocińskiemu
w Jego osiemdziesiątą rocznicę urodzin.*

Streszczenie. Niniejszy artykuł przedstawia tematykę *Seminarium Matematyki Stosowanej*, prowadzonego w latach 1948-1960 przez profesora Hugona Steinhausa w Wrocławiu i jest istotnym uzupełnieniem analizy przedstawionej w pracy Szczotki (2018). Tematykę tę ilustrujemy dokładniejszym omówieniem niektórych prac i rezultatów z tej tematyki uzyskanych przez uczestników Seminarium.

2010 Klasyfikacja tematyczna AMS (2010): 01A60; 01A73.

Słowa kluczowe: mathematical societies, mathematics, mathematicians, history of mathematics, Cracow.

1. Wstęp.

Niniejszy artykuł jest drugą częścią opracowania *Fenomen Steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej* [94]. W pierwszej części rozważaliśmy genezę powstania tego Seminarium, jego organizację, formułę oraz przedstawiliśmy listę gości, uczestników i studentów w kolejnych latach. Tutaj omawiamy tematykę problemów rozważanych na tym Seminarium. Podzieliliśmy ją na następujące części: Antropologia (Antropologia taksonomiczna, Antropometria), Językoznawstwo (Lingwistyka, Stenografia), Nauki o ziemi (Geografia, Demografia, Geologia, Archeologia), Leśnictwo i Rolnictwo (Dendrometria, Rolnictwo), Zootechnika, Nauki medyczne (Medycyna, Stomatologia), Technika (Optymalizacja, Niezawodność, Komunikacja, Elektryczność, Architektura, Teoria kolejek), Statystyka, Astronomia, Matematyka, Gry i turnieje, Metody i Instrumenty.

Większość rezultatów osiągniętych przez uczestników seminarium była publikowana w czasopiśmie „Zastosowania Matematyki”, które powstało jako forum dla tematyki rozważanej na Seminarium. W oświadczeniach Redakcji [60] i [61], w pierwszym i szóstym tomie czytamy: *Chcemy ogłaszać osiągnięcia, które powstają ze współpracy matematyka ze specjalistami w innych naukach. Dają one początek innym badaniom, które już owi specjaliści bez pomocy matematyka mogą wykonać na swoim materiale obserwacyjnym, korzystając z nowej metody. Te dalsze prace powinny ukazywać się w czasopismach specjalnych i nie naszym jest zadaniem ich publikowanie. Chcemy ogłaszać jednak wszelkie takie rozprawy, w których metoda matematyczna jest nowa lub też stosowana do takich nauk, do których się zwykle stosuje inne metody.*

2. Antropologia.

2.1. Antropologia taksonomiczna. Jednym z pierwszych problemów antropologii, prezentowanym na Seminarium, było porządkowanie czaszek kopalnych. Narzędziem badawczym były *tablica Czekanowskiego* oraz *diagram Czekanowskiego*, zdefiniowane przez Jana Czekanowskiego w 1909 roku. Tablica Czekanowskiego jest macierzą odległości euklidesowych między klasyfikowanymi obiektami, a diagram powstaje przez zastąpienie odległości obiektami różnej szarości, mającymi lepiej wizualizować uporządkowanie obiektów. Wrocławscy antropolodzy wnieśli to zagadnienie na seminarium z nadzieją na subtelniejsze narzędzia badawcze. W rezultacie powstała *taksonomia wrocławska*, oparta na dendrycie, początkowo zwanym *diagramem Florka*, potem zwanym *dendrytem Florka-Perkala-Lukaszewicza-Steinhaus*. H. Steinhaus w [89, str. 510] pisze

J. Perkal odegrał dużą rolę w odkryciu *taksonomii wrocławskiej*, która wyzyskuje *tablicę Czekanowskiego* przez numeryczną definicję odległości abstrakcyjnej przedmiotów realnych i przez konstrukcję dendrytów rozgałęziających się w tych przedmiotach.

Przy użyciu tej metody rozważano następnie wiele problemów klasyfikacyjnych. Należały do nich (w kolejności zgłoszenia):

- określenie płci na podstawie czaszek lapońskich (H. Steinhaus),
- uporządkowanie czaszek z Ngandong (S. Zubrzycki),
- porównywanie dendrytów rozłącznych zbiorów cech opartych na tych samych czaszkach (S. Zubrzycki),

- klasyfikacja czaszek, określenie rasy ludzkiej, sporządzanie dendrytów narodów świata na tle frakcji poszczególnych grup krwi (J. Łukaszewicz [22]).

S. Zubrzycki przedstawił dendryt 25 czaszek żeńskich na podstawie 6 cech wybranych przez niego i dendryt tychże czaszek na podstawie innych 6 cech, wybranych przez L. Jakowlewę. Przypuszczał, że przy ustalonej liczbie cech i przy ustalonej liczbie indywiduów stosunek długości dendrytu do średniej długości uporządkowania liniowego będzie najmniejszy przy cechach całkowicie zależnych.

Tematyka antropologiczna pojawiła się na seminarium około 35 razy. Wrocławskie środowisko antropologiczne było aktywne zarówno na Seminarium jak również we Wrocławskim Towarzystwie Naukowym. W dniach 27-30 grudnia 1951 r., staraniem Polskiego Towarzystwa Antropologicznego, odbyła się konferencja taksonomiczna. Zgromadziła około 40 osób, w tym statystyków: Wacława Skrzywana z Wrocławia i Mikołaja Olekiewicza z Lublina oraz oczywiście miejscowych matematyków J. Perkala, J. Łukaszewicza i S. Zubrzyckiego z grupy H. Steinhausa. Celem konferencji, jak napisano, było :

- omówienie i przedyskutowanie stosowanych w antropologii polskiej metod taksonomicznych,
- sformułowanie wskazówek dotyczących ich stosowania w przyszłych badaniach.

Przedstawiono pięć następujących metod badawczych porządkowania.

1. Metoda diagramów Czekanowskiego;
2. Metoda dendrytów taksonomii wrocławskiej;
3. Metoda przekrojów korelacyjnych Andrzeja Stołyhwo;
4. Metoda porównywania empirycznych gęstości prawdopodobieństwa Adama Wankego;
5. Metoda morfologiczna określeń indywidualnych Michalskiego.

Zacytujmy szerzej szczegóły dyskusji odnotowane w protokołach. *W związku z porównaniem metod, zauważono ze strony matematyków, że nie ma ogólnie przyjętej definicji typu antropologicznego. Tak więc, metody 1. i 2. mogą wyróżniać skupienia indywiduów jako typy. Metody 3. i 4., różniące się szczegółami, wyróżniają jako typy miejsca nadwyżek, to jest kostki w k -wymiarowej przestrzeni euklidesowej, k oznacza liczbę cech, w których zaobserwowano więcej indywiduów, niż to wynika przy założeniu niezależności cech z ich wykorzystania brzegowych rozkładów.*

Wreszcie metoda 5. przyjmuje tradycyjne definicje typów, często tylko opisowe i klasyfikuje badane indywidua według tych definicji. Zauważono, że przy tego rodzaju badaniach hierarchia cech gra bardzo dużą rolę, tak że w pewnych przypadkach jedna cecha przy metodzie 5. decyduje o klasyfikacji. Stwierdzono, że metody 1. i 2. nadają się raczej do materiałów nielicznych, mogą za to służyć przy większej liczbie cech niż pozostałe metody; te zaś za to nadają się do materiałów licznych. Metody 3. i 4. mogą, przy pewnej modyfikacji, posłużyć do wyróżniania skupień. Metoda 5. jest właściwie kluczem, w którym nie ma dokładnie sprecyzowanego przepisu na oznaczanie. W dyskusji podniesiono (J. Łukasiewicz), że można, przy sprecyzowaniu metody 5., zastosować postępowanie podobne jak w pracy S. Zubrzyckiego o erozji, to znaczy spróbować dopasować ścisły przepis klasyfikacji do określonego materiału empirycznego.

Interesującym zagadnieniem, poruszonym przez J. Czekanowskiego na 200. posiedzeniu Seminarium w dniu 25.10.1954 roku było oszacowanie składu antropologicznego ludności na podstawie średnich sześciu cech antropologicznych. Zagadnienie referowali kolejno: J. Czekanowski, J. Perkal, M. Warmus.

Tematyka antropologiczna zdominowała dwusetne, jubileuszowe posiedzenie Seminarium. Na posiedzeniu tym J. Perkal wygłosił referat: *O badaniach antropologicznych*. Przedstawił swoją pracę z "Przeglądu Antropologicznego" pod tym samym tytułem i omówił zastosowania swojej metody podobieństw, zastosowanej przez Juliana Sołtysiaka do zagadnienia dymorfizmu płciowego i przez Juliana Dębowego do opracowania typologii na materiałach A. Wankego. Dyskusja dotyczyła meritum sprawy, *czym jest podobieństwo biologiczne?* Zabierali głos S. Kulczyński, J. Mydlarski, W. Stęślicka, W. Zonn, H. Kowarzyk, H. Steinhaus, K. Florek, J. Czekanowski, S. Górny, A. Wanke, T. Nowakowski. Wówczas J. Czekanowski sformułował zarzut co do trafności opisu zjawisk biologicznych przy użyciu metody podobieństw sformułowanej przez Perkala. Stwierdził, że J. Dębowy, używając wskaźników Perkala, nie wyróżnił tradycyjnych typów antropologicznych. Metoda nie postrzega tego, co jest znane i to jest jej wadą. Sformułowano postulat, aby *podobieństwo biologiczne* było oparte na *niezmienniku rozwoju osobniczego*. J. Perkal twierdził, że jego wskaźniki spełniają ten warunek, ale dotąd jeszcze tego nie sprawdzono. S. Kulczyński zwrócił uwagę na to, że podobieństwo biologiczne nie jest czymś w rodzaju *wskaźnika geometrycznego*. J. Perkal odpowiedział, że ma to związek z tym, na tle jakiej populacji rozpatruje się podobieństwo. Wprowadzone pojęcie *podobień-*

stwa geometrycznego J. Perkal wyjaśniał później w pracy *O pojęciu podobieństwa ze względu na populacje* [54].

2.2. Antropometria. Z antropometrią związane są problemy wymiarowości człowieka, w szczególności określenie cech, które powinny być mierzone. Określenie tych cech może służyć do sporządzenia składu antropologicznego ludności. Z praktycznego punktu widzenia jest to ważne, np. w przemyśle odzieżowym, dla przygotowania odpowiednich rozmiarów ubrań (marynarki, spodnie, swetry, koszule, buty, kapelusze, itp.) dla różnych grup ludności, tj. przygotowania odpowiednich typów fantomów. Ten praktyczny problem wpłatał się w zagadnienie postawione matematykom przez ministra Przemysłu Lekkiego (przedstawione na posiedzeniu nr 319), jak należy ustawiać produkcję w przemyśle odzieżowym. Grupa przyjęła zamówienie. Realizując program w szczególności badano związek między wiekiem, wzrostem, obwodem klatki piersiowej i rozmachem u ludzi w różnych kategoriach wiekowych. Konkretnie biorąc, dla wyboru odpowiedniego fantomu dla marynarek badano statystycznie, która trójka cech antropometrycznych jest lepsza, czy obwód klatki piersiowej, szerokość pleców i długość pleców, czy obwód pasa, szerokość pleców i długość pleców.

A. Huskowska, odpowiedzialna za badania antropologiczne w przemyśle lekkim, zorganizowała sesje przymierzania różnych części garderoby. Na próbie 195 osobowej przedstawiła porównanie frakcji osób, które mogą sobie dopasować jedną z marynarek łódzkich, z frakcją osób które mogą sobie dobrać jedną z marynarek wyznaczoną metodą H. Steinhausa. Okazało się, że każdą marynarkę łódzką może sobie dobrać 16 osób, a marynarkę Steinhausa 32 osoby. Steinhaus proponował, aby marynarki projektować na podstawie trzech najważniejszych cech, a za ich wartość przyjąć współrzędne środków czternastościanów powstałych przez zgniecenie kul o jednakowej średnicy w ułożeniu najlepiej wypełniającym przestrzeń. Wielkość i położenie czternastościanów w przestrzeni, przy tych trzech najważniejszych cechach należy wybrać tak, aby 23 takie 14-ściany objęły około 95% populacji punktów indywidualnych. H. Steinhaus w [89, str. 451], pisze że A. Huskowska doniosła mu, że Ministerstwo Obrony Narodowej wyraziło podziw dla mundurów uszytych według zdjęcia antropometrycznego Komisji Antropologicznej PAN. Problem wymiarowości ubrań, którym zajmowała się głównie A. Huskowska był poruszany na co najmniej 20 posiedzeniach seminarium. Niestety nie znalazłem żadnego podsumowania w postaci raportu bądź pracy na ten temat w czasopiśmie matematycznym.

Wśród pokrewnych zagadnień były: mapa antropologiczna Polski na

podstawie mappek podających średnie dla 11 cech morfologicznych dla powiatów, etnograficzny atlas Polski, itp.

3. Językoznastwo.

3.1. Lingwistyka. Tematyka lingwistyczna pojawiła się na seminarium około 17 razy. W wyniku tego powstało około 10 prac, w tym 4 prace J. Woronczaka [101] - [103], praca W. Kuraszkiewicza i J. Łukaszewicza [32], 5 prac A. Bartkowiakowej [2] - [5], w tej liczbie jedna wspólna z B. Gleichgewichtem i dwie wspólne z L. Zubrzycką. Dobry przegląd problemów badanych w lingwistyce daje praca [5]. Rozważano w nich częstość występowania w tekstach elementów takich jak: litery, sylaby, zdania podrzędne (A. Bartkowiakowa i inni) oraz szybkość narastania liczby nowych wyrazów w miarę powiększania się długości tekstu (W. Kuraszkiewicz i J. Łukaszewicz [32]). Ponadto badano rozkłady ilości sylab w zdaniach, w wierszach oraz rozkłady długości określeń (liczone w słowach), a także rozkłady liczby zdań złożonych współrzędnie i podrzędnie. A. Bartkowiakowa, badając w pracy [4] liczbę n_0 zdań nadrzędnych i liczbę n_k , k zdań współrzędnych w tym zdaniu nadrzędnym, pokazała że rozkład $p_k = n_k / \sum_j n_j$, $k = 0, 1, 2, \dots$ jest bliski rozkładowi Pólyi. Podobny rozkład otrzymała badając rozkład ilości określeń składających się z jednego słowa, dwóch słów, trzech słów, itd.

A. Bartkowiakowa i B. Gleichewicht w pracy [3] badali rozkład sylab w słowach użytych w utworach M. Reja (Żywot człowieka poczciwego), M. Górnickiego (Dworzanin), B. Prusa (Placówka i Anielka), S. Żeromskiego (Ludzie bezdomni) i S. Lema (Astronauci i Obłok Magellana). Dla każdego autora znaleźli zależność entropii tego rozkładu od średniej rozkładu, otrzymując 5 punktów na płaszczyźnie, związanych z tymi autorami. Najbardziej uderzającym było to, że mimo tekstów o różnej treści, pisanych w różnych czasach, przez różnych autorów, wszystkie punkty układają się prawie dokładnie wzdłuż linii prostej. Podobne badania prowadził W. Fucks na większej liczbie autorów, tekstów i w różnych językach. Punkty, które otrzymał ułożyły się nie wzdłuż prostej, ale wzdłuż pewnej krzywej, zwanej krzywą Fucksą. Okazało się jednakże, że zbiór punktów odpowiadających literaturze polskiej na tym wykresie był prawie liniowy, co potwierdziło wyniki A. Bartkowiakowej.

Numerując wyrazy występujące w pewnym tekście od tych najczęściej występujących do najrzadszych oraz oznaczając częstość r -tego wyrazu w tym uporządkowaniu przez p_r , Mandelbrot zauważył, że związek między rangą r i prawdopodobieństwem p_r daje się opisać przez dwuparametrową rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa postaci $p_r =$

$p(r + \rho)^{-B}$, $r = 1, 2, \dots$. Jest to prawo Zipfa, mówiące, że częstość jest odwrotnie proporcjonalna do rangi. Parametry ρ i B proponuje się używać jako wskaźniki bogactwa słownikowego. Estymację tych parametrów zaproponował J. Woronczak w [102], wykorzystując związek tych parametrów z parametrami funkcji ζ -Riemana.

Definiując dla tekstu kilka wskaźników liczbowych, można obliczać odległości między tekstami oraz tworzyć dendryty dla zbioru tekstów na tle wskaźników. Na tej podstawie A. Bartkowiakowa [2] badała problem ustalania autorstwa tekstu. Podobne metody stosowali J. Woronczak, do badania, np. odległości między szesnastowiecznymi mszałami oraz A. Bartkowiakowa do badania odległości między tekstami M. Reja. J. Perkal używając dendrytów, porównywał kompozytorów, traktując frakcje akordów jako współrzędne kompozytora. Sporządził również dendryt pieśni ludowych, opartych na badaniach Marii, córki J. Czekanowskiego. Osobliwością tego dendrytu było to, że powtarzały się w nim odległości najkrótsze.

Problem odległości między tekstami lub autorami wiąże się z problemem charakterystyki stylu. Pewne liczbowe charakterystyki stylu, oparte na liczbie wystąpień poszczególnych słów w badanym tekście podali G.U. Yule oraz G. Harden (zob. [118]). S. Zubrzycki w [118] podał probabilistyczne wyjaśnienie tego, że wartości liczbowe tych charakterystyk praktycznie nie zależą od wielkości próbki.

3.2. Stenografia. Tematyka stenografii pojawiła się na seminarium około 7 razy. Wprowadził ją na seminarium K. Szuster, nauczyciel stenografii, podając w skrócie historię tego pisma. Postawił trzy zagadnienia: jak przydzielić znaki głoskom, jak przydzielić znaki grupom spółgłosek i jak opracować skróty dla wyrazów. W związku z tą tematyką H. Steinhaus mówił o ankiecie przeprowadzonej wśród stenografów na temat sposobu wykorzystania statystyki języka polskiego do konstrukcji polskiego systemu stenograficznego. Próbę wyznaczenia optymalnego systemu stenograficznego dla języka polskiego podjęła L. Zubrzycka w *O wyznaczaniu systemów stenograficznych* [122].

Wydaje się, że ze stenografią związany jest problem optymalnej klawiatury na maszynie do pisania. Badania te, prawdopodobnie, zostały zapoczątkowane pod wpływem niepublikowanego maszynopisu F. Kotas *Projekt nowej racjonalnej klawiatury* [30], przesłanego H. Steinhausowi. F. Kotas z Cieszyna, był nauczycielem pisania na maszynie. Badania nad klawiaturą podjęła L. Zubrzycka w pracach *Uwagi o statystycznym badaniu struktury języka polskiego dla potrzeb stenografii* [120] i w *O dostosowywaniu klawiatury maszyny do pisania do struktury ję-*

zyka [121]. F. Kotas w swoim projekcie klawiatury formułuje postulaty wiążące układ klawiatury z częstością par znaków sąsiadujących w tekście. L. Zubrzycka zanalizowała postulaty F. Kotas i wprowadziła swoje. Ponadto opisała algorytm, pozwalający skonstruować klawiaturę realizującą te postulaty. Autorzy obu projektów są zgodni, że najważniejszym jest postulat zmaksymalizowania częstości *uderzeń naprzemiennych*. L. Zubrzycka w [121] twierdzi, że w istniejących projektach częstość uderzeń naprzemiennych nie przekracza 69,3%, a w jej projekcie osiąga wartość 79,8%.

4. Nauki o ziemi.

4.1. Geografia. Geografowie z Uniwersytetu Wrocławskiego i Wyższej Szkoły Rolniczej przedstawili wiele problemów praktycznych dotyczących oceny gruntów. Problemy te dotyczyły:

- oceny stopnia zagrożenia erozją obszaru na podstawie jego własności geometrycznych, tzn. tylko na podstawie mapy warstwicowej,
- wskaźnika ukształtowania pionowego terenu (wskaźnika urzeźbienia terenu),
- wskaźnika nachylenia terenu,
- mierzenia długości krzywych,
- wskaźniki pokrycia łąk przez rośliny badanej odmiany,
- bilansu wilgotności i stanu wody w Odrze,
- podziału Polski na rejony ze względu na skład ludności według wieku, rozmieszczenia miast, itp.

Problemy te znalazły rozwiązania w pracach H. Steinhausa, J. Perkala i S. Zubrzyckiego, o czym będzie mowa poniżej.

