

1 MUMIO. Lab 5. (Rekurencja Panjera, aproksymacje

1. (3p.) Ilość szkód N ma rozkład dany rekurencyjnie:

$$P(N = 0) = \frac{1}{27},$$

$$\frac{P(N = k)}{P(N = k - 1)} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3 \cdot k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Wylicz stosunek wariancji do wartości oczekiwanej zmiennej N .

2. (3p.) Łączna wartość szkód z polisy wynosi $S = Y_1 + \dots + Y_N$, (zero, jeśli $N = 0$). S ma złożony rozkład Poissona z wartością oczekiwaną zmiennej N równą: $E[N] = \ln(1 + \frac{1}{3})$ zaś Y ma rozkład logarytmiczny:

$$g_k = P(Y = k) = \frac{1}{-\ln(1 - c)} \cdot \frac{c^k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

z parametrem $c = 0.25$. Znajdź taką liczbę k , że: $P(S > k) < \frac{1}{1000} < P(S \geq k)$

3. (3p.) Sprawdź, że rozkład dwumianowy, Poissona i geometryczny spełniają rekurencję postaci (rekurencja Panjera)

$$p_k = (a + b/k)p_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

dla pewnych stałych a, b . (Znajdź te stałe).

4. (3p.) Towarzystwo ubezpieczeniowe oferuje roczne kontrakty w wysokościach 1 i 2, w grupach osób, gdzie w pierwszej grupie prawdopodobieństwo śmierci równa się 0.02, a w drugiej 0.10:

k	q_k	b_k	n_k
1	0.02	1	500
2	0.02	2	500
3	0.10	1	300
4	0.10	2	500

gdzie n_k oznaczają liczebności kontraktów. Towarzystwo to zamierza za 1800 powyżej opisanych kontraktów zebrać tyle składek, aby z prawdopodobieństwem 0.95 sumaryczna szkoda $S = X_1 + \dots + X_{1800}$ była mniejsza od zebranej sumy. Przy tym wymaga się, aby składka każdego

osobnika była proporcjonalna do wartości oczekiwanej jego szkody, tzn. ma być postaci $(1 + \theta)E[X_j]$, dla pewnej stałej $\theta > 0$ (składka wartości oczekiwanej). Zmienne X_i są niezależne o rozkładach $P(X_i = b_k) = q_k$, $P(X_i = 0) = 1 - q_k$, przy czym rozkłady zależą od typu kontraktu (np. dla $i = 1, \dots, 500$, $k = 1$). Znajdź θ takie, że

$$P(S \leq (1 + \theta)ES) = 0.95.$$

5. (3p.) Portfel $X_1, \dots, X_n$ jest dwuwarstwowy, dla $n = n_1 + n_2$ ryzyk postaci $X_i = I_i \cdot B_i$, gdzie $P(I_i = 1) = q_i$. Inaczej mówiąc, ubezpieczenia wypadkowe są dwojakiego rodzaju ($k = 1, 2$) i mają taką samą strukturę. Rozkład wypłaty (pod warunkiem, że szkoda następuje) tzn. $X_k | I_k = 1$ jest rozkładem obciętym wykładniczym. Rozkład obcięty wykładniczy zadany jest dystrybuantą

$$F_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{dla } 0 \leq x < L \\ 1 & \text{dla } x \geq L \end{cases},$$

dla pewnego $L > 0$. Specyfikując różne wartości parametrów skali i poziomu obciążenia, zakładamy następujące dane

k	n_k	q_k	λ_k	L_k
1	500	0.10	1	2.5
2	2000	0.05	2	5.0

Znajdź dla $S = X_1 + \dots + X_n$, θ takie, że

$$P(S \leq (1 + \theta)ES) = 0.95.$$

6. (6p.) Łączna wartość szkód S w portfelu ryzyk jest sumą łącznej wartości szkód S_1 w podportfelu 1 i łącznej wartości szkód S_2 w podportfelu 2. S_1 i S_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi. W tabeli podane są ich wartości oczekiwane, wariancję i skośność:

	$E[S_i]$	$E[(S_i - E[S_i])^2]$	$E[(S_i - E[S_i])^3]$
S_1	200	500	4000
S_2	150	350	2800

Rozważmy dwie alternatywne metody aproksymacji rozkładu zmiennej S :

- metoda 1: aproksymujemy rozkład zmiennej S za pomocą rozkładu przesuniętego $Gamma(c, \alpha, \beta)$ (gdzie c jest parametrem przesunięcia);
- metoda 2: aproksymujemy osobno rozkład zmiennej S_1 za pomocą rozkładu przesuniętego $Gamma(c_1, \alpha_1, \beta_1)$ i rozkład zmiennej S_2 za pomocą rozkładu przesuniętego $Gamma(c_2, \alpha_2, \beta_2)$, a następnie splot otrzymanych rozkładów traktujemy jako aproksymację rozkładu zmiennej S .

Wylicz różnicę: $c - (c_1 + c_2)$.

7. (3p.) Portfel ryzyk składa się z dwóch niezależnych podportfeli. Wyznaczono charakterystyki rozkładu łącznej wartości szkód z tych podportfeli:

	wartość oczekiwana	wariancja	skośność
podportfel 1	5	9	54
podportfel 2	15	16	16

Rozkład łącznej wartości szkód z całego portfela aproksymujemy przesuniętym rozkładem $Gamma(x_0, \alpha, \beta)$ zachowującym wartość pierwszych trzech momentów zmiennej aproksymowanej. Wylicz parametry (x_0, α, β)

8. (3p.) Liczba szkód generowanych przez pewną grupę ryzyk w ciągu miesiąca ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 33.33. Wysokość pojedynczej szkody ma rozkład prawdopodobieństwa o wartości oczekiwanej 8 i odchyleniu standardowym 6. Niech S_{12} oznacza łączną wartość szkód w ciągu roku.
Niech q będzie liczbą taką, że $P(S_{12} > q) = 0.95$. Stosując aproksymację normalną, wylicz q .
9. (M) Niezależne szkody X_i w portfelu przyjmują wartości 1,2,3,4,5,6 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.1,0.2,0.3,0.2,0.1,0.1. Liczba szkód N w portfelu jest losowa i ma rozkład Poissona z $\lambda = 10$. Policz rozkład wielkości portfela S przy użyciu algorytmu Panjera (wzór z wykładu, skrypt).
10. (M) Niezależne szkody X_i w portfelu przyjmują wartości 1,2,12,13,18 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.05,0.05,0.8,0.05,0.05. Liczba szkód N w portfelu jest losowa i ma rozkład Poissona z $\lambda = 10$. Wyznacz pierwsze cztery momenty wielkości portfela $S = \sum_{i=1}^N X_i$ (dla

$N = 0$ przyjmujemy $S=0$). Policz średnią wartość, wariancję i skośność wielkości portfela. Znajdź wartości $P(S = i)$ dla $i = 0, \dots, 200$. Wylicz parametry aproksymacji rozkładem normalnym i rozkładem gamma. Zrób wykresy rozkładu S i jego aproksymacji rozkładami: normalnym i gamma. Zbadaj jakość przybliżenia dla zmieniającego się parametru λ .

11. (M) Szkody X_i są niezależne o wartościach 0, 1, 2, 3 z prawdopodobieństwami 0.3, 0.2, 0.4, 0.1, odpowiednio. Zbadaj przybliżenie rozkładu sumy takich szkód rozkładem normalnym w zależności od długości sumowania.