

MUMIO Lab 6 (składki, kontrakt stop-loss)

1. (6p.) Niech X oznacza ryzyko (zmienną losową o własności $P(X \geq 0) = 1$), a $H(\cdot)$ niech oznacza formułę kalkulacji składki (przyporządkowującą każdemu ryzyku liczbę nieujemną lub $+\infty$).

Która z poniższych pięciu formuł kalkulacji składki jest addytywna $H(X + Y) = H(X) + H(Y)$, translatywna $H(X + c) = H(X) + c$ oraz iteratywna $H(H(X | \Theta)) = H(X)$?

(A) $H(X) = (1 + \alpha)E[X], \quad \alpha > 0$

(B) $H(X) = E[X] + \alpha \cdot \text{Var}[X], \quad \alpha > 0$

(C) $H(X) = E[X] + \alpha \cdot \sqrt{\text{Var}[X]}, \quad \alpha > 0$

(D) $H(X) = \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha X}], \quad \alpha > 0$

(E) $H(X) = \delta \cdot E[X] + (1 - \delta)r_{0.1}, \quad \delta \in (0, 1), r_{0.1} = \inf\{r : P(X > r) \leq 0.1\}$

2. (3p.) Niech $u(w) = w - \alpha w^2$, $w < 1/2\alpha$, $\alpha > 0$. Załóżmy, że $w = 10$, $P(S = 10) = 0.5 = 1 - P(S = 0)$, $\alpha = 0.01$. Wylicz H z $E[u(w - S)] = u(w - H)$. Porównaj wynik z wartością H dla $w = 20$.
3. (3p.) Wielkość szkody S jest zmienną losową o rozkładzie $U[0, 10]$. Oblicz i porównaj współczynniki zmienności zmiennych S , $(S - 5)_+$, $\min(S, 5)$, tzn. wielkości szkody i udziałów przy podziale ryzyka w kontrakcie stop-loss.
4. (3p.) Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X dany jest w tabeli:

x	0	1	2	5	10	20
$P(X = x)$	0.8	0.1	0.03	0.03	0.03	0.01

Wyznacz d , jeśli wiadomo, że $E[I_d(X)] = 0.37$.

5. (3p.) Jeśli zmienna losowa Y wyraża wartość szkody, to zmienna $I_d(Y) = (Y - d)_+$ wyraża nadwyżkę szkody ponad d . Załóżmy, że Y ma rozkład dyskretny określony na liczbach naturalnych. Jeśli w dodatku ograniczymy zainteresowanie do zmiennych $I_d(Y)$ o wartościach $d = 0, 1, 2, 3, \dots$, to pokaż, że

$$E[I_{d+1}(Y)] = E[I_d(Y)] - P(Y > d)$$

oraz

$$E[(I_{d+1}(Y))^2] = E[(I_d(Y))^2] - 2 \cdot E[I_d(Y)] + P(Y > d)$$

6. (3p.) Wartość szkody S ma rozkład określony na zbiorze $\mathbf{N}$. Składka netto za nadwyżkę łącznej wartości szkód S ponad liczbę k wynosi:

k	1	2	3	4
$E[(S - k)_+]$	5.2500	4.5500	3.9075	3.3310

Wylicz $P(S = 2) + P(S = 3)$.

7. (3p.) Dla pewnego ryzyka ilość szkód N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 2, a pojedyncza szkoda Y ma rozkład:

$$P(Y = 1) = 0.5,$$

$$P(Y = 3) = 0.5.$$

Wylicz wartość oczekiwaną nadwyżki łącznej wartości szkód S z tego ryzyka ponad liczbę 3 (w przybliżeniu).

8. (3p.) Rozkład wartości szkody Y dany jest gęstością:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{(1+y)^4}, & \text{dla } y > 0, \\ 0, & \text{dla } y \leq 0. \end{cases}$$

Jeśli ilość szkód N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 0.1, a ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad 2. Wylicz składkę netto tej sumy, tzn. $\sum_{i=1}^N (Y_i - 2)_+$.

9. (3p.) Łączna wartość szkód S z pewnego ryzyka ma rozkład złożony Poissona z parametrem częstotliwości równym 0.2 oraz rozkładem pojedynczej szkody Y :

$$P(Y = 1) = 0.5,$$

$$P(Y = 2) = 0.3,$$

$$P(Y = 3) = 0.2.$$

Wylicz składkę netto za pokrycie łącznej wartości szkód do wysokości 3 (nadwyżka łącznej wartości szkód ponad 3 pozostaje niepokryta).

10. (3p.) Rozkład wartości szkody X dany jest gęstością

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{(1+y)^5}, & \text{dla } y > 0, \\ 0, & \text{dla } y \leq 0. \end{cases}$$

Jeśli ilość szkód ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 0.3, a ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad 1. Wylicz składkę netto za takie ubezpieczenie.

11. (3p.) Rozkład wartości szkody Y określony jest na zbiorze liczb naturalnych. W tabeli podane są wartości oczekiwane nadwyżki szkody ponad d dla kolejnych (naturalnych) liczb d :

d	7	8	9	10
$E[(Y - d)_+]$	2.42	2.10	1.85	1.65

Wylicz wartość $P(Y = 8)$.

12. (3p.) Wiedząc, że szkoda ma gęstość f daną wzorem

$$f(x) = \beta \exp(-\beta x), \quad \beta > 0, \quad x > 0,$$

oblicz dla dowolnego $d > 0$, $E[X - d]_+$.