Problem erozji. był rozważany przez S. Zubrzyckiego w [107], a była to jego praca magisterska. Zagadnienie wyłoniło się z prac Działu Gospodarki Wodnej, Instytutu Uprawy i Nawożenia Gleb nad mapą, która miała by klasyfikować tereny Polski ze względu na zagrożenie erozją. Profesor S. Bac (WSR) postawił pytanie, czy subiektywną ocenę szacunkową można zastąpić prostym wzorem zależnym od kilku danych, które można mierzyć na mapie warstwicowej. W tym celu podzielono pewien urozmaicony teren (mapy w skali 1:25 000 z warstwicami co 10 metrów) na równoboczne trójkąty o boku 2 km, które poddano ocenie trzem niezależnym ekspertom. Oceniali oni współczynnik erozji dla każdego trójkąta, stosując skalę ocen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ocenę 9 dawano trójkątowi najmniej zagrożonemu przez erozję. Dla każdego

trójkąta znaleziono wariancję próbkową ocen trzech ekspertów, a następnie średnią tych wariancji dla wszystkich trójkątów. Okazało się, że jest mniejsza od jedności, co pozwoliło określić empiryczny współczynnik erozji dla trójkąta jako średnią z trzech ocen. Okazało się, że empiryczny współczynnik erozji dobrze charakteryzuje następujące wielkości:

- t - długość wszystkich warstw w decymetrach (mierzył longimetre Steinhausa z siatką kwadratową),
- u - ilość warstw o różnych rzędnych w trójkącie,
- r - zmniejszona o 800 suma rzędnych czterech punktów trójkąta, tj. rzędnych środków trójkątów, powstałych przez podział badanego trójkąta na cztery części prostymi, łączącymi środki jego boków. Wielkość ta obrazuje wysokość trójkąta nad poziom morza.

Wtedy współczynnik erozji v można wyrazić wzorem

$$v = 2,22t - 0,197t^2 + 0,08u + 0,0231u^2 + 0,0118r - 4,61.$$

Wskaźnik ukształtowania pionowego terenu był rozważany przez H. Steinhausa w [69]. Wyrażony jest on w postaci ilorazu $\mu/\sqrt{\Omega}$, gdzie Ω jest polem badanego obszaru, a $\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mu_j$, gdzie μ_j są pewnymi charakterystykami k pionowych przekrojów tego obszaru. Wyliczenie indeksu nie wymaga obliczania odległości poziomych, lecz tylko wypisywania kodów warstw napotykanym na liniale położonym na mapie. Jednostką tej wielkości jest metr do potęgi $-1/2$.

Wskaźnik nachylenia terenu był rozważany przez H. Steinhausa w [68]. Badany teren potraktował jako stożek o kącie nachylenia ϕ i polu podstawy B . Stożek ów przecinał k poziomiami o długościach L_j i odległościach między nimi h . Wtedy tangens kąta nachylenia terenu określił wzorem postaci $\tan(\phi) = (h \sum_{j=1}^k L_j)/B$.

Problemem pomiaru długości krzywych zajmował się H. Steinhaus już w latach 1931 - 1932 i wtedy opublikował z tej tematyki dwie prace w czasopismach geograficznych (zob. [88], str. 5). Tematyka ta powróciła na Seminarium, a odbiciem tego były prace H. Steinhausa w [70] oraz J. Perkala w [52]. Oba autorzy zaproponowali metody szacowania długości krzywej na mapie. Więcej na ten temat piszemy w części dotyczącej *instrumentów* w ostatnim rozdziale.

Wskaźnik pokrycia łąk badał J. Perkał w [49]. Píše, że hodowla zwierząt i uprawa łąk i pastwisk spowodowały dążenie do łatwej i obiektywnej oceny zarośnięcia upraw przez rośliny. Chodzi o to, jaki procent powierzchni łąki zajmują poszczególne trawy. W pracy podaje geometryczne charakteryzacje pięciu wskaźników: ilość kępek danej trawy na

jednostkę pola, średnią wielkość kępki, średni obwód i średnie pole kępki, stosunek pola do długości linii brzegowej, współczynnik wariancji cięciw kępek. W pracy podaje kilka sposobów oceny tych wskaźników przy użyciu prostych pomiarów punktowych, liniowych i powierzchniowych. Do pomiarów skonstruował odpowiednie instrumenty.

Bilans wilgotności. H. Steinhaus zakomunikował o pracy Szmuka, przedstawionej we Wrocławskim Towarzystwie Naukowym, dotyczącej bilansu wilgotności. Z jego obserwacji wynikało, że bilans wilgotności i stan wody na Odrze mają niemal takie same wykresy czasowe z tym, że wykres bilansu wilgotności wyprzedza wykres stanu wody o około jeden miesiąc.

Problem podziału Polski na rejony był rozważany przez B. Kopicńskiego w pracy [23]. Intuicyjny sens zagadnienia jest następujący: na terenie kraju ustawić n obserwatorów (n ustalone) i wyznaczyć obszary obserwacji tak, aby całkowita suma kwadratów odległości od mieszkańców do obserwatorów była minimalna. Do rozwiązania zadania wykorzystano pracę H. Steinhaus [82] o podziale ciała materialnego na części.

Ponadto dyskutowano tematy: jakie błędy mają np. mapy 1:500 000 w porównaniu z mapami 1: 100 000 (zagadnienie L. Pernarowskiego) oraz zagadnienie kształtu wydm.

4.2. Demografia

Problemy związane z demografią wnieśli na Seminarium profesorowie Uniwersytetu Wrocławskiego Wincenty Styś, prawnik, badacz ekonomicznych i społecznych problemów wsi i rolnictwa, oraz Witold Świda, prawnik. Profesor W. Styś, badał zależność między zamożnością rodzin wiejskich, określaną ilością hektarów ziemi, a ilością dzieci i długością okresów czasu między kolejnymi urodzeniami dzieci. Jego asystent przedstawił dane statystyczne dotyczące populacji wsi polskiej związane z badanymi problemami. Na podstawie tych danych K. Florek i S. Zubrzycki podjęli się znalezienia najlepszej funkcji dla przedstawienia liczby dzieci na hektar i liczby dzieci na hektar w zależności od wielkości gospodarstwa.

Kolejnym problemem W. Stysia było porównywanie płodności matek, które dożyły 60 lat z matkami, które w chwili badania mają 35 lat. Dowodził, że te wcześniejsze matki były bardziej płodne. H. Steinhaus zauważył, że kobiety dawniejsze, które weszły do próbki, były biologicznie silniejsze od kobiet dzisiejszych, wchodzących w skład próbki w chwili badania. Można więc zauważyć, że stwierdzoną większą płodność kobiet dawniejszych tłumaczy się selekcją biologiczną. Dla popar-

cia swojej tezy H. Steinhaus zaproponował selekcję biologiczną idącą w kierunku przeciwnym. Mianowicie, wybrać z kobiet dawniejszych próbe kobiet, które zmarły przed 35 rokiem życia i porównać je z dzisiejszymi 35 latkami.

Inny typ badań prowadził prof. W. Świda. Przedstawił statystykę przestępczości w powiecie kaliskim przed wojną i po wojnie.

W związku z badaniami GUS zauważono pewne nieprawidłowości przy zapisywaniu dat urodzonych dzieci. S. Zubrzycki mówił o potrzebie wyeliminowania wpływu początku roku kalendarzowego na datę urodzin. Mówiono również o typowym miesiącu i typowym dniu urodzin dzieci.

4.3. Geologia

S. Zubrzycki w [109] wspomina, że współpraca matematyków wrocławskich z geologami zaczęła się, gdy zaproszony z inicjatywy H. Steinhausza przez Wrocławski Oddział Polskiego Towarzystwa Matematycznego prof. A. Trembecki z Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie wygłosił w czerwcu 1952 r. odczyt o metodach szacowania złóż. Jesienią tego roku nawiązano współpracę między Katedrą Geologii Kopalnianej AGH, kierowaną przez prof. Romana Krajewskiego, a grupą H. Steinhausza. R. Krajewski zreferował aktualny stan wspomnianego zagadnienia, zorganizował wycieczki do kopalni dla matematyków, wystarał się o materiały obserwacyjne (mapki), załatwił z PAN fundusze na badania wpływu gęstości robót poszukiwawczych i częstości poboru prób na stopień zbadania złóż. Umowy o dzieło mieli otrzymać między innymi S. Zubrzycki, F. Szczotka i J. Battek. Na Seminarium rozważano zagadnienia: szacowanie złóż, siatki wierceń oraz model złóż osadowych.

Problemem szacowania cechy złoża charakteryzującej miąższość, zawartość kruszcu i zawartości szkodliwych domieszek zajął się S. Zubrzycki w [109], będącej jego pracą habilitacyjną. Obliczenia związane z zebrany materiałem dokonała grupa statystyczna (J. Battek, M. Kuśiakowa, F. Szczotka, J. Włoka, L. Zubrzycka) pod kierunkiem J. Perkala i S. Zubrzyckiego. W owym czasie rachunki wykonywano ręcznie, do czego powoływano specjalne grupy. Zagadnieniem szacowania parametrów złóż geologicznych zajmowało się wielu badaczy. Formuluje się go następująco: na obszarze, na którym przypuszczalnie zalega złożo, należy rozmieścić pewną liczbę obserwacji (wierceń) aby na ich podstawie możliwie dokładnie oszacować wielkość zasobów złoża. Pojawiają się tutaj dwa problemy. Pierwszy, jak interpretować wyniki obserwacji i drugi w jakich miejscach dokonywać wierceń (siatka wierceń). Jako model matematyczny opisu złoża, S. Zubrzycki przyjął proces stacjonarny

na płaszczyźnie, izotropowy, stochastycznie ciągły, opisany przez pewną funkcję korelacyjną. Miąższość złoża na pewnym obszarze określił jako całkę stochastyczną po tym obszarze z opisanego procesu stochastycznego. Proces ten rozważał przy trzech typach funkcji korelacyjnej. Ponieważ praca miała być zastosowana do badania miąższości złóż cynku w kopalniach górnośląskich, więc funkcję korelacyjną należało estymować z pobranych tam danych. Sposób pobrania danych jest opisany w paragrafie 8 pracy [109]. Spośród trzech typów funkcji korelacyjnych najbardziej odpowiednią okazała się funkcja wykładnicza.

Siatki wierceń. Zagadnienie szacowania złóż geologicznych wyłoniło problem postaci siatki wierceń. S. Zubrzycki pokazuje, że postać ta zależy istotnie od postaci funkcji korelacyjnej, zob. [110] i [112]. Powstało więc pytanie, czy można wskazać jakiś typ siatki, który byłoby optymalny dla dużej klasy funkcji korelacyjnych. W związku z tym, T. Dalenius, J. Hajek i S. Zubrzycki w [13] rozważali problem, jaki jest najlepszy kształt regularnej sieci punktów na płaszczyźnie z punktu widzenia dokładności szacowania średniej stacjonarnego i izotropowego procesu stochastycznego przez średnią arytmetyczną obserwacji. Przypuszczano, że najlepszą wśród siatek o ustalonej gęstości okaże się sieć trójkątów równobocznych, co jednak okazało się nieprawdą. B. Kopoćński w pracach [25] i [27] pokazał, że gdy funkcja korelacyjna stacjonarnego, izotropowego procesu stochastycznego na płaszczyźnie jest wykładnicza, to dokładności oszacowania uzyskanej przy użyciu sieci trójkątów równobocznych nie da się poprawić ani przez małe afiniczne deformacje takiej sieci (zachowujące gęstość), ani przez ich małe losowe lokalne deformacje.

Model złóż osadowych. S. Zubrzycki w [110] zajmował się matematycznym modelem złóż osadowych. Wychodząc od naturalnych założeń o kształtowaniu się złóż pokazał, że można je opisać przez proces stochastyczny *ruchomego całkowania* na płaszczyźnie, tj. przez proces $X(p) = \int \int k(q - p)Y(dq)$, gdzie $k(p)$ jest pewną funkcją wagową na płaszczyźnie, a $Y(p)$ jest procesem na płaszczyźnie o przyrostach ortogonalnych, o średniej zero i wariancji proporcjonalnej do pola, na którym jest określony.

4.4. Archeologia

Tematy związane z archeologią pojawiły się na seminarium dwa razy. Jedno z zagadnień, postawione przez prof. W. Hołubowicza, dotyczyło optymalnego poletka poszukiwań archeologicznych, a drugie badania nieprzypadkowości rozmieszczenia ceramiki w wykopaliskach archeologicznych. Wyniki badań przedstawili S. Kucharczyk i H. Szczepanowski

w pracy *Optymalne poletko poszukiwań archeologicznych* [31].

5. Leśnictwo i Rolnictwo.

5.1. Dendrometria. Wydaje się, że głównym problemem leśników było zdefiniowanie pewnych wielkości charakteryzujących drzewo i drzewostan, w czym nie było jednomyślności. Jedną z metod klasyfikacyjnych, drzewostany klasyfikuje pod względem *bonitacji* i *rozwoju* (pojęcia różnie rozumiane przez leśników). Zgadzano się, że wiek, wysokość i grubość pnia są wielkościami ważnymi dla charakterystyki drzewa. Przegląd pewnych podejść oraz własne do problemu klasyfikacji przedstawił B. Rutkowski w [64].

Na pytanie, czego oczekiwano od matematyków, mógłby na pewno odpowiedzieć J. Perkal. Nie polemizując ze znanymi podejściami do klasyfikacji drzew i drzewostanów, J. Perkal zaczął od prób zmierzenia objętości drzewa, czyli *miąższości* drzewa. W praktyce leśnej stosowane są trzy metody szacowania objętości pni drzewnych. Są to metoda pierśnicowa służąca do szacowania objętości drzewa na pniu, metoda Hubera-Kästnera służąca do wyznaczania objętości drzewa ściętego dla celów eksploatacyjnych i metoda sekcyjna stosowana do celów badawczych. W tych metodach wyznacza się najpierw pole poprzecznego przekroju pnia, na podstawie jednej bądź dwóch średnic, mierzonych na wysokości piersi mierzącego oraz w kierunkach południowo-północnym i wschodnio-zachodnim, a następnie mnoży się to pole przez pewną stałą lub przez długość całego pnia. J. Perkal w [47] zaprojektował *profilometr*, przyrząd do wyznaczania pola poprzecznego przekroju rosnącego drzewa (bez przecinania) oraz *ksylometr mechaniczny*, przyrząd całkujący przekrój, służący do mierzenia objętości pnia, również bez przecinania.

Średnica mierzona na wysokości piersi mierzącego i wysokość drzewa są wielkościami ze sobą mocno skorelowanymi. J. Perkal w pracy [47] znalazł, metodą składowych głównych, dwie wielkości nieskorelowane, będące kombinacjami liniowymi wspomnianych dwóch wielkości. Jedną z nich nazwał *bonitacją*, a drugą *wskaźnikiem wysmukłości* drzewa. Uważał, że te nowe wielkości lepiej charakteryzują wcześniej wprowadzone przez leśników pojęcia *bonitacji* i *rozwoju* drzewostanu (zob. J. Perkal [47, 48], [55] oraz J. Battek i J. Perkal [6]).

Można sądzić, że leśnikom bardzo zależało na dobrym szacowaniu objętości drzewa bo określała ona jego cenę. J. Łukaszewicz w [41] wspomina, że metoda wyceny *kopalniaków* była przedmiotem sporu między leśnikami i górnikami. Górnictwo było poważnym odbiorcą drewna uży-

wanym do stemplowania w kopalni. Leśnicy oceniali kopalniaki w zależności od jego masy, natomiast górnicy w zależności od ich wytrzymałości. H. Steinhaus zaproponował metodę pragmatyczną ustalania ceny kopalniaków. Według niej każda ze stron miała być zadowolona z wyceny.

5.2. Rolnictwo. Wiele problemów biologicznych poruszonych na Seminarium wiąże się z problemami rolniczymi, więc potraktujemy je łącznie. Najczęściej były one formułowane przez pracowników Wyższej Szkoły Rolniczej (WSR). Spośród licznych tematów warto wymienić:

- (1) Związek gruzelkowatości gleby z jej wilgotnością (Bolesław Świętochowski, prof. Politechniki Lwowskiej i WSR, Katedra Ogólnej Uprawy Roli i Roślin);
- (2) Ocena zawartości fosforu w glebie (Kazimierz Boratyński, WSR, Katedra Chemii Rolnej);
- (3) Wyróżnienie czynników mających wpływ na plony;
- (4) Związek między typem lasu a występowaniem w nim wątrobowców;
- (5) Prawa wzrostu plonów (Rudolf Hohenberg);
- (6) Wyczerpywanie gleby poprzez topinambur (B. Świętochowski);
- (7) Prognoza plonu ziemniaka na podstawie długości i grubości łodyg oraz blaszki liścia (Tadeusz Ruebenbauer, WSR, Hodowla Roślin);
- (8) Wpływ różnych warunków przechowywania roślin na ich siłę i energię kiełkowania (Marian Lityński, WSR, Katedra Warzywnictwa i Ogrodnictwa);
- (9) Uwład fuzarialny łubinu i jego zwalczanie (A. Kopeć, WSR);
- (10) Pojęcie odległości ekologicznej między dwoma obszarami roślinnymi (H. Steinhaus).
- (11) Fizjologiczna rola próchnicy (Stefan Gumiński, UW r);
- (12) Klasyfikacja pszenic ze względu na ich własności fizyczne badane farynografem oraz wpływ cech pszenicy na smak chleba. (Szymon Brej, WSR, Wydział Rolniczy);
- (13) Badanie mąki na popiołowatość (B. Kotlarski);
- (14) Populacje ruchome (Adam Goose, WSR, Katedra Ochrony Roślin);

W protokołach Seminarium są krótkie wzmianki o pierwszych 11 tematach, które przedstawiamy poniżej.

Na bazie tematu (1) powstała praca magisterska J. Łukaszewicza *Próba matematycznego ujęcia między strukturą gruzelkową a plonem*.

Rozważając temat (4) sporządzono dendryt wątrobowców względem lasów oraz dendryt lasów względem wątrobowców. W konkluzji H. Steinhaus stwierdził, że choć wynik otrzymany przez Seminarium był autorce skądinąd znany, to jednak badania były uzasadnione, gdyż jest wiele intuicyjnych przekonań, które po dokładniejszym zanalizowaniu okazują się fałszywe.

Problemy związane z prawem wzrostu plonów referował R. Hohenberg. Plon rośliny zależy od wielu czynników, takich jak azot, fosfor, potas i woda. Znane są prawa ustalone empirycznie w postaci równań różniczkowych, mówiące o tym, jak zależy plon od poszczególnych czynników, gdy pozostałe dane są w dawkach optymalnych. Zagadnienie polega na tym, aby ustalić zależność plonu od zespołu czynników, gdy wszystkie mogą być dawane w rozmaitych dawkach niezależnie od siebie. Rezultatem R. Hohenberga jest próba rozwiązań owych równań różniczkowych we wszystkich możliwych przypadkach.

Badaniem rozwoju 10 odmian ziemniaków i porównywaniem ich za pomocą wskaźników przyrodniczych Perkala zajmował się Dzan-Dzo-i w pracy [16].

Na bazie tematu (8) powstały prace A. Huskowskiej publikowane w czasopismach specjalistycznych.

W temacie (10) M. Marczewski i H. Steinhaus w *O odległości systematycznej biotopów* [42] podali definicję odległości między strukturami obszarów leśnych.

W zagadnieniu fizjologicznej roli próchnicy prof. Stefan Gumiński sformułował hipotezę, że próchnica kompensuje brak tlenu w środowisku i spełnia rolę akceleratora wodoru. Na podstawie doświadczenia przeprowadzonego w Zakładzie Fizjologii Roślin, wyciągnięto wniosek, że nie ma podstaw statystycznych do odrzucenia tej hipotezy.

Wartość wypiekowa mąki. W temacie (12) Szymon Brej zreferował zagadnienie dotyczące związków między cechami pszenic ze względu na chleb. Na tej bazie powstała praca F. Szczotki [93], dotycząca wartości wypiekowej pszenicy. Dużą wartość wypiekową miała w przeszłości tzw. pszenica stepowa, na którą klimat oceaniczny Ziemi Zachodnich działał ujemnie. Wartość wypiekowa ciasta charakteryzuje się czterema cechami: rozwojem, stałością, elastycznością i rozmiękczeniem ciasta. Cechy te wyznacza się za pomocą tzw. *farynografu*, którym wyrabia się ciasto od momentu dodania wody do mąki. Pszenica o dużej wartości wypiekowej powinna się odznaczać dużą elastycznością i stałością oraz małym rozmiękczeniem i rozwojem. Celem pracy było porządkowanie odmian pszenicy ze względu na wszystkie wymienione cechy jednocze-

śnie oraz klasyfikacja ze względu na wartość wypiekową. Do klasyfikacji użyto funkcji dyskryminacyjnej R. Fishera. Spośród wszystkich odmian Autor wybrał do I grupy trzy odmiany charakteryzujące się dużą elastycznością i stałością oraz małym rozmiękczeniem i rozwojem, a do II odwrotnie, tj. trzy odmiany pszenicy z dużym rozmiękczeniem i rozwojem oraz małą elastycznością i stałością. Mając sześć punktów w przestrzeni czterowymiarowej poprowadzono liniową funkcję dyskryminacyjną R. Fishera rozdzielającą sumę punktów zbiorów I i II, a następnie sporządzono liniowe uporządkowanie odmian pszenicy od najlepszej do najgorszej.

