

## MUMIO, Lab 10 Proces ryzyka, czas ciągły

1. (3p.) Liczba szkód zaistniałych w czasie  $t$  jest procesem stochastycznym  $(N(t), t \geq 0)$ . Przyjmijmy, że czas  $t = 0$  odpowiada dacie 1 stycznia 1999 roku, a jednostką czasu jest 1 miesiąc, przy czym dla uproszczenia przyjmujemy, że każdy miesiąc ma 30 dni. Czasy oczekiwania pomiędzy następującymi po sobie szkodami, są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa i dystrybucie  $F(t) = 1 - e^{-10t}$ . Znajdź prawdopodobieństwo, że dokładnie 5 szkód wystąpi pomiędzy 1 kwietnia 1999 a 15 kwietnia 1999.
2. (3p.) Klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela  $R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$  charakteryzują parametry:
  - $\lambda$  - częstotliwość (roczna) Poissonowskiego procesu pojawiania się szkód  $N(t)$ ,
  - $u$  - nadwyżka początkowa,
  - rozkład zmiennej  $Y$  - wartości pojedynczej szkody,
  - $\theta$  - stosunkowy narzut na składkę netto,  $c = (1 + \theta)\lambda EY$ .

Założmy, iż  $P(Y = M) = 1$ , gdzie  $M$  jest dodatnie. Założmy także, iż  $u = 10 \cdot M$ . Przyjmijmy wreszcie, iż nasz cel to skalkulowanie składki tak, aby zachodził warunek bezpieczeństwa:  $e^{-Ru} = 0.1$ , gdzie  $R$  jest współczynnikiem dopasowania (tzn.  $R : 1 + (1 + \theta)E[Y] \cdot R = M_Y(R)$ ). Wylicz wartość  $\theta$ :

3. (3p.) Model ciągły. Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona. Rozkład pojedynczej szkody  $Y_i$  jest rozkładem wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 0.5, tj.  $Y \sim \text{Exp}(2)$ . Współczynnik dopasowania modelu ciągłego wynosi  $R = 1$ ,  $c = 1$ . Aby prawdopodobieństwo ruiny wynosiło 0.1, ile nadwyżka początkowa  $u$  musi być równa?
4. (3p.) Model ciągły. Prawdopodobieństwo ruiny z nadwyżką początkową  $u = 14$  wynosi  $\frac{5}{7}e^{-16}$ . Funkcja gęstości prawdopodobieństwa indywidualnych szkód  $Y_i$  jest wykładnicza

$$4e^{-4y}, \quad y > 0.$$

Wylicz współczynnik bezpieczeństwa  $\theta$  i współczynnik dopasowania  $R$ .

5. (3p.) Model ciągły. Niech  $R(t)$  będzie procesem nadwyżki ubezpieczyciela gdzie:

- $S(t)$  jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości  $\lambda$ ,
- wartość pojedynczej szkody  $Y$  ma rozkład wykładniczy  $Exp(\beta)$ ,
- składka  $c$  zawiera współczynnik bezpieczeństwa  $\theta = 0.2$ , co zapewnia, iż prawdopodobieństwo ruiny:  $\Psi(u) = \frac{1}{10}$ .

Udziałowcy zwiększyli nadwyżkę początkową dwukrotnie - do wysokości  $2 \cdot u$ . Zakładając, iż wszystkie pozostałe parametry procesu nie uległy zmianie, wylicz prawdopodobieństwo ruiny.

6. (3p.) Niech  $R(t)$  będzie procesem nadwyżki ubezpieczyciela,  $N(t)$  procesem Poissona z parametrem intensywności  $\lambda$  oraz niech  $Y_i$  ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną  $\mu$ . Rozważmy prawdopodobieństwa ruiny dla trzech następujących zestawów parametrów procesu:

- $\Psi_1$  dla procesu o parametrach:  $u_1 = 10$ ,  $c_1 = 2$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$
- $\Psi_2$  dla procesu o parametrach:  $u_2 = 20$ ,  $c_2 = 8$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,
- $\Psi_3$  dla procesu o parametrach:  $u_3 = 10$ ,  $c_3 = 4$ ,  $\mu_3 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$ .

Pokaż, że  $\Psi_1 = \Psi_2 < \Psi_3$ .

7. (3p.) Model ciągły. Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest postaci

$$R(t) = 250t - S(t),$$

gdzie  $S$  ma złożony rozkład Poissona z parametrem  $\lambda = 100$ , a rozkład pojedynczej szkody  $Y$  zadany jest gęstością:

$$f_Y(y) = \frac{2}{y^3}, \quad \text{dla } y > 1.$$

Wylicz prawdopodobieństwo ruiny.