13. (3p.) Rozkład losowej straty X jest dany przez gęstość $f(x) = \frac{1}{100}$, $0 < x < 100$

a) Policz $E[X]$, $Var[X]$;

b) Niech $I(x) = kx$, $k \in (0, 1)$ będzie polisą proporcjonalną oraz $I_d(x) = (x - d)_+$ będzie polisą stop-loss. Wyznacz takie k i takie d , aby cena polisy wynosiła $P = 12.5$;

c) Używając k i d z b) pokaż, że $Var(X - I(X)) > Var(X - I_d(X))$.

14. (3p.) Ryzyko X ma rozkład

x	1	2	3	10
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

Oblicz $E[I_d(X)]$ dla $d = 2.5$

15. (3p.) Dla zmiennej losowej X o rozkładzie Pareto i gęstości

$$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^{\alpha+1}, \quad x > 0,$$

udowodnij: $E[(I_d(X))] = \left(\frac{\lambda}{\lambda + d} \right)^{\alpha-1} E[X]$, jeżeli $1 < \alpha$.

16. (3p.) Dla pewnego ubezpieczenia w roku 1998 wartość szkody ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1000)$. Udział własny ubezpieczonego w szkodzie wynosi 20% jej wartości, jednak nie więcej niż 100. W wyniku inflacji wysokość szkód w roku 1999 wzrośnie o 10%. Udział własny ubezpieczonego pozostaje taki sam jak w 1998 roku (tj., odpowiednio, 20% i 100). O ile wzrośnie wartość oczekiwana wypłaty?

17. (3p.) O rozkładzie pewnego ryzyka S wiemy, że:

- $E[(S - 20)_+] = 8$
- $E[S|10 < S \leq 20] = 13$
- $P(S \leq 20) = \frac{3}{4}$
- $P(S \leq 10) = \frac{1}{4}$.

Obliczy składkę $E[(S - 10)_+]$.

18. (3p.) Zmienna losowa S przyjmuje wartości nieujemne. Mamy następujące dane

i	d_i	$F(d_i)$	$E[(S - d_i)_+]$
1	5	0.45	20
2	7	0.65	19

Oblicz $E[S|5 < S \leq 7]$

19. (M) Portfel ubezpieczeniowy pewnej firmy składa się z $n = 10^6$ kontraktów ubezpieczających dom na następny rok. Przyjmuje się, że szansa zniszczenia domu wynosi 10^{-4} . Przyjmujemy $P(X_i = 1) = 10^{-4} = 1 - P(X_i = 0)$. Niech $d = 150$ i założmy najpierw, że $X_1, \dots, X_n$ są niezależne. Policz $E[(\tilde{S}_n - d)_+]$, gdzie $\tilde{S}_n$ jest zmienną o rozkładzie normalnym przybliżającą $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Założenie o niezależności ryzyk przy ubezpieczaniu domów jest jednak bardzo mało realistyczne. Założmy, że istnieje jedna losowa przyczyna Θ indukująca zajście huraganu. Niech $P(\Theta = 1) = 1/100 = 1 - P(\Theta = 0)$. Założmy teraz, że zmienne $X'_i, i = 1, \dots, n$ nie są niezależne, lecz, że są niezależne warunkowo, tzn.

$$P(X'_1 = x_1, \dots, X'_n = x_n | \Theta = \theta) = P(X'_1 = x_1 | \Theta = \theta) \cdots P(X'_n = x_n | \Theta = \theta).$$

Przyjmijmy, że dla $i = 1, \dots, n$

$$P(X'_i = 1 | \Theta = 1) = 10^{-3}$$

$$P(X'_i = 1 | \Theta = 0) = 1/11000.$$

Pokaż, że rozkłady pojedynczych ryzyk X'_i są takie same jak poprzednio, przy założeniu niezależności. Warunkując względem Θ i pod warunkiem ustalonej wartości stosując przybliżenie CTG, mamy

$$\tilde{S}'_n \sim 0.01N(1000, 1000) + 0.99N(1000/11, 1000/11).$$

Policz dla tej mieszanki wartość netto nadwyżki nad $d = 150$: $E[(\tilde{S}'_n - d)_+]$ i porównaj z wynikiem dla $\tilde{S}_n$.

20. (M) Policz i narysuj funkcję $G(d) = EI_d(X)$, gdy X ma a) rozkład jednostajny na $[1, 2]$, b) atom w zerze wielkości 0.25 i poza tym rozkład jednostajny na $[1, 2]$, c) atom w punkcie 3 wielkości 0.25 i poza tym rozkład jednostajny na $[1, 2]$. Co można powiedzieć o uporządkowaniu $<_{cx}$ badanych rozkładów? Sprawdź, czy kryterium Karlina-Novikowa tutaj zachodzi.
21. (M) Rozważmy dwie grupy ryzyk: pierwsza składa się z 900 niezależnych ryzyk $X_1, \dots, X_{900}$ z tą samą średnią 1 i wariancją 4, druga składa się z 800 niezależnych (nawzajem i od ryzyk z pierwszej grupy) ryzyk $Y_1, \dots, Y_{800}$ ze średnią 2 i wariancją 8. W obu grupach ustalono składki netto z narzutem H_1 i H_2 tak, by prawdopodobieństwo, iż suma szkód przekroczy sumę składek wyniosło 0.0013. W tym celu przyjęto, że ryzyka łączne w obu portfelach można przybliżyć rozkładem normalnym. Powstaje pytanie o ustalenie nowych składek z narzutem H_1^* i H_2^* tak, by po połączeniu portfeli został zachowany standard bezpieczeństwa stosowany w pojedynczych portfelach. Jaki jest dopuszczalny zbiór wartości dla H_1^* i H_2^* ?