Z zagadnieniem jakości mąki były badania dotyczące popiołowatości mąki (referat na ten temat wygłosił S. Kotlarski).

Populacje ruchome. Standardowe doświadczenia w rolnictwie, najczęściej dotyczą stałych poletek, na których bada się wpływ zastosowanych czynników na rozwój rośliny. Są jednak sytuacje, w których bada się skuteczność preparatów ochronnych w zwalczaniu poruszających się szkodników, tzn. populacji ruchomych. Z problemem tym Adam Goose (WSR, etymologia stosowana - ochrona roślin przed szkodnikami) zwrócił się do J. Perkała. Zagadnienie dotyczyło skuteczności pewnego środka ochronnego w zwalczaniu *ślodyszka*, żerującego na rzepaku i niszczącego na nim strączki olejodajne. J. Perkał, w [53] założył, że ślodyszek przemieszcza się zgodnie z ruchem Browna, o średniej zero i wariancji σ^2 . Wykorzystując to założenie oraz założenie o rozkładzie liczby ślodyszków na jednostkowym poletku A, a właściwie o jego średniej $\tilde{S}$, podał wzór na oczekiwaną liczbę ślodyszków w postaci $S(t, v) = \tilde{S}(1 - \Phi(v/\sigma\sqrt{t}))$, które w chwili początkowej znajdowały się na polu A, a w chwili t znajdują się na poletku B odległym o v od granicy między poletkami A i B, gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. J. Perkał weryfikował swój rezultat wykorzystując doświadczenia A. Goosa przeprowadzone na poletku w Swojcu w 1955 roku.

Podobne zagadnienie do powyższego, ze względu na ruchliwość populacji, ale bardziej skomplikowane, rozważał S. Zubrzycki w swojej ostatniej pracy *W pogoni za ślimakami* [117]. Szacował średnią liczbę ślimaków na jednostkę przypadającą powierzchni poletka, gdy te zarówno mogą to poletko opuścić przemieszczając się poza, jak również ukryć się w podłożu. Poletko sprawdza się wielokrotnie w pewnych odstępach czasu, numeruje się wszystkie znalezione ślimaki dla późniejszej identyfikacji i notuje ich pozycje. Założył, że rozmieszczenie ślimaków na poletku jest poissonowskie o nieznannej średniej λ , którą należy esty-

mować. Założył, że oba ruchy są wzajemnie niezależne, rozkład prawdopodobieństwa wektora łączącego pozycję wyjściową ślimaka w chwili pierwszego sprawdzania z pozycją końcową w chwili drugiego sprawdzania jest centralnie symetrycznym rozkładem normalnym. Zagadnienie sprowadziło się do estymacji ruchliwości ślimaka i prawdopodobieństwa jego ukrycia się.

W niektórych tematach, np. w temacie (12) stosowano również metodę taksonomii wrocławskiej, co pozwoliło ustalić pewne skupiska cech. Ponadto dyskutowano na tematy:

- próba zastosowania teorii gier do biologii (Jan Mikiewicz);
- matematyczna argumentacja uzasadniająca wprowadzenie nowych podgatunków w botanice (F. Szczotka);
- wyznaczanie frakcji poszczególnych genotypów w populacji w przypadku, kiedy nie można korzystać z praw Mendla (J. Perkal);
- zasady systematyki związków organicznych na podstawie prawidłowego układu węglowodorów (J. Łukaszewicz).

6. Zootechnika. Wiele tematów związanych z hodowlą zwierząt dostarczyli na Seminarium zootechnicy z Wyższej Szkoły Rolniczej we Wrocławiu (WSR) oraz ze Szkoły Żywienia Zwierząt i Doświadczalnictwa Zootechnicznego w Czechnicy. Wśród nich rozważano tematy:

- rodowe cechy kóz,
- mleczność krów,
- wartość użytkowa tucznika,
- alternacja płci,
- inne problemy.

Poniżej wymieniamy niektóre z tych problemów.

Rodowe cechy kóz. Jednym z problemów było zbadanie hipotezy, że wskutek pomieszczenia, przy krzyżowaniu u kóz z terenu wałbrzyskiego, zatraciły się u przychówku rodowe cechy kóz importowanych z pięciu różnych okolic Europy. Badanie tej hipotezy, w pracy doktorskiej Z. Borkowskiego, sprowadzono do analizy dendrytu kóz. Sporządzono dendryty dla kilku grup kóz w różnym wieku. Gdyby kozy stare dzieliły się na grupy wyraźniej niż młode, to można by się dopatrywać potwierdzenia wspomnianej hipotezy.

Mleczność krów. W temacie mleczności krów badano następujące szczegółowe problemy:

- wpływ buhaja lub krowy na mleczność potomstwa (F. Olbrychtowa i Tadeusz Olbrycht, prof weterynarii i genetyki w Akademii Weterynarii we Lwowie i w WSR);
- korelacja między rocznym udojem mleka, a zawartością tłuszczu w mleku (T. Konopiński, prof. weterynarii w WSR i M. Detkens);
- średnia roczna zawartość tłuszczu w mleku (P. Znaniecki);
- czynniki wpływające na mleczność krów (T. Olbrycht i F. Olbrychtowa);
- wpływ karmienia na mleczność krów;
- korelacja między długością życia a mlecznością krów rasy czarno-białej nizinnej;

Problemu pierwszego nie rozwiązano z powodu skąpych danych. Przy badaniu drugiego problemu na próbie, okazało się, wbrew przewidywaniom, że korelacja nie jest ujemna i jest stochastycznie nieistotna. Problem związku mleczności krów z ich cechami pokrojowymi (zewnętrzne cechy krowy, np. typ wymienia, typ nóg, itp.) był rozważany przez B. Nowickiego (prof. WSR, uczeń T. Olbrychta, genetyk), T. Olbrychta i L. Zubrzycką w [44]. Celem pracy było sprawdzenie za pomocą taksonomii wrocławskiej, czy krowy w układzie dendrytu, wyodrębnione w grupach różniących się cechami pokrojowymi, również różnią się mlecznością i w jakim stopniu.

Wartość użytkowa tucznika. Ważnym tematem badawczym dla zootechników był związek kosztu wyprodukowania tucznika z jego wiekiem lub ciężarem. W analizie tego tematu wprowadzono pojęcie wartości użytkowej tucznika, tj. wartości rzeźnej tucznika. Wartość ta jest funkcją wieku i ciężaru. W oparciu o funkcje kosztu i wartości rzeźnej, zaproponowano najkorzystniejszy czas uboju. Ponadto badano zależność między cechami użytkowymi i morfologicznymi tucznika.

Analizowano również wpływ karmienia tucznika na jego wartość rzeźną, ściśle biorąc problem zastąpienia białka zwierzęcego w karmieniu przez białko roślinne. Materiał zebrany przez inżyniera Piotra Znanieckiego z Czechnicy obejmował obserwacje 96 świń. Były one podzielone na dwie grupy, jedną grupę żywiono wyłącznie białkiem roślinnym, drugą z dodatkiem białka zwierzęcego. Do tego doświadczenia brano pary prosiąt siostrzanych i jedno prosię z pary losowano do jednej z tych grup. Ponadto całą parę losowano do klasy wagowej, do jakiej mają być utuczone. Obserwowano ilość i jakość pokarmu zjedzonego każdego dnia przez świnię oraz analizę rzeźną sztuk po zabiciu. Zasadniczym pytaniem było, czy należy stosować dodatki białka zwierzęcego.

Na Seminarium dyskutowano nad sposobem porównywania istotności różnic między krzywymi będącymi charakterystykami dla grup świń żywionych białkiem roślinnym wyłącznie i grup świń żywionych z dodatkiem białka zwierzęcego. Rozpatrywanymi krzywymi były średnie dzienne przyrosty żywej wagi. Profesor Zygmunt Ruszczyc zauważył, że należy zastanowić się, jaki wariant porównywania dwu sposobów żywienia świń jest dla nas lepszy: czy przez porównywanie przyrostów (np. ciężaru) w określonym czasie, czy przez porównywanie średnich czasów tuczenia potrzebnych do osiągnięcia zadanego ciężaru.

Pojawił się również temat wpływu knurów na polepszenie wartości użytkowej świń (E. Mamociuk).

Alternacja płci. W temacie tym badano zagadnienie alternacji płci u kurcząt. Początkowo tym zagadnieniem zajmował się J. Perkal z Ludwikiem Szopą (WSR, organizator i pierwszy kierownik Zakładu Hodowli Drobiu w latach 1953-1974), później dołączył do nich B. Kopociński. U ptaków płeć potomstwa nie zależy od ojca, lecz wyłącznie od matki, więc może być przypisana jaj. W wyniku analizy badań empirycznych powstały dwie prace [56] i [26]. Potwierdziły one hipotezę iż płeć dwu jaj, zniesionych między dwiema kolejnymi przerwami w niesieniu jaj, jest z większym prawdopodobieństwem taka sama niż różna. Próbowano również zbudować model matematyczny automatu produkującego ciąg znaków adekwatny do zaobserwowanej sekwencji płci kurcząt. Problematyka ta jest ostatnio rozważana przez B. Kopocińskiego w [28].

Wśród problemów badawczych tego zakładu były czynniki wpływające na zdolność wylęgową jaj oraz analiza biologiczna lęgu i powylęgowa jaj. Zasygnalizowany wyżej problem mieści się w tej tematyce.

Zagadnieniem powiązaniem z alternacją płci było badanie prawdopodobieństwa urodzenia się knura w miocie maciory prowadzone przez Czesława Plattha (organizator i kierownik Katedry Zastosowań Matematyki w Akademii Rolniczo-Technicznej w Olsztynie). W rezultacie powstała praca doktorska [58] tegoż autora pod kierunkiem J. Perkala. Płeć u ssaków, odmiennie niż u ptaków, zależy od chromosomu przekazanego przez ojca. W oparciu o liczebności knurów w każdym z zbadanych 2296 miotów, o liczebnościach od 1 do 21 osobników pochodzących z 6 ośrodków doświadczalnych, autor próbował znaleźć model urodzeń knurów w miocie. Na podstawie materiału statystycznego odrzucił hipotezę, że prawdopodobieństwo urodzenia się knura jest stałe dla wszystkich prosiąt i nie zależy od miotu. To prowadziło do liniowej postaci wariancji liczby knurów w miocie (postać normalna). Podobnie

odrzucał hipotezę, że ta wariancja jest podnormalna. Z badań wynikało, że istnieje zmienność prawdopodobieństwa płci wewnątrz miotów, co doprowadziło do wniosku selektywnego umierania embrionów przed urodzeniem.

Inne problemy zootechniki. W temacie zootechnicznym badano jeszcze następujące problemy:

- zależność między długością ciąży, a wagą miotu owiec (F. Olbrychtowa);
- współzależność między ciężarem miotu po urodzeniu, a ciężarem po 3 i 8 tygodniach (S. Kołat);
- jak karmić barany aby uzyskać maksymalny zysk przy minimalnych kosztach;
- wpływ karmienia owiec przed poczęciem na liczebność miotu;
- zagadnienie wychowania konia norweskiego z UNRY współpracującego z mechanizacją (dr. Detkens). UNRY - United Nations Relief and Rehabilitation Administration;
- sposoby badania rozwoju konia w czasie, na tle zadania hodowlanego, którym było wychowanie konia 600 kilogramowego. Inż. Magdalena Osuchowska przedstawiła materiały pomiarowe koni poznańskich ze stadniny w Posadowie i w Racot;
- dochodzenie ojcostwa u bydła;
- szacowanie liczby ptaków w zagajnikach na podstawie ptaków zauważonych (K. Szarski).
- mierzenie pola powierzchni grzebienia koguta.

Ostatni problem wydawał mi się początkowo egzotyczny. Jednakże w książce [89], str. 139, zauważyłem, że problem ten postawił H. Steinhausowi dr Lejwa (biochemik, przed wojną pracował w Zakładzie Higieny we Lwowie). Motywował to następująco: *siłę działania niektórych hormonów mierzy się wzrostem pola powierzchni grzebienia koguta, któremu się wstrzykuje dawkę jednostkową hormonu. Nie ma dotychczas przyrządu do łatwego mierzenia pól takich nieregularnych powierzchni jak grzebień koguta.* Być może ten problem skłonił H. Steinhausu do konstrukcji *planimetru*, przyrządu do pomiaru pola figur nieregularnych.

Można zauważyć, że niektóre problemy rozważane przez rolników lub zootechników na etapie zbierania danych nie zawsze były dyskutowane z matematykami. W wyniku nie zawsze można było sprawdzić wysuwane hipotezy. J. Perkal, w pracy [50] - *Zastosowania matematyki do rolnictwa w środowisku wrocławskim*, podsumował współpracę z rolnikami w

następujący sposób. *Trudno byłoby policzyć wszystkie konsultacje matematyczne dla rolników. Kończyły się one na przemian raz fiaskiem, raz powodzeniem. Jak widać z powyższego referatu (z pracy [50]), działalność nasza nie była triumfalnym marszem Aleksandra Macedońskiego poprzez nietknięte stopą matematyka krainy myśli rolniczej. Ale też nie była to wojenna droga Szwejka. Dorobek i doświadczenie, jakie zebraliśmy w ciągu tych kilku lat, cenimy sobie wysoko. Uważamy, że uprawniliśmy one nas do przedsięwzięcia wielkiego trudu: skonstruowania podręcznika matematyki dla rolników [55].*

7. Nauki medyczne.

7.1. Medycyna. Lekarze współpracujący z Seminarium. J. Perkal w artykule *O współpracy matematyków i medyków w środowisku wrocławskim* [51] z 1957 roku pisze, że współpracowano z 35 medykami, wśród których byli profesorowie Zygmunt Albert (AM Warszawa, onkolog, choroby układu krążenia), Julian Aleksandrowicz (AM Kraków, hematolog, białaczki), Antoni Falkiewicz (AM Wrocław, internista, kardiolog), Ludwik Fleck (Warszawa, bakteriolog, immunolog), Ludwik Hirszfild (AM Wrocław, immunolog, bakteriolog), Hanna Hirszfildowa (AM Wrocław, pediatra), F. Kacprzyk, Hugo Kowarzyk (AM, Wrocław, hematolog), Adam Kunicki (PAN Warszawa, neurochirurg), Edward Szczeklik (AM Wrocław, choroby wewnętrzne, kardiolog). Niektórzy z wymienionych profesorów nie pojawili się na seminarium, ale wysyłali swoich przedstawicieli. Zajmowano się co najmniej 70 zagadnieniami medycznymi. Poniżej wymieniam i krótko omawiam niektóre tematy i problemy dyskutowane z medykami na Seminarium.

Karta statystyczna. Jednym z pierwszych tematów było ułożenie tekstu karty statystycznej do badania rozwoju chorób, np. miażdżycy, nadciśnienia, zawałów serca, wola, itp. E. Szczeklik podał projekt takiej karty w przypadku zawału serca. J. Giełdanowski mówił o trudności zebrania materiału obserwacyjnego do zagadnienia związku między zapadalnością na wrzód żołądka lub dwunastnicy, a typem konstytucyjnym człowieka. Trudność polegała na tym, że karty chorobowe nie zawierały danych o typie konstytucyjnym.

Próbkowanie. Zbieranie danych statystycznych dotyczących rozprzestrzeniania się chorób, badania powiązań między różnymi cechami osobniczymi i chorobami, badania skuteczności zabiegów, stworzyły tzw. problem *próbkiowania*. Sugerowano losowanie nie pojedynczych osobników lecz całych grup. Stosując tę metodę próbkowania, K. Czyżewski, A. Falkiewicz i inni w [10, 11, 12], otrzymali obraz rozprzestrze-

niania się wola na Dolnym Śląsku. Grupa stomatologów z prof. Noemi Wigdorowicz-Makowerową na czele, stosując wspomnianą metodę próbkowania, opracowała w [100] rozprzestrzenianie się próchnicy zębów u dzieci w wieku szkolnym we Wrocławiu.

Statystyczna istotność. Wprowadzanie nowych zabiegów i nowych terapii rodzi pytania o ich efektywność w stosunku do już stosowanych, a także czy jakaś cecha wywiera istotny wpływ na wynik. Statystyka matematyczna proponuje w tym temacie metody teorii testowania hipotez statystycznych, teorii estymacji czy też metody dyskryminacji. Metody te były proponowane na Seminarium do badania skuteczności różnych leków, badania wpływu używania tytoniu na miażdżycę i wpływu uprawianego zawodu na zawały. Testowano hipotezy, czy nowe metody leczenia raka wpłynęły na zmniejszenie nasilenia się tej choroby, przedłużenie życia chorych. Przykładem zastosowań metod matematycznych i statystycznych w medycynie były prace T. Bogdanika wspólne z M. Warmusem i innymi publikowane w czasopismach medycznych. Były to: matematyczny model krzywej cukrowej, dyskryminacja krzywych cukrowych w otyłości, nadciśnieniu i zawale mięśnia sercowego, praktyczne zastosowania modeli matematycznych do różnicowania typów cukrzycy, zastosowanie metod matematycznych do różnicowania typów dysproteinemii. Dokładniej pisze o tym S. Zubrzycki [116].

Szczegółowe problemy medyczne. Zagadnienia medyczne pojawiały się na Seminarium ponad sto razy w kontekście różnych chorób. Przegląd zagadnień z nimi związanych podajemy poniżej.

Wole. Problematyka *wola* pojawiła się na Seminarium około 12 razy. Mówili o niej A. Falkiewicz, T. Nowakowski i inni, w kontekście problemu rozprzestrzeniania się tej choroby oraz jej związku ze sposobem odżywiania (zob. [10, 11, 12], szersza bibliografia na ten temat podana jest w [51]). W rozważanej tematyce dr Szwarcowa z AM w Poznaniu wygłosiła referat na temat występowania wola w województwie poznańskim.

Białaczka. Problemy *białaczki* były poruszane około 7 razy. Dyskutowali o nich J. Aleksandrowicz, C. Szmigiel i K. Janicki z Krakowa oraz B. Bratkowska-Seniówka z Wrocławia. Interesowano się między innymi wiekiem leukocytów przy leukocytozie białaczkowej, skutecznością nitrogranulogenu w leczeniu oraz wpływie środowiska zamieszkania i pracy na występowanie białaczek. B. Bratkowska-Seniówka badała, czy chorzy na białaczkę mają odmienne spectrum białkowe niż ludzie zdrowi.

Odra. Problem *odry* u dzieci pojawił się na Seminarium około 4 razy. Na podstawie materiału dotyczącego przechodzenia odry u 200 dzieci, zebranego przez T. Nowakowskiego, próbowano wyciągnąć wnioski o skuteczności dwu stosowanych leków. Jeden z nich był środkiem chemicznym, a drugi zastrzykiem 40cm^3 krwi osoby, która odrę przechorowała.

Rak. Problem *raka* pojawił się na Seminarium około 10 razy. W dyskusji uczestniczyli lekarze J. Gieładanowski, M. Mędraś, T. Hirmle, T. Bogdanik, E. Szczeklik, Z. Albert i inni. Jednym z dyskutowanych problemów był wpływ nowych sposobów leczenia *raka* na stan chorych i na wzrost długości życia umierających. Asystentka prof. Z. Alberta pokazała wykresy frekwencji wieku w chwili śmierci na raka macicy dla dwu zbiorów obserwacji, współczesnego i sprzed stu laty. T. Bogdanik mówił o zachowaniu się grupy krwinek białych w nowotworach. T. Hirmle mówił o biologicznej metodzie niszczenia nowotworów

Dyfteria. Problem prawdopodobieństwa wykrycia nosiciela *dyfterii* pojawił się około 6 razy. W dyskusji z L. Fleckiem chodziło o znalezienie prawdopodobieństwa wykrycia nosiciela w zależności od liczby zbadanych kolonii, pochodzących z jednego testu. Problem ten opracował J. Łukaszewicz w *O skuteczności pędzlowego badania nosicielstwa dyfterii* [38].

Zawał serca. Około 10 razy pojawiła się na Seminarium dyskusja związana z *zawałami serca*. W szczególności pracowano nad postacią kształtu karty statystycznej ujmującej zależności choroby od ciśnienia krwi, miejsca zamieszkania, płci, wieku. Dotyczyło to także takich chorób jak *gościec*, *choroby stawów* i *nerek*. W dyskusji uczestniczyli lekarze A. Falkiewicz, Leligowicz, K. Janicka, S. Łukasik i inni.

