

1 MUMIO. Lab 4. Rozkłady mieszane, aproksymacja Poissonowska

1. (3p.) Załóżmy, że portfel składa się z n ryzyk.. Zakładamy, że liczby szkód N_0 i N_1 w portfelu w latach 0 i 1 są warunkowo niezależne i mają rozkład

$$P(N_i = k | \Theta = \theta) = \frac{\theta^k}{k!} \exp(-\theta), \quad i = 1, 2.$$

Oblicz $E[(N_1 - N_0)^2 | \theta]$.

2. (3p.) W kolejnych okresach czasu ubezpieczony charakteryzujący się wartością θ parametru ryzyka $\Theta \in (0, 1)$ generuje szkody w ilości N_i , $i = 1, 2$. Wiemy, że

$$P(N_i = 1 | \Theta = \theta) = \theta = 1 - P(N_i = 0 | \Theta = \theta), \quad i = 1, 2,$$

oraz zmienne losowe N_1 i N_2 są warunkowo (pod warunkiem $\Theta = \theta$) niezależne, tzn.

$$P(N_1 = 1, N_2 = 1 | \Theta = \theta) = P(N_1 = 1 | \Theta = \theta) P(N_2 = 1 | \Theta = \theta).$$

Parametr ryzyka Θ ma rozkład o gęstości

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 6\theta(1-\theta) & \text{dla } \theta \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla } \theta \notin (0, 1) \end{cases}.$$

Oblicz $Cov(N_1, N_2)$.

3. (3p.) W kolejnych okresach czasu ubezpieczony charakteryzujący się wartością θ parametru ryzyka $\Theta \in (0, \infty)$ generuje szkody w ilości N_j , $j = 1, 2, 3$. Wiemy, że

$$P(N_j = n | \Theta = \theta) = \exp(-\theta) \frac{\theta^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

oraz zmienne losowe N_j są warunkowo (pod warunkiem $\Theta = \theta$) niezależne. Parametr ryzyka Θ ma rozkład dwupunktowy $P(\Theta = 1) = 0.5 = P(\Theta = 2)$. Jeżeli $N_1 + N_2 = 2$, oblicz $P(N_3 = 0)$.

4. (3p.) Załóżmy, że w roku 0 i 1 liczby szkód N_0 i N_1 na pojedyncze ryzyko w latach 0 i 1 są niezależne i mają warunkowy rozkład Poissona

$$P(N_i = k | \Theta_i = \theta) = \frac{\theta^k}{k!} \exp(-\theta), \quad i = 1, 2$$

gdzie $\Theta_i \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ są niezależne. Oblicz $E[(N_1 - N_0)^2]$.

5. (3p.) Załóżmy, że zmienna losowa N ma mieszany rozkład Poissona oraz, że losowy parametr wartości średniej Λ jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o wartości średniej 2. Pokaż, że N ma rozkład geometryczny. Znajdź jego parametr.
6. (3p.) Załóżmy, że zmienna losowa N ma mieszany rozkład Poissona oraz, że losowy parametr wartości średniej Λ jest zmienną losową o rozkładzie takim jak suma 2 niezależnych zmiennych o rozkładzie wykładniczym o wartości średniej. Pokaż, że N ma rozkład taki jak suma 2 niezależnych zmiennych o jednakowych rozkładach geometrycznych. Znajdź parametr tego rozkładu geometrycznego.
7. (3p.) Niech niezależne $X_i \sim \text{Bin}(1, p_i)$, $i = 1, \dots, n$ oraz $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Pokaż, że dla $|t| < 1$, $\lim_{np_n \rightarrow \lambda} P_{S_n}(t) = e^{\lambda(t-1)}$, $\lambda > 0$. Jakie przybliżenie dla $P(S_n = k)$ można stąd wywnioskować?
8. (M) Niech niezależne $X_i \sim \text{Bin}(1, p_i)$, $i = 1, \dots, n$. Zbadaj przybliżenie rozkładu $S_n = X_1 + \dots + X_n$ rozkładem Poissona tak, aby została zachowana średnia. (Mamy $E(S_n) = \sum p_i$, $\text{Var}(S_n) = \sum p_i(1 - p_i)$).
Niech $n = 19$, $p_i = 0.05i$, $i = 1, \dots, 19$. Policz w tym przypadku $\sum p_i^2$. Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji prawdopodobieństw zmiennej S_n oraz zmiennej Poissonowskiej.
Uwaga. Niech $N \sim \text{Poi}(\lambda)$, $\lambda = \sum p_i$. Wtedy $E(N) = E(S_n)$. Następuje jednak przeszacowanie wariancji: mamy $\text{Var}(N) - \text{Var}(S_n) = \sum p_i^2$. Stosowanie aproksymacji Poissonowskiej ma sens w przypadku, gdy $E(S_n) \approx \text{Var}(S_n)$, tzn., gdy $\sum p_i^2$ jest małe.
9. (M) Niech $X_i \sim \text{Bin}(1, p_i)$, $i = 1, \dots, n$. Zbadaj przybliżenie rozkładu $S_n = X_1 + \dots + X_n$ rozkładem dwumianowym tak, aby została zachowana średnia, tzn. $\text{Bin}(n, p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n})$. Niech $n = 19$, $p_i = 0.05i$, $i = 1, \dots, 19$. Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji prawdopodobieństw zmiennej S_n oraz zmiennej dwumianowej. Porównaj z poprzednim zadaniem.
10. (M) Załóżmy, że zmienna losowa N ma mieszany rozkład Poissona oraz, że losowy parametr wartości średniej Λ jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o wartości średniej 2. Używając metody funkcji tworzących wylicz $P(N = k)$ dla wybranego k i zrób wykres tej funkcji prawdopodobieństwa. Wylicz wariancję zmiennej N na podstawie uzyskanych wartości. Porównaj z dokładną wartością obliczoną ze wzoru.
11. (M) Załóżmy, że zmienna losowa N ma mieszany rozkład Poissona oraz, że losowy parametr wartości średniej Λ jest zmienną losową o rozkładzie takim jak suma 2 niezależnych zmiennych o rozkładzie wykładniczym o wartości średniej 1. Używając metody funkcji tworzących

wylicz $P(N = k)$ dla wybranego k i zrób wykres tej funkcji prawdopodobieństwa. Wylicz wariancję zmiennej N na podstawie uzyskanych wartości. Porównaj z dokładną wartością obliczoną ze wzoru.