Miażdżyca. Temat *miażdżycy* pojawił się na Seminarium 8 razy w związku ze statystycznymi badaniami dr Zdzisława Wiktora. Dyskusja dotyczyła korelacji między występowaniem schorzenia, a takimi charakterystykami, jak wiek, płeć, palenie tytoniu, cukrzyca i choroby towarzyszące. Stwierdzono różnice rozkładu wieku mężczyzn i kobiet chorych na miażdżycę oraz związku miażdżycy z *ciśnieniem samoistnym*.

Krzepliwość krwi. Temat krzepnięcia krwi i regeneracji krwi, po jej upuście, pojawił się 5 razy. Był dyskutowany przez H. Kowarzyka i dr Neuman. Zagadnienie czasu regeneracji składu krwi badano u królików.

Patergeometria. Słowo *patergeometrii* pojawiło się na Seminarium 2 razy w związku z badaniami Franciszka Gröera. Badacz ów był w latach 1919-1939 profesorem Uniwersytetu Jana Kazimierza, w 1948-1951 Akademii Medycznej w Zabrze, a w 1951-1961 w Warszawie. Badał on

wielkość bąbli wywołanych zastrzykiem morfiny o różnych stężeniach. *Prawo patergeometrii*, sformułowane przez Gröera i Steinhausa mówi, że logarytm reakcji organizmu jest proporcjonalny do logarytmu wykładnika stężenia podanej morfiny. Reakcję organizmu określano jako największą średnicę bąbla wywołanego przez standardową dawkę morfiny.

Znajomość H. Steinhausa z Gröerem datowała się od roku 1915 w Wiedniu, a później w okresie lwowskim (zob. [89], str. 124). Wtedy Gröer badał związek między średnicą bąbla powstałego po zastrzyku tuberkuliny, a koncentracją roztworu tej substancji. Wynik badania służył mu do diagnozy gruźlicy u dzieci. H. Steinhaus pisze, że w metodzie Gröera średnicy bąbla nie da się mierzyć dokładnie, więc proponował mierzyć pole bąbla (zob. [89], str. 125).

Grupy krwi. *Konflikt grup krwi* i problem *dochodzenia ojcostwa*, pojawił się około 25 razy. Podczas wstępnych badań J. Łukaszewicz wspólnie z A. Kelusem sporządzili dendryt narodów świata na tle frakcji grup krwi. Przygotowali również prace dotyczące dziedziczenia grup krwi, a wspólnie z dr Zuberem badali związek między grupami krwi, a zapadalnością na różne choroby. H. Kowarzyk przedstawił materiał statystyczny dotyczący grup serologicznych Rh a patologią ciąży. Odnotowano w protokołach, że lekarz podał w wątpliwość związek między konfliktem serologicznym a patologią ciąży, którego bronił J. Łukaszewicz.

Dochodzenie ojcostwa. Temat dochodzenia ojcostwa, oparty na badaniu krwi i zeznaniach matki, był ważny z prawniczego punktu widzenia. Na Seminarium dostarczył go L. Hirszfeld. Prace na ten temat kontynuowali L. Hirszfeld, H. Steinhaus, następnie J. Łukaszewicz z H. Steinhausem. L. Hirszfeld, opierając się na trzech układach grup krwi (O, A, B, AB), (M, N, MN) i Rh obliczył, że prawdopodobieństwo wyłączenia ojcostwa niesłusznie pozwanego mężczyzny, jest równe 0,388. Steinhaus w [78] zauważył, że w przypadkach, w których ekspertyza serologiczna nie wyłącza ojcostwa, można za pomocą wzoru Bayesa obliczyć prawdopodobieństwo *à posteriori*, że pozwany jest ojcem. J. Łukaszewicz w pracy [35] (praca doktorska), stosując ideę Steinhausa opartą na wzorze Bayesa, podaje warianty metody, pozwalające obliczyć prawdopodobieństwo ojcostwa przy każdym wyniku ekspertyzy. Komentarz do problemu wyrokowania w sprawie alimentów dał H. Steinhaus, na posiedzeniu PTM (zob. [89], str. 424). Postępowanie miało na celu wyeliminować fałszywe pozwy.

Jednojaowość czworaczków. Hipotezę jednojaowości bliźniąt

lub ogólnie w ciążach mnogich odrzucamy natychmiast, jeżeli są one różnopłciowe lub stwierdzimy jaskrawe różnice badanego potomstwa. W przypadku przeciwnym pozostają metody probabilistyczne oparte na badaniach serologicznych i wzorze Bayesa. Ustalenie jednojajowości lub dwujajowości bliźniąt można przyrównać do ustalenia ojcostwa w sprawach alimentacyjnych. Tę metodę stosują autorzy pracy *Obliczanie prawdopodobieństwa jednojajowości czworaczków* [39].

Mikrobiologia. Problemy z mikrobiologii pojawiły się 6 razy i dotyczyły: wyznaczania czasu duplikacji (podwojenia liczebności) kolonii tuberkulinowych badanych przez Bakierkusta, badania penicylinowo opornych form gronkowca złocistego i mutacji gronkowca złocistego w obecności penicyliny. W związku z tą tematyką dr Teofil Szulga opowiedział o badaniu kolonii gruzliczych i wyznaczeniu czasu ich duplikacji. Czas duplikacji, obliczony z obserwacji dwudniowych, okazał się dla pewnych gatunków różny od czasu duplikacji obliczonego z obserwacji czterodniowych. Doświadczenia były zakłócone uruchomieniem życiowym postaci krystalicznych bakterii na skutek sprzyjających warunków w pożywce. Pozostało do rozpatrywania zagadnienie jak wyeliminować dodatkowe kolonie pochodzenia krystalicznego, aby obliczyć czas duplikacji bakterii o postaci komórkowej.

Wady rozwojowe dzieci. Temat wad rozwojowych dzieci, pojawił się 5 razy. J. Perkal wspomina w *Rozwój dzieci śląskich od 0 do 3 lat* [1], że przy badaniu rozwoju dziecka do lat 3 należy rozpatrywać dwie zdefiniowane przez nich charakterystyki: *rozwój* i *anomalie*. Wielkości te, otrzymane metodą składowych głównych, są pewnymi kombinacjami liniowymi ciężaru i wzrostu, są nieskorelowane, podczas gdy ciężar i wzrost są mocno skorelowane. Autorzy [1] przygotowali również nomogram, na którym na podstawie wzrostu, wieku i ciężaru dziecka można odczytać jego *rozwój* i *anomalie*.

Inne problemy medyczne i weterynaryjne. Odnotujemy na koniec w skrócie następujące tematy medyczne:

- epidemia biegunki u noworodków w 1951 roku (4 razy, T. Nowakowski);
- leptospiroza u psów (J. Grabiński). W kontekście pytania czy zapadalność na lepto-spirozę zależy od płci i wieku;
- parabioza myszy przy zszyciu ich brzuchami (A. Kelus);
- leczenie raka myszy przy pomocy zakażenia ich chorobą Baunga (M. Mędraś);
- dyspersja pomiaru dermografizmu przez kilku lekarzy (T. Nowakowski);

- czy gościec i płonica wywoływane są przez te same paciorkowce (L. Kossowski);
- związek grup krwi z skłonnością do zapadalności na choroby (Zuber);
- choroby zawodowe, w tym wpływ stażu i wieku w zapadalności na choroby gościowe i choroby dróg oddechowych (A. Rożanowicz);
- problem projektowania doświadczeń pozwalających stwierdzić, czy w obecności penicyliny powstają formy penicylinowo odporne gronkowca złocistego (Piechocki);
- określenie normalności ciśnienia krwi;
- poziom diastazy w surowicy u dzieci (L. Chatys-Górska);
- średni wiek chorych na tumory mózgowe (Chojnowski);
- odporność bakterii chorobotwórczych na antybiotyki (B. Lipnicki);
- typologia pneumo-graficzna (Leligowicz);
- badania nad czynnością przesączania się moczu przez kłębki nerwowe i wchłanianie go przez kanaliki nerkowe (płk dr Baraban);
- czy chorzy na białaczkę mają inne spectrum białkowe niż ludzie zdrowi (B. Bratkowska-Seniówka);
- wpływ treningu na krzywą elektrokardiograficzną (S. Łukasik). Chodzi o porównanie w różnych grupach: a) częstości uderzeń serca, b) przewodnictwa przedsionkowo-komorowego, c) kąta nachylenia osi fali delta.

W końcu warto wspomnieć o ważnym problemie dr S. Majerka (Warszawa) i H. Steinhausa związanym z rentgenografią i tomografią. Chodziło o odtworzenie obrazu przekroju ciała ludzkiego na podstawie przekroju we wszystkich kierunkach. H. Steinhaus miał nadzieję na zbudowanie aparatu do odczytywania poprzecznych zdjęć rentgenowskich. Zagadnienie to, jak napisaliśmy w [94], zostało zlecone Józefowi Wloce, niestety nie zostało zrealizowane.

Powyżej nie wymieniłem artykułów dotyczących wspomnianych problemów, publikowanych w czasopismach medycznych. Pewną ich listę podaje J. Perkal w [51].

Reasumując, współpraca matematyków z medykami ogniskowała się wokół zewnętrznego opisu przebiegu chorób, skuteczności kuracji i leków. Poza niektórymi wyjątkami, nie mówiło się o matematycznych modelach rozwoju chorób, choć myślało się o zbudowaniu takiego modelu dla rozwoju *raka*.

7.2. Stomatologia. Problematyka stomatologiczna pojawiała się

na seminarium około 10 razy. Wprowadziły ją profesor Noemi Wigdorowicz-Makowerowa, dr Zaorska z Jeleniej Góry, dr B. Błonka i dr Anna Dadun. Głównymi tematami były próchnica u dzieci, paradontoza oraz różnego typu ubytki w uzębieniu. Analizowano wykresy zależności różnych wskaźników próchnicy od wieku dzieci. B. Błonka wspólnie z A. Dadun przygotowały publikację *Próchnice u dzieci w Malborku*. N. Wigdorowicz-Makowerowa postawiła problem, czy różnica wskaźników określających zaawansowanie próchnicy między górą i dołem i między lewą stroną szczęki i prawą jest istotna. N. Wigdorowicz-Makowerowa demonstrowała wykresy owych średnich różnic między górną i dolną szczęką jako funkcji wieku w różnych środowiskach. Dyskutowano nad spostrzeżeniem, że im lepszy stan uzębienia, tym później pojawia się przewaga liczby uszkodzonych zębów na górnej szczęce. N. Wigdorowicz-Makowerowa zademonstrowała wykresy średnich różnic między ilością zębów zepsutych w górnej szczęce a ilością zębów zepsutych w dolnej szczęce w grupie dzieci z małą i dużą ilością próchnicy. Dyskutowano nad wnioskami co do ilości zębów zepsutych, jakie można wyciągnąć ze zbadania samych szóstek. N. Wigdorowicz-Makowerowa zainicjowała przeprowadzenie badania profilaktycznego wpływu fluorowania tabletkowego. W tym celu podzielono szkoły wrocławskie na grupę doświadczalną i kontrolną dla długoterminowego tabletkowego fluorowania. W dyskusję włączyli się matematycy: M. Warmus, J. Łukaszewicz i W. Szwarz, którzy referowali prace zagraniczne na ten temat. M. Warmus przedstawił zagadnienie dotyczące przyczyn mechanicznych próchnicy zębów, będące przedmiotem badań dr Zaorskiej. Intrygujący temat badań pewnego autora zreferował B. Kopociński *Śpiew w profilaktyce ortodontycznej*.

8. Technika.

Do tematyki technicznej można zaliczyć zagadnienia związane z optymalizacją, niezawodnością, komunikacją, elektrycznością, telekomunikacją, zagadnieniami teorii obsługi masowej (teoria kolejek) i częściowo architekturę. W sumie pojawiły się one na Seminarium ponad 60. Omawiamy je w takim zakresie, w jakim pojawiły się na Seminarium.

8.1. Optymalizacja. Problemy optymalizacji zwykle były związane z programowaniem liniowym, a w szczególności z przydziałem pracy i harmonogramem kolejności wykonywania prac. Dr J. Intrator, matematyk z Izraela, czasowo przebywający we Wrocławiu, postawił zagadnienie przydziału robotników do poszczególnych prac, gdy znane są wydajności robotników w poszczególnych pracach oraz ilości robotników, jakie do każdej pracy należy przyjąć. Teoretyczne rozwiązanie

tego zagadnienia podali J. Perkal i J. Battek w [7]. Skonstruowali nawet maszynę do mechanicznego rozwiązywania tego zagadnienia, której opis podali w tejże pracy. Zagadnienie Intratora jest typowym zagadnieniem programowania liniowego, które w 1951 roku metodą sympleks rozwiązał G.B. Dantzig, o czym J. Intrator i matematycy z Seminarium nie wiedzieli. Doniósł im o tym prof. Jan Oderfeld, o czym wspominają. Szczególnym przypadkiem zagadnienia programowania liniowego, tj. zagadnieniem transportowym zajmował się W. Szwarc w [95]. W pracy tej przedstawił literaturę programowania liniowego oraz podał własne rozwiązanie zagadnienia transportowego.

Podobne zagadnienie do poprzedniego było postawione przez Zakład Szlifierni Szkła. Dotyczyło opracowania harmonogramu wykonywania prac na stolikach szlifierskich. Rozwiązanie podał J. Łukaszewicz.

Analogiczne zagadnienie, dotyczące harmonogramu kolejności wykonywania prac przez maszyny, minimalizującego czas wykonania całego planu, rozwiązywał W. Szwarc. Zagadnienia związane z transportem, także typu *komiwojażera*, były badane przez W. Szwarca.

Innego typu problem zgłosił na Seminarium inżynier Józef Wesno z Leszczyńskiej Fabryki Okuć Budowlanych. Dotyczył on sporządzania kluczy do zamków, tj. ustalenia tablic do nacięć kluczy. Rozwiązanie tego problemu podał J. Łukaszewicz przedstawiając rozbić 100 000 numerów kluczy na 234 serie spełniające warunek, że każde dwa klucze z jednej serii różnią się przynajmniej w jednym wzorze co najmniej trzema nacięciami.

8.2. Niezawodność

Z tematyką niezawodności związana jest wytrzymałość. H. Steinhaus przedstawił zagadnienie J. Oderfelda dotyczące szacowania wytrzymałości prętów na podstawie wytrzymałości krótkich próbek. To zainspirowało H. Steinhausa do eksperymentalnych badań wytrzymałości na zrywanie, które następnie prowadził J. Battek. Badając wytrzymałość na zrywanie drutu i nici, różnych długości, grubości, itp. doszedł do wniosku nieoczekiwanego, że druty mają tendencję do zrywania się w środku.

H. Steinhaus sformułował również zagadnienie obliczania prawdopodobieństwa *pęknięcia* konstrukcji złożonej z kilku elementów, gdy znane są prawdopodobieństwa pęknięć każdego z elementów. W *Most z sześcioboczną kratownicą* [85] analizuje niezawodność pewnego mostu, o czym dyskutował z szefem Engineering Department w Battersee College Makowskim, (zob. [89], str. 482).

W czasopiśmie “Zastosowania Matematyki” pojawiło się wiele prac

autorów spoza seminarium Steinhausa dotyczących niezawodności różnych konstrukcji, np. praca W. Pogorzelskiego [59].

8.3. Komunikacja. W tamtych czasach przemieszczanie się w mieście zależało w dużym stopniu od komunikacji komunalnej. Problem sprawnej komunikacji przyniósł na seminarium dyrektor MZK Wrocław, wygłaszając referat (posiedzenie nr 80). Potem temat ten pojawił się na seminarium co najmniej 5 razy. Dyrektor przedstawił tzw. generalny plan rozwiązywania komunikacji zakładający budowę obwodnic wewnętrznych i zewnętrznych, budowę linii promieniowych i przelotowych oraz linii tramwajów jednokierunkowych. Podkreślił możliwości manewrowe, konieczność rozbudowy pętli na torowiskach. Ponadto wymieniono zagadnienia: badanie zapełnienia wozów, ustalanie najlepszej odległości między przystankami, badanie ekonomiczności pociągów dwuwagonowych i trójwagonowych. Oprócz dyskusji nad optymalnością sieci tramwajowej, dyskutowano nawet nad systemem premii dla konduktorów za przepracowane godziny nadliczbowe. Wydaje się, że obie strony liczyły na ciekawą współpracę, ale chyba niewiele z tego wyszło.

8.4. Elektryczność. W tematyce elektryczności wiele uwagi poświęcono *licznikowi poboru prądu i taryfie elektrycznej* (6 razy). Tematem dyskusji były nadto *automat schodowy* do oświetlania korytarzy i klatek schodowych (2 razy), *agregaty prądotwórcze* (3 razy), *rezerwa mocy elektrycznej* (2 razy), *awaryjność sieci elektrycznej* (2 razy).

Taryfa elektryczna. Problem *taryfy elektrycznej*, tj. sposobu naliczania opłat za pobór prądu przez konsumenta bierze się z niejednoznaczności tego poboru, co powoduje koszty elektrowni związane z utrzymaniem stałej mocy, nawet w okresach małego zapotrzebowania na nią. H. Steinhaus w *Autobiografii* [88] wspomina, że z problemem taryfy elektrycznej zapoznał go inż. Aleksander Dietzius jeszcze przed wojną. Wtedy też powstała idea *taryfy kwadratowej*. Pierwsza praca z tej tematyki była wspólną z inż. I. Rosenzweigiem [63] w 1939 r. Po ukazaniu się tej pracy referent taryfowy elektrowni budapesztańskiej napisał im, że ich rozwiązanie jest praktyczniejsze od dotychczasowego (zob. [89], str. 152). Kolejną pracą H. Steihausa dotyczącą taryfy elektrycznej była *O zagadnieniu taryfy elektrycznej* [67], którą już na pierwszym posiedzeniu Seminarium dał do zreferowania M. Reichbachowi. W pracy tej autor omówił różne opcje naliczania za prąd elektryczny (*taryfa ryczałtowa, taryfa zwykła, taryfa maksymalna, taryfa maksymalno-zwykła, itp.*) oraz przedstawił swoją propozycję taryfy elektrycznej, tzw. *taryfę kwadratową*. Według tej taryfy zapłata za pobór prądu w okresie rozra-

chunkowym T jest równa

$$z_2 = k_2 \sqrt{T} \sqrt{\int_0^T f^2(t) dt},$$

gdzie $f(t)$ jest mocą prądu pobraną w chwili t , a k_2 pewną stałą. Określenie *kwadratowa* bierze się z tego, że pobrana moc prądu w chwili t jest podniesiona do kwadratu, tj. $f^2(t)$. H. Steinhaus pokazał, że definiując

$$z_p = k_p T^{(p-1)/p} \left(\int_0^T f(t)^p dt \right)^{1/p}$$

i biorąc $p = 1$ otrzymujemy taryfę zwykłą, biorąc $p = 2$ otrzymujemy taryfę kwadratową, a biorąc $p = \infty$ otrzymujemy taryfę maksymalną. Taryfa kwadratowa jest korzystna dla odbiorców pobierających moc stałą, a obciąża zwiększonymi opłatami tych, których wahania w poborze mocy są duże. Można by zapytać dla jakiego p , $1 \leq p \leq \infty$, taryfa będzie akceptowana jednocześnie przez elektrownię i konsumenta.

Sprawa budowy licznika pojawiała się wielokrotnie przy różnych spotkaniach H. Steinhausa z różnymi ludźmi. Będąc w Genewie, próbował zaproponować firmie Société de Computers Electriques budowę licznika poboru prądu według jego pomysłu (zob. [89], str. 152). Projekt licznika poboru prądu bez części mechanicznych przedstawił na Seminarium K. Florek. Rozwiązanie konstrukcyjne licznika kwadratowego przedstawił na Seminarium mgr inż. Smoliński (praca magisterska). W końcu licznik prądu wyprodukowała w 1948 roku Fabryka Aparatury Pomiarowej PAFAL w Świdnicy.

H. Steinhaus stawiał również problem zbudowania automatu schodowego (miał się tym zająć J. Łukaszewicz).

Komitet Elektryfikacji Polski przy Prezydium PAN zlecił H. Steinhausowi zbadanie rozkładu awaryjności w polskiej sieci elektrycznej oraz problem rezerwy mocy elektrycznej. Problemem tym mieli zająć się J. Battek, J. Kucharczyk, B. Gleichgewicht i S. Gładysz. Niebawem S. Gładysz wygłosił referat na temat rezerwy mocy elektrycznej i zajął się planowaniem sieci transportowej tzw. K-T-Z (koparka-transport-załadunek) dostarczającej węgiel brunatny do elektrowni w Turossowie, co obniżyło koszty eksploatacji elektrowni.

8.5. Telekomunikacja

Z problemem centrali telefonicznej był związany tzw. *problem środka miedzi*, zakomunikowany H. Steinhausowi przez wiceministra poczt. J. Łukaszewicz i H. Steinhaus w [34] piszą: *Środkiem miedzi sieci telefonicz-*

nej nazywają *teletechnicy punkt*, w którym umieszczona centrala telefoniczna wymaga najmniej miedzianego kabla na połączenia z szafkami zbierającymi przewody od poszczególnych aparatów. Praca [34] jest odpowiedzią na problem postawiony przez inżyniera H. Dietricha, dyrektora departamentu w Ministerstwie Telekomunikacji, znalezienia matematycznej lub graficznej metody pozwalającej na łatwe wyznaczenie środka naciągu sieci (H. Dietrich zajmował się tym problemem w pracy [14]). Autorzy podają obie te metody.

Przyjmując, że znamy punkty $P_1, P_2, \dots, P_n$ na planie miasta, oznaczające położenia szafek centralek oraz liczby $c_1, c_2, \dots, c_n$ proporcjonalne do kosztów jednostki długości kabli mających połączyć odpowiednie szafki z centralą główną, zagadnienie sprowadza się do znalezienia punktu Q na mapie, przy którym funkcjonal $\Phi(Q) = \sum_{i=1}^n c_i r_i$ osiąga najmniejszą wartość, gdzie r_i oznacza długość kabla łączącego centralę Q z szafką P_i . Punkt Q istnieje i można go znaleźć analitycznie, co autorzy pokazują w pracy. Niestety możliwości obliczeniowe w tamtych czasach nie pozwalały na użycie tej metody. Zauważono, że można go znaleźć również metodą czysto mechaniczną. W tym celu wystarczy nakleić plan miasta na poziomą deskę, nawiercić otwory w punktach P_i oraz na nitkach przewleczonych przez te otwory zawiesić pod deską ciężary proporcjonalne do c_i a następnie nad deską związać końce wszystkich nitok w jeden węzeł W . Węzeł ten puszczony swobodnie wskaże środek miedzi, tj. punkt Q , który również realizuje minimum $\Phi(Q) = \sum_{i=1}^n c_i r_i$.

H. Steinhaus podał rozwiązanie zadania, w którym dane są dwie grupy osiedli, które trzeba połączyć w ten sposób, że dla każdej grupy osiedli buduje się po jednej centrali a ponadto centrale łączy się kablem o zadanej grubości.

Zagadnienie zainteresowało uczestników Seminarium do tego stopnia, że powstał projekt urządzenia małego warsztatu, w którym można by robić modele takie, jak ten do wyznaczania położenia centrali. Warsztatem miał opiekować się J. Battek.

8.6. Procesy kolejkowe

Zagadnienia teorii kolejek przyniósł do Wrocławia Józef Łukaszewicz ze swojego pobytu w 1960 roku w USA, gdzie przebywał jako stypendysta Fundacji Forda na Uniwersytetach w Yale oraz w Północnej Karolinie, w Chapel Hill. Wygłosił referat *Teoria kolejek czyli obsługi masowej* i opublikował obszerną pracę o tym samym tytule [40]. Pod Jego opieką pracę doktorską *Zastosowanie włożonych łańcuchów Markowa w teorii kolejek*, napisała Ilona Kopocińska (1966). Właściwym forum dla tej teorii było oddzielne seminarium z *teorii kolejek i zagadnień pokrewnych*,

prowadzone w UW r od roku 1963. Na seminarium Steinhausa referaty z tej tematyki wygłaszali między innymi B.W. Gniedenko (Moskwa) oraz Takacs's Lajos (USA).

8.7. Architektura

Tematyka związana z architekturą pojawiła się trzy razy. Architekt Tadeusz Rutkowski mówił o historii architektury oraz możliwości datowania obiektów na podstawie rozmiarów cegły.

9. Statystyka.

Tematyka statystyczna pojawiała się na Seminarium w kontekście jej zastosowań do praktycznych problemów przynoszonych przez praktyków pracujących w różnych instytucjach oraz w kontekście zagadnień teoretycznych (ponad 50 razy). W tym ostatnim przypadku były to np. referaty dotyczące takich zagadnień teorii statystyki, jak charakteryzacja procesu Poissona, statystyki porządkowe, analiza wariancji, teoria estymacji, teoria testowania hipotez, teoria dyskryminacji, wielowymiarowa analiza statystyczna. Były również konkretne problemy aplikacyjne. Prof. H. Steinhaus wielokrotnie formułował zadania, pozornie proste, które stawały się przedmiotem ważnych publikacji. Dobry opis rezultatów badań teoretycznych osiągniętych przez grupę H. Steinhausa w zakresie statystyki przedstawił S. Zubrzycki w *O niektórych pracach Seminarium z Zastosowań Matematyki* [115], napisanej z okazji Jubileuszu 500. posiedzenia Seminarium. Badaną problematykę podzielił na następujące tematy: wiarygodność i reguła Bayesa, zagadnienia estymacji - zasada minimaks, długość empiryczna i kształt, szacowanie parametrów złożeń geologicznych, systematyczne rozmieszczenie na płaszczyźnie, tablice, badanie zespołu cech, taksonomia wrocławska i podział zbioru na części.

Poniżej wymienię niektóre wyniki uczestników Seminarium według tematów: estymacja, zasada minimaks, wycena towarów, zagadnienia SKJ, odbiór wodomierzy, porównywanie populacji, mierzenie przez porównywanie, dyskryminacja, liczby pseudolosowe.

Estymacja dyspersji. Tematyka związana z estymacją pojawiała się na Seminarium co najmniej 10 razy. Dotyczyła, np. znalezienia estymatorów wariancji, dyspersji, ich odwrotności oraz efektywności tych estymatorów. Prace na ten temat pisali F. Zitek i M. Gutman. F. Zitek w pracy [104] daje przegląd estymatorów odchylenia standardowego w populacji o rozkładzie normalnym, podając 10 estymatorów, ich obciążenia oraz wariancje. Gutman przedstawił estymator nieobciążony odwrotności dyspersji. Oparł swój estymator na całce z kwadratu gę-

stości, co przedstawił w pracy *O estymowaniu całki kwadratu gęstości* [20]. W pracy tej wspomniano, że wzór na całkę z kwadratu gęstości podał S. Zubrzycki.

Zasada minimaks - estymacja prawdopodobieństwa sukcesu i liczebności populacji. Problem estymacji minimaksowej we Wrocławiu został zapoczątkowany pracą H. Steinhausa [83] z 1957, kiedy rozważał minimaksowy estymator $\hat{p} = (m + \sqrt{n}/2)/(n + \sqrt{n})$, (nieopublikowany estymator Rubina), prawdopodobieństwa sukcesu w próbach Bernoulliego, gdzie m jest liczbą sukcesów w n próbach. Estymator ten jest minimaksowym estymatorem prawdopodobieństwa sukcesu p . Jest on obciążony ale w przypadku $p = 1/2$ ma mniejszą dyspersję, równą $1/2\sqrt{n+1}$, niż estymator nieobciążony $\bar{p} = m/n$, którego dyspersja jest równa $1/2\sqrt{n}$. H. Steinhaus w [88] pisze, że estymator ten daje rozwiązanie problemu estymacji statystycznej za pomocą teorii gier, obejmuje przypadki nie objęte przez Rubina i został zastosowany przy szacowaniu pracowitości robotników PAFAWAGU.

Kolejnymi pracami z tej tematyki były prace S. Trybuły [96] i [97], w których znalazł minimaksowy estymator parametrów dla wielowymiarowego rozkładu hipergeometrycznego i rozkładu wielomianowego.

Estymator minimaksowy w całym zbiorze parametrów może nie mieć tej własności na podzbiorze parametrów. Dzan Dzo-i w pracy [15] znalazł minimaksowy estymator parametru sukcesu p , gdy $0 \leq a \leq p \leq b \leq 1$. S. Zubrzycki w [114] znalazł minimaksowy estymator parametru rozkładu gamma ograniczony do pewnego podzbioru półprostej.

Wycena towaru. Tematyka wyceny statystycznej wiąże się z statystyczną kontrolą jakości (SKJ). Była badana głównie przez grupę kierowaną przez J. Oderfelda, ale aktywnie w tych badaniach uczestniczyła grupa H. Steinhausa. Pierwszym, podstawowym, ale nie ostatnim, dziełem w tej tematyce była praca H. Steinhausa *Wycena statystyczna jako metoda odbioru towaru produkcji masowej* [73]. W pracy dyskutuje się związek między kosztami badania, a osiąganą dokładnością estymatora. Podano w niej minimaksowy estymator $\hat{n} = (5Ndk)^{2/3}$ liczebności n próby badanej, gdzie N jest liczebnością partii, d rozstępem, a k kosztem badania sztuki. W tematyce wyceny towaru należy wspomnieć o metodzie pragmatycznej zaproponowanej przez H. Steinhausa.

Inne zagadnienia w SKJ. Oderfeld i jego grupa napisała sporo prac z tematyki SKJ, z których wiele jest publikowanych w "Zastosowaniach Matematyki". Dotyczą one wyceny towaru, gdy mamy pewne informacje o funkcji opisującej rozkład wartości badanej cechy wewnątrz geometrycznej figury opisującej bryłę danego towaru. Przypadek, gdy

funkcja opisująca wartość badanej cechy jest ogólniejsza niż rozważano w grupie Oderfelda był rozważany przez S. Zubrzyckiego w [113]. W tematyce dotyczącej SKJ należy wspomnieć o migawkowym badaniu czynności fabryk. Czen Pin i Dzan Dzo-i rozważali zagadnienie estymacji czasu wykorzystania dnia roboczego przy pomocy metody migawkowej w [9]. W badaniu tym użyli estymatora Rubina.

Sprawdzanie wodomierzy. Ważnym problemem w Statystycznej Kontroli Jakości (SKJ) było sprawdzanie zgodności wyprodukowanego detalu z detalem wzorcowym. Wynik pomiaru może być obarczony dwoma błędami, błędem systematycznym i błędem pomiaru. Problem SKJ polega na sprawdzeniu czy błąd systematyczny nie przekracza z góry ustalonej wielkości. Pewien model takiego sprawdzania przedstawił J. Obalski w [45] na przykładzie legalizacji wodomierzy. Problem ten był rozważany również we wspólnej pracy J. Oderfelda z S. Zubrzyckim [46] i Zubrzyckiego [108]. Urząd Miar legalizuje wodomierze na podstawie wyniku m pomiaru błędu wodomierza, gdzie

$$m = \frac{\text{wskazanie wodomierza minus wskazanie przyrządu wzorcowego}}{\text{wskazanie przyrządu wzorcowego}}.$$

Urząd ustala liczbę q , zwaną największym błędem systematycznym oraz procedurę, według której decyzja o wodomierzu podejmowana jest po jednokrotnym lub dwukrotnym pomiarze błędu. Niech m_1 i m_2 będą wynikami pierwszego i drugiego pomiaru. Wtedy wodomierz uważa się za dobry, zły lub kieruje się go do powtórnego badania w zależności od następujących relacji

$$|m_1| \leq 0,9q; \quad |m_1| \leq 1,1q; \quad 0,9q < |m_1| \leq 1,1q.$$

W przypadku ostatnim wodomierz jest badany powtórnie i uważa się go za dobry, gdy $|m_1 + m_2|/2 \leq q$ i zły w przeciwnym wypadku. Przyjmuje się, że wynik pomiaru jest sumą błędu systematycznego X oraz niezależnego z nim błędu pomiaru $m - X$. We wspomnianych pracach przyjmuje się, że X ma rozkład normalny o średniej $a \geq 0$ i wariancji σ_0^2 , natomiast błąd pomiaru ma rozkład normalny o średniej zero i wariancji σ_1^2 . Przyjmuje się, że wartości a, σ_0, σ_1 i q są znane. W związku z badaniem nasuwają się dwa pytania. Pierwsze stawia odbiorca, pytając jakie jest prawdopodobieństwo, że detal uznany za dobry jest naprawdę dobry. Drugie stawia wytwórca, który chce wiedzieć jakie jest prawdopodobieństwo, że detal wykonany przez niego będzie uznany za dobry. Odpowiedzią na pierwsze pytanie zajmuje się praca J. Obalskiego [45], a odpowiedzią na drugie pytanie zajmuje się praca J. Oderfelda i S. Zubrzyckiego [46]. J. Obalski stawiał również postulat zapewnienia jak

największego prawdopodobieństwa, że wodomierz uznany za dobry jest naprawdę dobry.

Steinhaus zauważył, że właściwą dobrocią wodomierza jest jego błąd systematyczny. Zatem, zamieniając $0.9q$ przez α , $1.1q$ przez β i q przez γ , należy znaleźć takie α , β i γ , przy których wartość oczekiwana kwadratu błędu systematycznego będzie najmniejsza. Problem ten rozwiązał S. Zubrzycki w [109].

Profesor H. Steinhaus wspomina w [89], str. 452, że w 1960 roku został zaproszony z wykładem do Fabryki Wodomierzy we Wrocławiu, gdzie wygłosił popularny wykład z swojej specjalności, który spotkał się z dużym zainteresowaniem tamtejszych pracowników.

Porównywanie populacji. Zagadnienia z tej tematyki są szczególnie ważne, gdy mamy zdecydować czy nowa technologia lub procedura, jest lepsza lub nie gorsza od wcześniejszych. Z problematyką tą związane są następujące prace: W. Sadowski [65], J. Łukaszewicz i W. Sadowski *O porównaniu kilku populacji z populacją kontrolną* [37], A. Romejko *Porównanie dwóch partii towaru* [62], H. Steinhaus i S. Zubrzycki *O porównaniu dwóch procesów produkcyjnych i zasadzie dualizmu* [92].

W pierwszej pracy autor rozważa k populacji ciągłych, różniących się między sobą co najwyżej wariancją, które nie są znane. Podaje test istotności dla hipotezy zerowej, że wszystkie wariancje są takie same przeciwko hipotezie alternatywnej.

W drugiej pracy autorzy zakładają, że wszystkie te populacje mają ciągle dystrybuanty $F(x - a_1), F(x - a_2), \dots, F(x - a_k)$ odpowiednio i podają test dla hipotezy zerowej, że wszystkie dystrybuanty mają tę samą średnią, tj. $a_1 = a_2 = \dots = a_k$, przeciwko hipotezie alternatywnej.

W [62] i [92] podano różne metody porównywania dwóch partii towaru ciągłego ze względu na występujące w nim wady (np. plamy na suknie, itp). Z grubsza mówiąc, mamy dwie rolki takiego samego materiału, które równocześnie się przewijają i na podstawie zauważonych wad na obu tych rolkach mamy porównać te rolki i przetestować hipotezę zerową, że pod względem liczby wad te rolki nie różnią się istotnie statystycznie. Przyjęto, że liczba wad występująca w każdym towarze ma rozkład Poissona. Podano wzór $P_n(m)$ na prawdopodobieństwo pojawienia się m wad w partii towaru II przy warunku, że w partii towaru I pojawiło się n . W [92] problem ten rozważano wieloma sposobami.

Dokładność pomiarów przyrodniczych. H. Steinhaus zauważył, że wyniki badań przyrodniczych, ogólnie antropometrycznych, nie są tak dokładne, jak to zakładano przy ich pobieraniu. Analizę dokładności tych badań przeprowadziła A. Huskowska w [21] na przykładzie

wyników pomiaru czaszek szczurzych (długość podstawy czaszki, szerokość czaszki, wysokość potylicy), pomiarów stopy poborowych (długość stopy, wysokość kostki, obwód przez palce, obwód przez podbicie, obwód przez piętę i podbicie), czaszek ludzkich (wysokość czaszki, długość czaszki). Gdyby pomiary te były rzetelnie przeprowadzone, tzn. z taką dokładnością, na jaką wskazuje ilość zapisywanych cyfr, to końcowe cyfry 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, występowałyby w przybliżeniu z taką samą częstością. W wymienionych wynikach badań okazało się, że cyfry 0 i 5 pojawiają się znacznie częściej niż pozostałe. Wartość testu chi-kwadrat, obliczona dla ilości różnych cyfr na ostatnim miejscu, w wynikach pomiaru długości podstawy czaszki szczura wyniosła 246,6, ale prawdopodobieństwo takiego wyniku jest znikome. Główną niestosownością omawianych błędów było zaokrąglanie. Dla zapobieżenia błędom H. Steinhaus zaproponował specjalną podziałkę, w której cechuje się nie kreski, ale przedziały między kreskami na podziałce.

Mierzenie przez porównywanie. Problem mierzenia i porównywania występuje u H. Steinhausa już w jego *Kalejdoskopie matematycznym* oraz w stawianych problemach związanych z turniejami. Na Seminarium problem ten przybrał matematyczną postać, w wyniku czego powstały dwie prace H. Steinhausa, jedna wspólna z J. Łukaszewiczem [36], a druga z S. Trybułą [90]. W pierwszej skonstruowano optymalny algorytm porządkowania według pewnej cechy numerycznej, np. ciężaru, wielkości, itp. Podano też minimalną liczbę kroków w tym algorytmie.

W drugiej ([90]) rozważano problem podziału odcinka $[0, 1]$ na k rozłącznych przedziałów $S_1, S_2, \dots, S_k$ tak, by z informacji $x \in S_i$ ocenić x z możliwie największą dokładnością. Zagadnienie to można wysłowić również w innych kontekstach. Np., jak dobrać odważniki, by z daną dokładnością ocenić ciężar ciała w możliwie najmniejszej ilości ważeń. Możliwe jest także pytanie, jaki jest najekonomiczniejszy sposób ważenia i oceny, jeśli znana jest materialna strata z możliwego błędu oceny, gdy każde ważenie kosztuje określoną kwotę. Celem tej pracy było znalezienie rozwiązań wspomnianych zagadnień stosując zasadę minimaksową. Wspomniane zagadnienie rozważał również F. Zitek w [105] metodą teorii informacji.

Na zakończenie tej tematyki warto wspomnieć, że na 355. posiedzeniu H. Steinhaus zakomunikował nowe wyniki w sprawie uporządkowania, co do wagi, k przedmiotów za pomocą jak najmniejszej liczby t ważeń. Pozostały otwarte pytania, czy do uporządkowania k przedmio-

tów wystarczy t ważeń dla

k	12	22	25	28
t	29	70	84	98

Dyskryminacja. Problem *dyskryminacji*, zwanej również *klasyfikacją*, polega na klasyfikowaniu nowo pojawiających się obiektów do odpowiedniej klasy, gdzie klasy są określone przez rozkłady z góry zadane. Zagadnienie jest stosunkowo proste, gdy cecha jest jednowymiarowa. W przypadku wielowymiarowym R.A. Fisher zaproponował transformowanie obserwacji na prostą rzeczywistą poprzez pewną funkcję liniową zwaną funkcją dyskryminacyjną Fishera i w oparciu o tę funkcję proponuje klasyfikować obserwacje. Funkcja ta jest wyznaczona przez wektor własny maksymalnej wartości własnej pewnej macierzy. J. Perkal w swojej ostatniej pracy [57] proponuje rzutować obserwacje nie na prostą, ale na odpowiednią płaszczyznę, przy której rzuty byłyby najlepiej rozdzielone, co stwarza możliwość oglądowego poznania zbioru obserwacji. Płaszczyzna ta jest wyznaczona przez wektory własne dwóch największych wartości własnych pewnej macierzy. S. Zubrzycki w [116] wprowadza w metodzie Perkala modyfikację polegającą na tym, że transformuje macierz kowariancji rozkładu do macierzy jednostkowej. Modyfikacja Zubrzyckiego pozwoliła mu na podanie związku kryterium wyznaczania płaszczyzny dyskryminacji z innymi kryteriami spotykanymi w literaturze.

Metody dyskryminacji matematycznej były używane przez M. Warmusa w pracach wspólnych z lekarzami w diagnostycznych badaniach lekarskich, a lista prac z nimi związanych podana jest w pracy S. Zubrzyckiego [116].

Liczby losowe. Problematyka ta pojawiła się na seminarium ponad 20 razy. Liczby losowe (pseudolosowe) wykorzystywane są w wielu sytuacjach. Jedną z nich jest, gdy spośród N elementów ponumerowanych od 1 do N mamy wylosować n elementów, w celu ich przebadania. W sytuacji tej zwykle wykorzystywano tablicę liczb losowych. H. Steinhaus w [79] wspominał, że taka tablica 10000 liczb czterocyfrowych zawiera średnio 6321 różnych liczb, a pozostałe są powtórzeniami, co może być niekorzystne, bo wiadomo jakich liczb tablica nie zawiera. Wobec tego skonstruował tablice 10000 liczb od 0 do 9999 zwaną tablicą *liczb przetasowanych*. H. Steinhaus w [79] pisze o praktycznej niemożliwości wykrycia prostych związków między kolejnymi liczbami przetasowanymi. Tablica ta składa się z 25 kart, na każdej karcie jest 400 liczb czterocyfrowych. W celu pobrania n liczb należy wziąć na dowolnej karcie

dowolną liczbę za początkową, a następnie wczytać n liczb sposobem książkowym.

Jak wiadomo liczby losowe wykorzystuje się do obliczania całki

$$\int_0^1 f(u)du,$$

mając na myśli granicę $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$, gdzie $x_k, 1 \leq k \leq n$ są realizacjami zmiennych losowych $X_k, 1 \leq k \leq n$, wzajemnie niezależnych, o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Jednym z mankamentów tej metody jest to, że liczby te na ogół nie są równomiernie rozłożone w potocznym intuicyjnym rozumieniu. Z drugiej strony wiadomo, że jeżeli ciąg $\{y_n\}$ ma własność *ekwipartycji* w odcinku $(0, 1)$, to dla funkcji ciągłej f mamy $\int_0^1 f(u)du = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(y_k)$. Wiadomo, że ciąg $\{nv - [nv], n \geq 1\}$ ma własność ekwipartycji w $(0, 1)$ dla każdej liczby niewymiernej v . Ponieważ liczba złota $z = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, jest liczbą niewymierną, więc H. Steinhaus w [84] sugeruje przybliżać powyższą całkę przez $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(kz)$, gdy f ma okres równy 1.

Niech J oznacza dowolny odcinek w $(0, 1)$, a $L(n, J)$ liczbę tych $kz - [kz], 1 \leq k \leq n$, które wpadają w J . Wtedy przy każdym $n \geq 10$ spełniona jest nierówność $|L(n, j) - n|J|| \leq 36 \log n$. Wiadomo, że dla ciągu $\{X_n\}$ zmiennych losowych wzajemnie niezależnych o tym samym rozkładzie o średniej m i wariancji σ^2 i $0 < \lambda < 1$ z prawdopodobieństwem jeden zachodzi nierówność $|X_1 + X_2 + \dots + X_n - mn| > \lambda \sigma \sqrt{2n \log \log n}$. To uzasadnia konstrukcję tablicy liczb złotych $\{nz, n \geq 1\}$, choćby w zastosowaniu do szacowania wspomnianej całki.

Kolejnym pomysłem H. Steinhausa jest ciąg liczb żelaznych. Dla jego konstrukcji porządkujemy ciąg liczb $nz - [nz], n \geq 1$, w ciąg rosnący $n_1z - [n_1z], n_2z - [n_2z], n_3z - [n_3z], \dots$. Utworzony wtedy ciąg liczb naturalnych $n_1, n_2, n_3, \dots$ nazywa ciągiem liczb żelaznych. Pierwszych 10 liczb żelaznych jest równe 5, 10, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 3, 8. Jeżeli rozważymy liczby $nz - [nz], 1 \leq n \leq N$, dla $N = 10000$ i postąpimy podobnie jak poprzednio, tzn. uporządkujemy je w ciąg rosnący $n_1z - [n_1z], n_2z - [n_2z], n_3z - [n_3z], \dots, n_Nz - [n_Nz]$, to otrzymamy pewną permutację $n_1, n_2, \dots, n_N$ liczb naturalnych od 1 do N włącznie. Tablica tych liczb nazywa się tablicą *liczb żelaznych*. Liczby 1, 2, 3, $\dots$, w tablicy tej zapisujemy jako 0001, 0002, 0003, $\dots$. Tablica liczb żelaznych ma własność *proporcjonalnej reprezentacji*, czyli własność rozstawiania kolejnych liczb żelaznych po wszystkich przedziałach $c \leq n \leq d$ proporcjonalnie do długości $d - c$ tych przedziałów, co w pewnych sytuacjach jest dobrą własnością.

Wykorzystując krzywą Peano H. Steinhaus skonstruował tablicę punktów złotych na kwadracie, a następnie w dowolnym obszarze płaskim. Tablica tych liczb może mieć znaczenie przy próbkowaniu na obszarach płaskich, co było wykorzystywane przez S. Zubrzyckiego w zagadnieniu estymacji średniej złoża miedzi [109]. Tablicę 248 takich punktów złotych na kwadracie (z objaśnieniem jak ich używać w dowolnym obszarze płaskim) podała L. Zubrzycka w *O rozmieszczeniu punktów próbkowych na płaszczyźnie* [119].

H. Steinhaus w [88], str. 9, pisze, że jego tablica liczb losowych została użyta do wielkiego zdjęcia polskiego wykonanego przez Komisję Antropometrii PAN.

10. Astronomia

Tematy związane z astronomią pojawiły się na seminarium 9 razy. Owocnym było zabawne zagadnienie profesora Włodzimierza Zonna (Warszawa), dotyczące łańcuszkowości gwiazd, tj. pytanie czy gwiazdy układają się w łańcuszki. Zagadnienie to badał S. Zubrzycki [106] w oparciu o dwie mapki gwiazd, o różnej jasności, dostarczone mu przez W. Zonna oraz swoją mapkę losowych punktów umieszczonych na płaszczyźnie. Na każdej mapce zbudował dendryty. Przyjął kryterium, że jeżeli liczba węzłów o dwóch rozgałęzieniach w dendrycie jest statystycznie istotnie większa niż w dendrycie na mapce punktów losowych, to przemawia to za hipotezą o łańcuszkowości gwiazd. Stosując statystykę chi-kwadrat stwierdził, że gwiazdy nie tworzą konstelacji łańcuszkowej. Do takiego samego wniosku doszedł stosując wskaźnik zagęszczenia Steinhaus, tj. biorąc stosunek wariancji do średniej w każdym oczku siatki o równych polach. W przypadku tym przyjął założenie, że liczba gwiazd w każdym oczku siatki ma w przybliżeniu rozkład Poissona. W przypadku rozkładu Poissona wskaźnik zagęszczenia jest równy jedności. Z otrzymanego materiału otrzymał, że wskaźniki zagęszczenia różniły się od jedności nieistotnie, co potwierdziło wcześniej otrzymany wniosek.

Pozostaje pytanie, czy z faktu, że rzut gwiazd na sferę niebieską nie zawiera łańcuszków, wynika, że w przestrzeni nie ma łańcuszków. Można domniemywać, że łańcuszki w przestrzeni i łańcuszki na rzucie są zjawiskami niezależnymi i np. przy występowaniu łańcuszków w przestrzeni może się zdarzyć, że rzut gwiazd na sferę łańcuszków zawierać nie będzie.

Rozważano także problem związku liczby plam na słońcu z przyrostem sosny na podstawie materiałów Jana Mergentalera (profesor Uniwersytetu Wrocławskiego, astronom, kierownik Katedry Heliofizyki i Astronomii Gwiazdowej).

11. Matematyka

Tematyka ściśle matematyczna pojawiała się na seminarium około 80 razy. Były to referaty na temat równań liniowych, praw Kirchhoffa i prądów oczkowych (referował Z. Finkelstein), dokładności przybliżenia rozkładu Poissona przez rozkład normalny (M. Fisz, [17]). Wiele problemów rozważanych na Seminarium było sformułowanych przez H. Steinhaus. Poziom ich był bardzo różny. Niektóre przypominały raczej zagadki. Poniżej wymieniam niektóre z nich:

- funkcje $\phi(t)$ i $\psi(t)$ w krzywej Peano na $[0, 1]$ są pozbawione pochodnej, suma iloczynu i ilorazu też. Czy superpozycja tych funkcji rzeczywistych na odcinku $[0, 1]$ ma pochodną?
- czy każda krzywa przestrzenna, regularna, niezwięzona daje się otrzymać przez odpowiednie zgięcie papieru, na którym jest narysowana odpowiednia krzywa płaska?
- czy w bryle wypukłej dowolny punkt może być środkiem ciężkości kawałka odciętego płaszczyzną? (rozwiązał H. Steinhaus);
- jak z przystających rombów wymodelować pół sfery, lub kulę?
- jak nałożyć dwie krzywe na siebie, aby suma ich kartezjańskich odległości od siebie była minimalna?
- jak skierować k promieni w przestrzeni, aby minimalny kąt między dwoma promieniami był maksymalny (dla $k = 3, \alpha_{\max\min} = 120^\circ$, są to trzy promienie w jednej płaszczyźnie, dla $k = 4, \alpha_{\max\min} = \pi - \arccos 1/3$, są to kierunki boków czworościanu, dla $k = 6, \alpha_{\max\min} = 90^\circ$, są to kierunki osi prostokątnego układu współrzędnych);
- jak podzielić ciało materialne na części, których suma momentów bezwładności względem środków ciężkości jest minimalna (rozważali H. Steinhaus [82] i B.Kopociński [23]);
- jaka jest postać krzywej, którą zakreślają wierzchołki trójkąta równobocznego i która nie jest kołem (rozwiązał B.Kopociński [24]);
- jaka jest postać wykresów ruchu trzech i pięciu kul sprężystych o równych masach?
- jakie jest prawdopodobieństwo zderzenia kul bilardowych, których prędkości są znane?
- na płaszczyźnie dookoła każdego punktu o wierzchołkach całkowitych narysowane są kółka. Gdy dany jest wielobok, którego wierzchołki są punktami kratowymi, to dla każdego punktu kratowego określona jest frakcja kółka, którego on jest środkiem, leżąca wewnątrz wieloboku. Wiadomo, że suma tych frakcji jest równa polu

tego wieloboku. Pytanie jest, czy prawdziwy jest przestrzenny analogon tego twierdzenia?

- jak należy drukować banknoty, aby najłatwiej płacić?
- zagadnienie o liczbach niezależnych: Wiadomo, że jeżeli macierz kwadratowa $A = (a_{i,k})$ ma ortogonalne wiersze, to wtedy i kolumny też są ortogonalne. Dla macierzy $(a_{i,k})$ określmy na $(0, 1)$ dwie rodziny po n funkcji w następujący sposób:

$$f_i(x) = a_{i,k}, \quad \text{dla} \quad \frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$g_k(y) = a_{i,k}, \quad \text{dla} \quad \frac{i-1}{n} < y \leq \frac{i}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Pytanie, czy niezależność zbioru $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ implikuje niezależność $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Zagadnienie rozstrzygnięto negatywnie.

- zagadnienie I (H. Steinhaus): Czy powierzchnia homeomorficzna ze sferą, gładka, dostatecznie regularna (np. rzędu regularności C_3) mająca tę własność, że relacja największej odległości między dwoma punktami (odległość mierzy się wzdłuż brachistochrony) jest symetryczna dla każdej pary punktów, jest sferą?
- zagadnienie II (K. Urbanik): Czy powierzchnia spełniająca te warunki topologiczne i warunki regularności, co w zagadnieniu H. Steinhausa i mająca tę własność, że odległość każdej pary punktów najdalszych jest stała, jest sferą?

B. Gleichgewicht uważał, że w obu powyższych zagadnieniach (Steinhausa i Urbanika) odpowiedź jest negatywna. Twierdził, że kontrprzykładem jest elipsoida obrotowa otrzymana przez obrót elipsy dookoła osi mniejszej, gdyż punktami najdalszymi są antypody (dowodu nie przedstawiono);

- H. Steinhaus: Jak należy pokolorować 36 pól w ruletce w Monte Carlo, aby następujące trzy gry: A gra na numery parzyste, B gra na pola czerwone i C gra na numery małe i duże, były parami niezależne. Nie można tak pokolorować, aby były niezależne *en bloc*;

Pytania H. Steinhausa związane z odwzorowaniami obszarów płaskich na inne figury są pewnie związane z jego wspomnieniami z Getyngi i z twierdzeniem B. Riemanna dotyczącym analitycznego odwzorowania obszaru płaskiego jednospójnego na koło. Konstrukcję funkcji odwzorowującej konforemnie dowolny obszar płaski jednospójny na koło podał

F. Leja w pracy [33].

Jedno z najsłynniejszych pytań H. Steinhausa wiąże się z tzw. *paradoksem trzech zmiennych losowych*. H. Steinhaus i S. Trybuła w [91] podali przykład trzech niezależnych zmiennych losowych X, Y, Z , takich, że

$$P(X > Y) > 1/2, \quad P(Y > Z) > 1/2 \quad \text{ i } \quad P(Z > X) > 1/2.$$

Następnie H. Steinhaus zadał pytanie, dla jakich trójek liczb rzeczywistych ξ, η, ζ istnieją trzy niezależne zmienne losowe X, Y, Z , takie że

$$P(X < Y) = \xi, \quad P(Y < Z) = \eta, \quad P(Z < X) = \zeta.$$

Odpowiedź na to pytanie dał S. Trybuła w [98]. W szczególności zachodzi to, gdy $\xi = \eta = \zeta$ oraz $(3 - \sqrt{5})/2 \leq \zeta \leq (\sqrt{5} - 1)/2$.

S. Trybuła w [99] rozważał ogólniejszy problem, dla jakich układów liczb $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ istnieją zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$, takie, że

$$P(X_i < X_{i+1}) = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{ oraz } \quad P(X_n < X_1) = \xi_n. \quad (1)$$

Sformułowane zagadnienie ma interpretacje praktyczne. Jedną z nich dotyczy gier, w których każdy gracz gra z każdym. Przyjmijmy, że gracz G_1 bije gracza G_2 , jeżeli częściej z nim wygrywa. Wtedy może zdarzyć się sytuacja, że gracz A bije gracza B, gracz B bije gracza C, a gracz C bije gracza A. Wytlumaczenie tego zjawiska wynika z podanego przykładu zmiennych losowych w [91], gdy przyjmiemy, że moc każdego gracza jest zmienną losową i wygrywa ten gracz, który w danej chwili ma większą moc.

Innym zastosowaniem rezultatu z [99] jest odpowiedź na zagadnienie postawione przez H. Steinhausa, dotyczące wyznaczenia wartości $\pi_n = \max_X \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, gdzie supremum jest brane po wszystkich wzajemnie niezależnych zmiennych losowych X_i z wektora $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ spełniających warunek (1). Pokazano, że dla $n \geq 2$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{n(n+4)} \leq \pi_n < \frac{3}{4}.$$

Tematyka związana z wspomnianym problemem H. Steinhausa była rozważana przez wielu matematyków przez wiele lat, a wspomniane prace były wielokrotnie cytowane zarówno w pracach jak również w monografiach.

12. Gry i Turnieje

Tematyka turniejów i różnego rodzaju układów gier interesowała H. Steinhausa od młodości. We *Wspomnieniach* [86, 87, str. 77] pisze, że w roku 1913, w Krakowie, często kierował turniejami. Interesował go *sprawiedliwy* sposób wyłaniania graczy na trzy pierwsze miejsca. Pisze: *... jeden z moich uczniów, J. Schreier z Drohobycza, udowodnił, że system 'brunszwicki' jest najkrótszym ze sprawiedliwych, jeżeli ograniczymy się do dwóch pierwszych miejsc. To twierdzenie, z zakresu machistyki, było na pewno nieznane wielu tenisistom; także tablice handicapowe - przynajmniej te, które wydał Polski Związek Tenisowy - były błędne. Rachunek prawdopodobieństwa może dać poprawne tablice, ale wątpię, żeby ktoś kwalifikowany podjął się takiej pracy.*

Tematyka gier, turniejów oraz porządkowanie graczy i przedmiotów, ze względu na różne cechy, wracała na Seminarium wielokrotnie (około 50 razy). Rozważane problemy na seminarium można podzielić na wiele sposobów. Wśród nich poruszono następujące problemy: moc drużyny, moc gracza, cechy motoryczne boksera, dobroć boksera, gry losowe - *Karolinka* i *Liczyrzepka*, zagadnienia z porządkowaniem kamieni, zagadnienie sekretarki.

Moc gracza, moc drużyny. H. Steinhaus zaproponował charakteryzację mocy drużyny i gracza poprzez cechy, które są zmiennymi losowymi, wzajemnie niezależnymi o danych wartościach oczekiwanych i wariancjach (np. o rozkładach normalnych). Jest to uzasadnione standardowo tym, że sprawność gracza zależy od wielu czynników zewnętrznych i wewnętrznych.

Dobroć boksera. Dobroć boksera można również charakteryzować przez zmienne losowe. J. Perkal, H. Milicerowa, dr Fiński (AWE) i W. Szwarz uznali, że wielkość tę należy charakteryzować wielowymiarowo. Porównywano cechy mistrzów z innymi bokserami określonej wagi, porównywano cechy morfologiczne bokserów z szermierzami. Dr Fiński mówił o badaniach bokserów ze względu na cechy motoryczne. Uwagi na ten temat można znaleźć w artykule H. Milicerowej *Zastosowanie wskaźników Perkala do charakterystyki budowy ciała bokserów* [43].

Rozgrywki turniejowe. Problem dotyczący rozgrywek turniejowych wzbudził zainteresowanie uczestników Seminarium. H. Steinhaus postawił zagadnienie, jak wyznaczyć 3 najlepszych graczy i jak wygląda sprawa, gdy są dane jedynie prawdopodobieństwa, że gracz pokona innego gracza. Wygłoszony referat był związany z optymalnością systemu gry i metodami rozgrywek. Przy tablicy rozwiązywano zadanie, jakie jest prawdopodobieństwo, że finalista wyznaczony systemem pucharowym jest w istocie wicemistrzem (drugim co do mocy). H. Steinhaus

mówił także o zagadnieniu najlepszego rozstawienia graczy, przy grze parami, gdy chodzi o maksymalną oczekiwaną liczbę wygranych partii przez drużynę, a znane są jedynie prawdopodobieństwa wygrania partii dla każdej pary graczy. Pytania te zilustrował następującym zadaniem.

Dwie czteroosobowe drużyny A i B składające się z graczy a_1, a_2, a_3, a_4 i b_1, b_2, b_3, b_4 mają rozegrać mecz. Mecz polega na rozegraniu czterech partii między czterema parami graczy. Wygrywa mecz ta drużyna, której gracze wygrali więcej partii. Rozegranie partii rozumiemy jako porównanie niezależnie zrealizowanych mocy graczy. Wygrywa partię ten gracz, którego moc okazała się większa. Moce graczy traktujemy, jako zmienne losowe. Przyjmujemy, że wszystkie mają rozkład normalny i dyspersję równą $\sqrt{0,5}$, a różnić się mogą wartościami oczekiwanymi. Przyjmujemy następujące wartości oczekiwane mocy:

$$E(a_1) = 0; E(a_2) = 0,2; E(a_3) = 0,4; E(a_4) = 0,6;$$

$$E(b_1) = 0,1; E(b_2) = 0,3; E(b_3) = 0,5; E(b_4) = 0,7.$$

Pytanie, przy jakim ustawieniu graczy w pary drużyna A ma największe prawdopodobieństwo wygranej (to samo dla drużyny B). Zadanie rozwiązywała L. Jakowlewa (L. Zubrzycka).

H. Steinhaus pytał również, czy jeśli gracze będą scharakteryzowani, np. trójkami uporządkowanymi zmiennych losowych, to czy można tę trójkę zmiennych losowych zastąpić przez jedną zmienną losową, której wartości decydowałyby o wygranej.

Gry liczbowe. Problem dotyczący gier losowych, (katowicka gra liczbowa *Karolinka* i wrocławska gra liczbowa *Liczyrzepka*) wzbudził duże zainteresowanie. Powodem były duże różnice w grze *Karolinka* między liczbą wygranych drugiego stopnia (jedna liczba źle skreślona), a oczekiwaną liczbą tych wygranych. Problem ten badali B. Gleichgewich, J. Kucharczyk i H. Steinhaus w *Uwagi o grach liczbowych* [19]. Obliczając prawdopodobieństwa liczby osób wygranych dla każdego stopnia oraz ich oczekiwane wartości, zauważyli dużą rozbieżność między oczekiwanymi liczbami wygranych, a rzeczywistymi liczbami wygranych. Np. w 11. grze *Karolinka* przy liczbie 3056255 grających było 101 wygranych II stopnia zamiast teoretycznie wygranych 29,6 a w 15. grze przy 3077289 grających było 68 wygranych II stopnia zamiast teoretycznie oczekiwanych 29,8. Ilość ta przekraczała oczekiwaną rozkładu Poissona o 13 odchyleń średnich, a w drugim przypadku o 7 odchyleń średnich. Tę anomalię autorzy wytłumaczyli upodobaniem graczy do pewnych liczb oraz do deseni i wzorców.

Gry specjalne. Kolejny problem był związany z grami specjalnymi. Jedną z nich była gra wymyślona przez J. Łosia. Szpieg służący Amerykanom i Chinczykom donosi Chinczykom o pozycji Amerykanów, potem Amerykanów zawiadamia, że Chinczyki wiedzą, potem Chinczyków, że Amerykanie wiedzą, następnie że Chinczyki wiedzą, itd. Pytanie: jak długo te informacje o informacjach mają jakąś wartość?

Druga gra, znana w ciekawej wersji jako *problem sekretarki*, dotyczyła strategii wyboru najcenniejszego kamienia. Maharadża przekłada kamienie z jednej skrzyni do drugiej. Wiadomo, ile jest kamieni. Można z tych kamieni wybrać tylko jeden. Wybierający nie zna tych kamieni, ogląda je gdy Maharadża je przekłada. Zadanie polega na podaniu algorytmu wyboru najcenniejszego kamienia, w trakcie ich przeglądania, tak aby zapewnić największe prawdopodobieństwo, że się wybierze kamień najdroższy.

13. Metody i Instrumenty

W artykule *Fenomen Steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej, Zarys koncepcji* [94] wymieniałem dyscypliny naukowe i ich reprezentantów uczestniczących w Seminarium. Tutaj przypominałem najważniejsze problemy owych dyscyplin, rozważane na Seminarium. Poniżej przedstawię niektóre matematyczne metody i narzędzia użyte przy rozwiązywaniu wymienionych problemów. Ponadto wspomnę o technicznych instrumentach, które stworzyli matematycy związani z Seminarium.

Metody rozwijane. Należy podkreślić, że matematycy uczestniczący w Seminarium nie tylko stosowali znane metody i narzędzia, ale je z sukcesem rozwijali. Koronnym przykładem tego jest *teoria estymatorów minimaksowych*. Na Seminarium wprowadził ją prof. H. Steinhaus [83], a później rozwijali ją, Stefan Zubrzycki, Stanisław Trybuła i ich uczniowie. Również rozwijano tematykę *teorii gier* w powiązaniu ze statystyką. Prekursorem był prof. H. Steinhaus, a później kontynuował ją S. Trybuła, ze swą liczną grupą. Z tematyką tą wiąże się tzw. paradoks trzech zmiennych losowych, rozwiązany przez S. Trybułę, wielokrotnie cytowany, mający liczne zastosowania. Rozwijano również tematykę testów statystycznych dotyczących identyczności dwóch i k populacji. Pierwszą sytuację dotyczącą dwóch populacji rozważali H. Steinhaus i S. Zubrzycki [92]. Drugą sytuację rozważali J. Łukaszewicz i W. Sadowski w pracy [37], opartej na statystykach pozycyjnych, Kilka lat później, w latach siedemdziesiątych, tematykę statystyk porządkowych podjął B. Kopociński. Jego praca wspólna z W. Dziubdzielą [29] o k -tych rekordach jest jeszcze do dziś wielokrotnie cytowana. Ważnym osiągnięciem

Seminarium była tzw. *Taksonomia Wrocławska*, zainicjowana w roku 1951, oparta na *dendrycie*. Warto dodać, że pierwsze zastosowanie dendrytu jako narzędzia klasyfikującego pojawiło się w roku 1926 w pracy O. Borůvka [8], o czym matematycy wrocławscy dowiedzieli się później. Dendryt pojawił się na Seminarium podad 60 razy. Dyskutowano o nim w kontekście długości grafu, rozplaszczalności grafu, wskaźnika dobroci grafu, dendrytu dualnego, itp. J. Perkal i S. Zubrzycki rozwijali teorię dyskryminacji.

Metody stosowane. Metody, o których pisałem wyżej, stosowano do rowiązywania zagadnień praktycznych przynoszonych na Seminarium przez niematematyków.

Zastosowanie dendrytu jako narzędzia klasyfikacyjnego użyto na Seminarium przy wielu okazjach. Przypomnijmy je pokrótce w badaniach: antropologicznych (taksonomia czaszek), geografii (skład wiekowy ludności w podziale powiatowym kraju), biologicznych (charakterystyka lasów poprzez występowanie w nich wątrobowców i wątrobowców poprzez lasy w których występują), zoologicznych (badanie krzyżowania się kóz, mleczność krów) medycznych (dendryty seroantropologiczne, dendryty białaczek na tle widm białkowych, dendryt narodów świata na tle frakcji grup krwi), lingwistycznych (dendryt powinowactwa języków indoeuropejskich, dendryt dźwięków występujących w utworach literackich, charakterystyka języka muzycznego wielkich kompozytorów, dendryt w ustalaniu autorstwa, dendryt sonetów krymskich, dendryt pieśni ludowych), astronomii (badanie łańcuszkowości gwiazd).

Estymacja minimaksowa była stosowana przez uczniów J.Perkala i S.Zubrzyckiego, np. przy szacowaniu pracowitości pracowników PAFA-WAG oraz przy wycenie towaru.

Dyskryminację stosował M.Warmus we współpracy z lekarzami przy badaniu cukrzycy. Stosował ją również F. Szczotka przy badaniu wpływu jakości mąki na jakość chleba [93].

Metodę składowych głównych stosował J. Perkal przy analizie rozwoju dziecka, a także w badaniach związanych z charakterystyką drzewostanów. W obu przypadkach chodziło o znalezienie dwóch nieskorelowanych wielkości charakteryzujących wymienione cechy zbudowanych z wielkości, które naogół są mocno skorelowane.

Motody regresji i korelacji były stosowane w demografii przez K. Florka i S. Zubrzyckiego przy badaniu związków między wielkością gospodarstw wiejskich, a dietnością w tych gospodarstwach oraz przez zoologów.

Do obszarów zastosowań należały zagadnienia optymalizacyjne oparte

na programowaniu liniowym (harmonogram kolejności wykonywania prac, środek miedzi), techniczne (licznik elektryczny) oraz niezawodnościowe. Ponadto stosowano metody probabilistyczne i statystyczne w badaniach związanych z szacowaniem złóż, dochodzeniem ojcostwa, prawdopodobieństwem wykrycia nosiciela defekty, statystyczną kontrolą jakości, modelowaniem populacji ruchomych, itp.

Instrumenty. Ambicją profesora H. Steinhausa było stosowanie matematyki do aplikacyjnych zadań, aż po konstrukcje i patenty instrumentów, którymi może posługiwać się każdy.

Introwizor. Prawdopodobnie pierwszym instrumentem, który H. Steinhauś skonstruował i opatentował był *Introwizor* (opis konstrukcji znajdujemy w [74]). W opisie patentowym [72] napisano: *Jest to urządzenie do lokalizacji przedmiotów widzialnych przy prześwietleniu promieniami Roentgena. Pozwala ono na zlokalizowanie przedmiotów w przestrzeni we właściwym miejscu wewnątrz prześwietlanego ciała. Umożliwia to w praktyce zabieg chirurgiczny pozwalając na właściwe kierowanie skalpelem lub na dokonanie pomiarów.* Urządzenie to zyskało patenty francuski i włoski przed wojną, szwajcarski, holenderski i niemiecki w czasie wojny, a USA po wojnie w 1948 r.

Impulsem do budowy *introwizora* było zagadnienie, sformułowane H. Steinhausowi przez lwowskiego lekarza dr Meiselsa (zob. [89], str. 143). Chodziło o diagnozę ginekologiczną, stwierdzającą czy głowa płodu zmieści się w otworze miednicowym. H. Steinhauś nie znalazł rozwiązania tego zagadnienia. Szukał sposobu jak znaleźć przedmiot ukryty w ciele ludzkim. Ciekawostką jest to, że pomysł na takie urządzenie powstał podczas oglądania wystawy małego sklepiku z kapeluszami damskimi "Jenny" we Lwowie (zob. [89], str. 155-157). H. Steinhauś widział wtedy równocześnie manekin w witrynie sklepu i własne odbicie w szybie.

Longimetr Steinhausa. Urządzeniem skonstruowanym przez H. Steinhausa, omawianym na Seminarium, był *longimetr* [66]. Służył on do pomiaru długości krzywych na mapach (długości rzek, granic, itp.). W [89], str. 126, wspomina, że skonstruował go, bo jego córka dostała zadanie domowe zmierzenia nitką długości rzeki Wisły. Wiadomo, że długości krzywych mierzone na mapach o różnym stopniu generalizacji różnią się, a nawet przy zwiększaniu dokładności mapy długości te mogą rosnać zgoła nieograniczenie. H. Steinhauś w [70] podał konstrukcję *longimetru* do przybliżonego pomiaru długości krzywych płaskich. Składa się on z płytki celuloidowej, na której nakreślone są proste równoległe o jedna-

kowych odstępach d od siebie. Płytkę kładziemy na rysunku krzywej AB i liczymy punkty przecięcia tych prostych z łukiem AB otrzymując liczbę h_1 . Następnie obracamy płytkę o $1/k$ kąta półpełnego i tak jak poprzednio liczymy liczbę przecięć prostych z łukiem otrzymując liczbę h_2 . Postępowanie to kontynuujemy k razy, obracając za każdym razem płytkę o $1/k$ kąta półpełnego. W wyniku otrzymujemy łączną liczbę przecięć $N = \sum_{i=1}^k h_i$. Wtedy długość L łuku AB obliczamy ze wzoru $L = \pi Nd/2k$.

Ograniczając liczbę liczonych przecięć do liczby n otrzymujemy L_n długość łuku n -tego rzędu. Nie mamy informacji o patencie.

Longimetr Perkala. J. Perkal w [52] poddaje krytyce *longimetr* H. Steinhausa wymieniając jego mankamenty. Jednym z nich jest to, że funkcjonal Steinhausa nie jest ciągły względem zwiększania dokładności mapy. J. Perkal proponuje pomiar długości krzywej oprzeć na polu ε -aureoli wokół krzywej, definiując długość rzędu ε krzywej X wzorem

$$L_\varepsilon(X) = \frac{a_\varepsilon(X) - \pi\varepsilon^2}{2\varepsilon},$$

gdzie $a_\varepsilon(X)$ jest polem $\varepsilon(X)$ -aureoli krzywej X . Tę ostatnią wielkość szacuje tzw. *planimetrem*. Planimetr jest przyrządem do mierzenia pola, a w metodzie Perkala jest pośrednio używany do szacowania długości krzywej płaskiej.

Profilometr i ksylometr. J. Perkal, współpracując z leśnikami i widząc ich problemy przy szacowaniu objętości drzew, dał pomysł konstrukcji dwóch urządzeń. Jednym jest *profilometr*, którego opis znajdujemy w [47, str. 44]. Przyrząd ten służy do mierzenia pola przekroju poprzecznego pnia, bez przecinania go. J. Perkal w [47] pisze:

W porównaniu z dotychczasowymi metodami pomiaru przekroju poprzecznego pni drzewnych, przyrząd ten ma następujące zalety: nie wymaga przecinania pnia, nie wymaga przerysowywania mierzonego przekroju, może być obsługiwany przez mało wykwalifikowanego robotnika.

Drugim urządzeniem był *ksylometr mechaniczny*, opis konstrukcji znajdujemy w [47, str. 46]. Przyrząd służy do mierzenia objętości pnia drzewnego, a raczej objętości bryły powstałej z obrotu przekroju podłużnego pnia dookoła jego osi. Ksylometr mechaniczny nie może konkurować z *ksylometrem fizycznym*, mierzącym ilość cieczy wypartej przez pień.

Dyspersjometr. Kolejnym urządzeniem skonstruowanym przez H. Steinhausa jest *dyspersjometr* służący do obliczania dyspersji bez podnosze-

nia liczb do kwadratu. Pomysł tego urządzenia jest oparty na twierdzeniu Pitagorasa i opisany w [77], świadectwo patentu udokumentowano w [75] .

Wskaźniki stromości i ukształtowania terenu. Specyficznymi typami instrumentów można uważać wzór na obliczanie *wskaźnika stromości przeciętnej*, podany przez H. Steinhausa w [68] i wzór na obliczanie *wskaźnika ukształcenia pionowego*, podany przez H. Steinhausa w [69]. Oba te wzory podaliśmy w części dotyczącej pewnych problemów w geografii.

Nomogram rozwoju dzieci. Specyficznym typem instrumentu jest *nomogram*. Nomogram konstruowano do niemal każdego wyniku danego wzorem. Przykładem jest nomogram J. Perkala do obliczania charakterystyk: *rozwoju* i *anomalii* dzieci do lat 3 dany w [1].

Silnik Wankla. W związku z opublikowaniem zasady działania *silnika Wankla* spośród instrumentów skonstruowanych lub zaprojektowanych na Seminarium należy wymienić model silnika czterotaktowego H. Steinhausa. Wynalazek miał być opatentowany. Pomysł jest oparty na krzywej o stałej szerokości poruszającej się w kwadracie.

Inne pomysły instrumentów. Nie wszystkie pomysły urządzeń, wspomniane na Seminarium doczekały się pełnego opisu. Do nich należą: Autometr do mierzenia pól (projekt J. Perkala), przyrząd przegubowy do rysowania hiperbol (projekt K. Florka), przyrząd profilograf umożliwiający rejestrowanie zarysu chropowatości powierzchni z pomocą wykresu na użytek pomologów (pomysł J. Perkala, *pomologia* nauka o funkcjonowaniu oraz właściwościach użytkowych odmian drzew i krzewów), model aparatu zaprojektowanego przez J. Battka do mechanicznego rozwiązywania zagadnienia Intratora, o czym piszemy w dziale dotyczącym optymalizacji.

Fenomen Seminarium. W czym wyrażał się fenomen Steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej? Główny wysiłek Seminarium był ukierunkowany na zastosowania matematyki w możliwie szerokim spektrum zagadnień. Rozważano na nim ogrom różnorodnych tematów przyrodniczych, medycznych, technicznych, a także matematycznych. Ich spektrum nie było niczym ograniczone. Przewinęła się przez niego duża rzesza badaczy różnych dyscyplin naukowych. Byli wśród nich profesorowie, przyszli profesorowie i co najważniejsze byli studenci, uczący się matematycznego modelowania zagadnień praktycznych, wydawałoby się trudno formalizowanych matematycznie. Była to więc kuźnia matematycznego formułowania i rozwiązywania problemów

naukowych i praktycznych, czasem wydawałoby się błahych ale i ważnych. Seminarium było nastawione również na ukazywanie możliwości zastosowań matematyki, poprzez pomoc niematematykom w rozwiązywaniu ich problemów. Pomoc ta wyrażała się we wspólnym precyzowaniu problemów, ich matematycznym formułowaniu, a następnie ich rozwiązywaniu przez matematyków i studentów. Było więc realizacją części zapowiedzi prof. H.Steinhausa z jego referatu w 1948 roku [71]. Może nie stworzyło dyscypliny naukowej o jakiej myślał prof. H.Steinhaus, ale stworzyło Szkołę Matematyki Stosowanej.

Można zadać pytanie, jak potoczyła się kariera naukowa matematyków z dawnej grupy PIM, po odejściu prof. H.Steinhausa w 1960 roku na emeryturę. Niestety profesor Julian Perkal zmarł w 1965, a profesor Stefan Zubrzycki w 1968 roku. Profesor Józef Łukaszewicz po roku 1963 wraz z matematykami w Zakładzie Zastosowań Matematyki zajmował się *teorią kolejek*, głównie zagadnieniami teoretycznymi. Zmarł w 2013 roku. Profesor Stanisław Trybuła, pracując na Politechnice Wrocławskiej, zajmował się zastosowaniami matematyki, statystyką, teorią sterowania i teorią gier. Zmarł w 2008 roku. Profesor Witold Klonecki, kierownik Zakładu Statystyki we Wrocławskim Oddziale PAN z powodzeniem kontynuował program rozwoju statystyki zainicjowany przez S. Zubrzyckiego i wychował wielu statystyków. Zmarł w 2012 roku. Forum dla badań aplikacyjnych pozostało czasopismo "Zastosowania Matematyki" (*Applicationes Mathematicae*), które wypracowało sobie mocną pozycję wśród wydawnictw aplikacyjnych.

Literatura

- [1] A. Bartkowiakowa, J. Kucharczyk, T.K. Nowakowski, J. Perkal, H. Szczotka, *Rozwój dzieci śląskich od 0 do 3 lat*, Pediatria Polska 4 (1958), str. 473-480. Cytowanie na str. 201, 225.
- [2] A. Bartkowiakowa, *O pewnym sposobie ustalania autorstwa anonimowych tekstów*, referat wygłoszony na Międzynarodowej Konferencji Poetyki, Jabłonna 1961. Cytowanie na str. 182, 183.
- [3] A. Bartkowiakowa i B. Gleichgewicht, *O długości sylabicznej wyrazów w tekstach autorów polskich*, Zast. Matem. 6(3) (1962), str. 309-319. Cytowanie na str. 182.
- [4] A. Bartkowiakowa, *O rozkładzie i kolejności zdań współrzędnych i podrzędnych w utworach powieściowych Żeromskiego i Sienkiewicza*, Zast. Matem. 7 (1963), str. 133-154. Cytowanie na str. 182.

-
- [5] A. Bartkowiakowa i L. Zubrzycka, *O polskich badaniach języka przy użyciu metod matematycznych*, Wiadomości Matematyczne, 7 (1963), str. 87-97. Cytowanie na str. 182.
- [6] J. Battek i J. Perkal, *Bonitacja i wysmukłość drzewostanów*, Zast. Matem. 3(4) (1958), str. 285-306. Cytowanie na str. 189.
- [7] J. Battek i J. Perkal, *O pewnym zagadnieniu programowania liniowego*, Zast. Matem. 5(4) (1961), str. 359-373. Cytowanie na str. 204.
- [8] O. Borůvka, *O jistém problému minimálním*, Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti 3(1926), str. 37-58. Cytowanie na str. 222.
- [9] Czen Pin i Dzan Dzo-i, *O dzieleniu liczby obserwacji przy metodzie migawkowej*, Zast. Matem. 5(2) (1960), str. 179-194. Cytowanie na str. 210.
- [10] K. Czyżewski, A. Falkiewicz, T. Nowakowski, A. Pacyński, *Stan wola nagminnego na Dolnym Śląsku I*, Postępy Hig. i Med. Dośw. 3 (1951), str.156. Cytowanie na str. 197, 198.
- [11] K. Czyżewski, A. Falkiewicz, A. Pacyński, S. Tarnawski i S. Tarnawska, *Stan wola nagminnego na Dolnym Śląsku II*, Postępy Hig. i Med. Dośw. 5 (1952), str.203. Cytowanie na str. 197, 198.
- [12] K. Czyżewski, A. Falkiewicz, A. Pacyński, S. Tarnawski i S. Tarnawska, *Stan wola nagminnego na Dolnym Śląsku III*, Postępy Hig. i Med. Dośw. 6 (1953), str. 154. Cytowanie na str. 197, 198.
- [13] T. Dalenius, J. Hajek and S. Zubrzycki, *On plane sampling and related geometrical problems*, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1, Berkeley and Los Angeles 1961, str. 125-150. Cytowanie na str. 188.
- [14] H. Dietrich, *Zagadnienie najwłaściwszego usytuowania miejskiej centrali telefonicznej*, Przegląd Telekomunikacyjny 19(25), zesz. 12, (1952), str. 371-377. Cytowanie na str. 207.
- [15] Dzan Dzo-i, *O minimaksowej estymacji parametru rozkładu dwumianowego*, Zast. Matem. 6(1) (1961), str. 31-42. Cytowanie na str. 209.
- [16] Dzan Dzo-i, *Badanie rozwoju ziemniaków za pomocą wskaźników przyrodniczych*, Zast. Matem. 5(4) (1961), str. 351-358. Cytowanie na str. 191.
- [17] M. Fisz, *Dokładność pewnego wzoru asymptotycznego*, Zast. Matem. 1(1) (1954), str. 63-66. Cytowanie na str. 216.
- [18] K. Florek, J. Łukaszewicz, J. Perkal, H. Steinhaus i S. Zubrzycki, *Taksonomia Wrocławska*, Przegląd Antropologiczny 17 (1951), str. 193-211. Nie cytowana.
- [19] B. Gleichgewicht, J. Kucharczyk i H. Steinhaus, *Uwagi o grach liczbowych*, Zast. Matem. 5(1) (1960), str. 21-33. Cytowanie na str. 220.

- [20] M. Gutman, *O estymowaniu całki kwadratu gęstości*, Zast. Matem. 3(4) (1958), str. 229-336. Cytowanie na str. 209.
- [21] A. Huskowska, *O dokładności niektórych pomiarów przyrodniczych*, Zast. Matem. (1956), str. 426-430. Cytowanie na str. 211.
- [22] A. Kelus i J. Łukaszewicz, *Porządkowanie populacji ludzkich według częstości grup krwi*, Przegląd Antropologiczny 20 (1954), str. 24-63. Cytowanie na str. 179.
- [23] B. Kopociński, *O podziale terytorium Polski na części*, Zast. Matem. 5(2) (1960), str. 173-177. Cytowanie na str. 186, 216.
- [24] B. Kopociński, *O kształcie komory silników rotacyjnych*, Wiadomości Matematyczne 17 (1961), str. 283-288. Cytowanie na str. 216.
- [25] B. Kopociński, *On the local optimality of some regular sampling patterns in the plane*, Zast. Matem. 8(1) (1965), str. 1-12. Cytowanie na str. 188.
- [26] B. Kopociński, J. Perkal, i L. Szopa, *O sekwencji płci kurcząt, II*, Sprawozdania Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, 20 B. 1965, str. 6-9. Cytowanie na str. 195.
- [27] B. Kopociński, *On the local optimality of some regular sampling patterns in the plane (II)*, Zast. Matem. 9(1) (1966), str. 63-73. Cytowanie na str. 188.
- [28] B. Kopociński, *Statistical analysis of sequence of sex in chickens*, Cytowanie na str. 195.
- [29] W. Dziubdziela i B. Kopociński, *Limiting properties of the k -th record values*, Zast. Matem. 15(2) (1976), str. 187-190. Cytowanie na str. 221.
- [30] P. Kotas, *Projekt nowej racjonalnej klawiatury*, maszynopis nieopublikowany. Cytowanie na str. 183.
- [31] S. Kucharczyk i H. Szczepanowski, *Optymalne poletko poszukiwań archeologicznych*, Zast. Matem. 3(2) (1958), str. 154-163. Cytowanie na str. 189.
- [32] W. Kuraszkiewicz i J. Łukaszewicz, *Ilość różnych wyrazów w zależności od długości tekstu*, Pamiętnik Literacki I (1951), str. 168-182. Cytowanie na str. 182.
- [33] F. Leja, *Konstrukcja funkcji odwzorowującej konforemnie dowolny obszar płaski jednospójny na koło*, Zast. Matem. 2(2) (1954), str. 117-122. Cytowanie na str. 218.
- [34] J. Łukaszewicz i H. Steinhaus, *O wyznaczaniu środka miedzi sieci telefonicznej*, Zast. Matem. 1(4) (1954), str. 299-307. Cytowanie na str. 206, 207.
- [35] J. Łukaszewicz, *O dochodzeniu ojcostwa*, Zast. Matem. 2(4) (1954), str. 349-379. Cytowanie na str. 200.

-
- [36] J. Łukaszewicz i H. Steinhaus, *O mierzeniu przez Kalibrowanie*, Zast. Matem. 2(3) (1955), str. 225-230. Cytowanie na str. [212](#).
- [37] J. Łukaszewicz i W. Sadowski, *Porównywanie kilku populacji z populacją kontrolną*, Zast. Matem. 3(2) (1958), str. 204-216. Cytowanie na str. [211](#), [221](#).
- [38] J. Łukaszewicz, *O skuteczności pędzlowego badania nosicielstwa dyfteirii*, Zast. Matem. 3(1) (1958), str. 46-50. Cytowanie na str. [199](#).
- [39] J. Łukaszewicz i T.K. Nowakowski, *Obliczanie prawdopodobieństwa jednojajowości czworaczków*, Zast. Matem. 5(1) (1960), str. 119-139. Cytowanie na str. [201](#).
- [40] J. Łukaszewicz, *Teoria kolejek czyli obsługi masowej*, Zast. Matem. 8(1) (1965), str. 13-27. Cytowanie na str. [207](#).
- [41] J. Łukaszewicz, *Rola Hugona Steinhausa w rozwoju zastosowań matematyki*, Wiadomości Matematyczne 17 (1973), str. 51-63.
- [42] E. Marczewski, H. Steinhaus, *O odległości systematycznej biotopów*, Zast. Matem. 4(3) 1958, str. 195-203. Cytowanie na str. [189](#).
Cytowanie na str. [191](#).
- [43] H. Milicerowa, *Zastosowanie wskaźników Perkala do charakterystyki budowy ciała bokserów*, Materiały i prace Antropologiczne 20(1956). Cytowanie na str. [219](#).
- [44] B. Nowicki, T. Olbrycht i L. Zubrzycka, *Badania nad związkiem cech pokrojowych z użytkowymi metodą taksonomii wrocławskiej*, Zast. Matem. 5(4) (1961), str. 333-339. Cytowanie na str. [194](#).
- [45] J. Obalski, *O pewności sprawdzania narzędzi mierniczych*, Zast. Matem. 1(2) (1953), str. 105-124. Cytowanie na str. [210](#).
- [46] J. Oderfeld i S. Zubrzycki, *O sprawdzaniu wodomierzy*, Zast. Matem. 1(3) (1953), str. 125-137. Cytowanie na str. [210](#).
- [47] J. Perkal, *O oznaczaniu objętości pni drzewnych*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, seria B, Nr 51, Wrocław 1950. Cytowanie na str. [189](#), [224](#).
- [48] J. Perkal i J. Battek, *Próba oceny drzewostanów*, Sylwan 99 (1955), str. 12-31. Cytowanie na str. [189](#).
- [49] J. Perkal, *Geometryczne wskaźniki łąk*, Zast. Matem. 2(2) (1954), str. 133-149. Cytowanie na str. [185](#).
- [50] J. Perkal, *Zastosowania matematyki do rolnictwa w środowisku wrocławskim*. *Zastosow. Mat.*, 3(1):90-99, 1958. ISSN 0044-1899. Cytowanie na str. [196](#), [197](#).
- [51] J. Perkal, *O współpracy matematyków i medyków w środowisku wrocławskim*. *Zastosow. Mat.*, 4(3):265-278, 1958. ISSN 0044-1899. Cytowanie na str. [197](#), [198](#), [202](#).
- [52] J. Perkal, *O długości krzywych empirycznych*, Zast. Matem. 3(4)

- (1958), str. 258-284. Cytowanie na str. 185, 224.
- [53] J. Perkal, *O populacjach ruchomych*, Zast. Matem. 3(2) (1958), str. 164-181. Cytowanie na str. 192.
- [54] J. Perkal, *Sur la notion de ressemblance relativisee a la population*, Zast. Matem. 5(3) 1960, str. 281-288. Cytowanie na str. 181.
- [55] J. Perkal, *Matematyka dla rolników, I-III*, Warszawa 1958-1963. Cytowanie na str. 189, 197.
- [56] J. Perkal i L. Szopa, *O sekwencji płci kurcząt*, Rocznik Nauk Rolniczych, 81—b-3, 1963, str. 499-523. Cytowanie na str. 195.
- [57] J. Perkal, *O dyskryminacji płaskiej*, Zast. Matem. 9(4) (1968), str. 315-324. Cytowanie na str. 213.
- [58] C. Platt, *O rozkładzie płci w miotach trzody chlewnej i o modelach probabilistycznych z nim związanych*, Zast. Matem. 8(3) (1953), str. 201-211. Cytowanie na str. 195.
- [59] W. Pogorzelski, *Prawdopodobieństwo bezpieczeństwa konstrukcji*, Zast. Matem. 2(1) (1954), str. 46-61. Cytowanie na str. 205.
- [60] Redakcja Zastosowań Matematyki, *Od Redakcji*, 1953. ISSN 0044-1899. Cytowanie na str. 178.
- [61] Redakcja Zastosowań Matematyki, *Pięć tomów zastosowań matematyki*, 1962. ISSN 0044-1899. Cytowanie na str. 178.
- [62] A. Romejko, *Porównywanie dwóch partii towaru*, Zast. Matem. 3(2) (1958), str. 204-215. Cytowanie na str. 211.
- [63] I. Rosenzweig i H. Steinhaus, *Der Quadratleistungstarif*, Schweizerischer Elektrotechnischer Verein, 1939. Cytowanie na str. 205.
- [64] B. Rutkowski, *Trójwskaźnikowa klasyfikacja drzewostanów sosnowych metodą Wrocławską*, Zast. Matem. 6(1) (1962), str. 79-110. Cytowanie na str. 189.
- [65] W. Sadowski, *O nieparametrycznym teście na porównywanie rozszerzeń*, Zast. Matem. 2 (1955), str. 161-171. Cytowanie na str. 211.
- [66] H. Steinhaus, *W sprawie mierzenia długości linii krzywych płaskich*, Polski Przegląd Kartograficzny 37 (1932), str. 1-9. Cytowanie na str. 223.
- [67] H. Steinhaus, *O zagadnieniu taryfy elektrycznej*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Seria B, Nr 1, Wrocław 1947). Cytowanie na str. 205.
- [68] H. Steinhaus, *O wskaźniku stromości przeciętnej*, Przegląd Geograficzny, XXI 1947, str.1-2. Cytowanie na str. 185, 225.
- [69] H. Steinhaus, *O wskaźniku ukształcenia pionowego*, Przegląd Geograficzny. XXI, 1947, Cytowanie na str. 185, 225.
- [70] H. Steinhaus, *O długości krzywych empirycznych i jej pomiarze zwłaszcza*

- cza w geografii, Sprawozdania Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, 4 (1949), dodatek 5, str. 1–6. Cytowanie na str. 185, 223.
- [71] H. Steinhaus, *Drogi Matematyki Stosowanej*, Matematyka, 3 (5), 1949, str. 9–19. Cytowanie na str. 226.
- [72] H. Steinhaus, *Urządzenie do lokalizacji przedmiotów w przestrzeni za pomocą radiologii*, Urząd Patentowy R.P. Nr 34108, KI, 30 a, 6108, 29 kwiecień 1950. Cytowanie na str. 223.
- [73] H. Steinhaus, *Wycena statystyczna jako metoda odbioru towarów produkcji masowej*, Studia i Prace Statystyczne, 2 (1950), str. 1–16. Cytowanie na str. 209.
- [74] H. Steinhaus, *Introwizor, Aparat do lokalizacji ciał obcych*, Polski Przegląd Radiologiczny, 3 (1952), str. 173–181. Cytowanie na str. 223.
- [75] H. Steinhaus, *Świadectwo autorskie o dokonaniu wynalazku pracowniczego "Przyrząd do obliczania wartości wyrażenia $\lambda_n x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ opatentowanego za numerem 37525 z dn. 10 marca 1952, Urząd Patentowy PRL. 1795*. Cytowanie na str. 225.
- [76] H. Steinhaus, *Prawdopodobieństwo, wiarygodność, możliwość*, Zast. Matem. 1(3) (1953), str. 149–171. Nie cytowana.
- [77] H. Steinhaus, *Dyspersjometr*, Zast. Matem. 1(4) (1954), str. 321–329. Cytowanie na str. 225.
- [78] H. Steinhaus, *O dochodzeniu ojcostwa*, Zast. Matem. 1(2) (1954), str. 67–82. Cytowanie na str. 200.
- [79] H. Steinhaus, *Liczby przetasowane*, Zast. Matem. 2(1) (1954), str. 34–45. Cytowanie na str. 213.
- [80] H. Steinhaus, *Tablica liczb przetasowanych czterocyfrowych*, Rozprawy Matematyczne 6 (1954), 46 stronic. Nie cytowana.
- [81] H. Steinhaus, *Długość, kształt i pole*, Prace Matem. 2 (1956), str. 65–78. Nie cytowana.
- [82] H. Steinhaus, *Sur la division des corps materiels en parties*, Bull. Acad. Soc. Pol. CI, III 1956, str. 801–804. Cytowanie na str. 186, 216.
- [83] H. Steinhaus, *The problem of estimation* Annales of Mathematical Statistics, 28 (1957), str. 633–648. Cytowanie na str. 209, 221.
- [84] H. Steinhaus, *Liczby złote i żelazne*, Zast. Matem. 3(1) (1958), str. 51–65. Cytowanie na str. 214.
- [85] H. Steinhaus, *A Bridge with a hexagonal framework*, Zast. Matem. 6(3) (1962), str. 333–340. Cytowanie na str. 204.
- [86] H. Steinhaus, [Wspomnienia](#). *Znak*, nr 187:42–106, 1970. ISSN 0044-488X. Początkowy fragment autobiografii wydany za życia autora. Cytowanie na str. 219.
- [87] H. Steinhaus, [Wspomnienia](#). *Znak*, nr 188/189:306–338, 1970. ISSN 0044-488X. Początkowy fragment autobiografii wydany za życia au-

- tora. Cytowanie na str. **219**.
- [88] H. Steinhaus, Autobiography. *Wiadom. Mat.*, 17:3–11, 1973. ISSN 0373-8302. doi: [10.14708/wm.v17i01.3107](https://doi.org/10.14708/wm.v17i01.3107). Papers presented at a Conference in Honor of Hugo Steinhaus (Wrocław, 1972). MR [0392418](#). Cytowanie na str. **185, 205, 209, 215**.
- [89] H. Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*. Aneks, London, oprac. aleksandra zgorzelska edition, 1992. Brosz. lakier. Inne wydania: *ATUT* Wrocławskie Wydaw. Oświatowe (Wrocław 2002); Wyd. 3, Politechnika Wrocławska-Centrum Steinhausa-ATAT Oficyna Wydawnicza(Wrocław 2010); Wyd. 3e poprawione, Oficyna Wydawnicza *ATUT*: Wrocławskie Wyd. Oświatowe. Cytowanie na str. **178, 181, 196, 200, 204, 205, 206, 211, 223**.
- [90] H. Steinhaus i S. Trybuła, *Pomiar przez kolejne porównywania*, Zast. Matem. 4(3) (1959), str. 204-211. Cytowanie na str. **212**.
- [91] H. Steinhaus i S. Trybuła, *On a paradox in applied probabilities*, Bull. Acad. Soc. Polon. des Sci. 7 (1959), str. 67-69. Cytowanie na str. **218**.
- [92] H. Steinhaus i S. Zubrzycki, *O porównywaniu dwóch procesów produkcyjnych i zasadzie dualizmu*, Zast. Matem. 3(4) (1958), str. 229–257.
- [93] F. Szczotka, *Porządkowanie i klasyfikacja odmian pszenicy na podstawie ich farynogramów*, Zast. Matem. 2(2) (1954), str. 123-132. Cytowanie na str. **211, 221**.
- [94] W. Szczotka, Fenomen Steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej. Zarys koncepcji. *Antiquitates Mathematicae*, 12:197–228, 2018. ISSN 2353-8813. doi: [10.14708/am.v12i0.6421](https://doi.org/10.14708/am.v12i0.6421). Cytowanie na str. **191, 222**.
- [95] W. Szwarc, *Zagadnienie transportowe*, Zast. Matem. 6(2) (1962), str. 149-187. Cytowanie na str. **177, 202, 221**.
- [96] S. Trybuła, *O minimaksowej estymacji parametrów rozkładu wielomianowego*, Zast. Matem. 3(4) (1958), str. 307-322. Cytowanie na str. **204**.
- [97] S. Trybuła, *Some problems in simultaneous minimax estimation*, Annals of Mathematical Statistics 29 (1958), str. 245-253. Cytowanie na str. **209**.
- [98] S. Trybuła, *On the paradox of three random variables*, Zast. Matem. 5 (1961), str. 321-332. Cytowanie na str. **209**.
- [99] S. Trybuła, *On the paradox of n random variables*, Zast. Matem. 8(2) (1965), str. 143- 156. Cytowanie na str. **218**.
- [100] N. Wigdorowicz-Makowerowa, A.Dadun, B.Płonka, *Próchnica zębów u dzieci w wieku szkolnym we Wrocławiu*, Czasopismo Stomatologiczne 5 (1957), str. 249-257. Cytowanie na str. **218**.
- [101] J. Woronczak, *Z badań nad wierszami Biernata z Lublina*, Pamiętnik Literacki 3 (1958), str. 97-118. Cytowanie na str. **198**.

- Cytowanie na str. 182.
- [102] J. Woronczak, *Metody obliczania wskaźników bogactwa słownikowego tekstów*, referat wygłoszony na Międzynarodowej Konferencji Poetyki, Jabłonna 1961. Cytowanie na str. 183.
- [103] J. Woronczak, *Repertuar sekwencyjny w Polsce na przełomie XV i XVI wieku*. Cytowanie na str. 182.
- [104] F. Zitek, *O pewnych estymatorach odchylenia standardowego*, Zast. Matem. 1(4) (1953), str. 342-353. Cytowanie na str. 208.
- [105] F. Zitek, *O mierzeniu przez porównywanie*, Zast. Matem. 6(1) 1961, str. 43-50. Cytowanie na str. 212.
- [106] S. Zubrzycki, *O łańcuskach gwiezdnych*, Zast. Matem. 1(3) (1954), str. 197-205. Cytowanie na str. 215.
- [107] S. Zubrzycki, *Próba matematycznego ujęcia rzeźby terenu jako czynnika erozji*, 2(4) Zast. Matem. (1954), str. 390-398. Cytowanie na str. 184.
- [108] S. Zubrzycki, *O optymalnej metodzie odbioru wodomierzy*, Zast. Matem. 2(2) (195), str. 199-209. Cytowanie na str. 210.
- [109] S. Zubrzycki, *O szacowaniu parametrów złóż geologicznych*, Zast. Matem. 3(2) (1957), str. 105-153. Cytowanie na str. 187, 188, 211, 215.
- [110] S. Zubrzycki, *Uwaga o probabilistycznym opisie złóż osadowych*, Zast. Matem. 6(2) (1962), str. 199-209. Cytowanie na str. 188.
- [111] S. Zubrzycki, *O minimaksowym szacowaniu liczebności populacji*, Zast. Matem. 7(2) (1963), str. 183-194. Nie cytowana.
- [112] S. Zubrzycki, *Uwagi o modelu probabilistycznym zmienności na płaszczyźnie*, Zast. Matem. 7(2) (1963), str. 219-222. Cytowanie na str. 188.
- [113] S. Zubrzycki, *Some approximate integration formulas of statistical interest*, Coll. Math. 11 (1963). Cytowanie na str. 210.
- [114] S. Zubrzycki, *Explicit formulas for minimax admissible estimators in some cases of restrictions imposed on the parameter*, Zast. Matem. 9(1) (1966), 31-52. Cytowanie na str. 209.
- [115] S. Zubrzycki, *O niektórych pracach seminarium z zastosowań matematyki*. *Zastosow. Mat.*, 8(3):267-281, 1966. ISSN 0044-1899. Cytowanie na str. 208.
- [116] S. Zubrzycki, *O wyborze płaszczyzny najlepszej dyskryminacji*, Zast. Matem. 9(4) (1966), 325-334. Cytowanie na str. 198, 213.
- [117] S. Zubrzycki, *Wielopróbkowa analiza pewnego zadania ekologicznego, czyli pogoń za ślimakami*, Zast. Matem. 11(4) (1970), 377-389. Cytowanie na str. 192.
- [118] S. Zubrzycki, *Concerning Yule's Characteristic of Style*, Zast. Matem. 4(4) 1958, str. 328-331. Cytowanie na str. 183.

- [119] L. Zubrzycka, *O rozmieszczeniu punktów próbkowych na płaszczyźnie*, Zast. Matem. 5(2) (1960), str. 161–171. Cytowanie na str. 215.
- [120] L. Zubrzycka, *Uwagi o statystycznym badaniu struktury języka polskiego dla potrzeb stenografii*, maszynopis. Cytowanie na str. 183.
- [121] L. Zubrzycka, *O dostosowywaniu klawiatury maszyny do pisania do struktury języka*, Zast. Matem. 6(4) (1962), str. 419–439. Cytowanie na str. 184.
- [122] L. Zubrzycka, *O wyznaczaniu systemów stenograficznych*, Zast. Matem. 11(3), 1970, str.235–264. Cytowanie na str. 183.

The phenomenon of the Steinhaus Seminar on Applied Mathematics. Topics

Władysław Szczotka

Abstract. This article presents the subject of the Applied Mathematics Seminar, conducted in 1948-1960 by Professor Hugon Steinhaus in Wrocław and is an important supplement to the analysis presented in the work of Szczotka (2018). This topic is illustrated by a more detailed discussion of some of the works on this subject and some of the results obtained by the participants of the Seminar. The results are well-founded in mathematical journals.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A60; 01A73.

Key words and phrases: mathematical societies, mathematics, mathematicians, history of mathematics, Cracow.

WŁADYSŁAW SZCZOTKA 

WROCLAW UNIVERSITY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

PLAC GRUNWALDZKI 2/4, PL-50-384 WROCLAW

E-mail: Wladyslaw.Szczotka@math.uni.wroc.pl

Communicated by: Krzysztof Szajowski

(Zgłoszona: 11th of November 2018; Wersja końcowa: 31th of December 2018)
