

MUMIO Lab 7 porządki, zależności

- 1.
2. Sprawdź, że w klasie wszystkich zmiennych losowych, które mają ustaloną wartość średnią, powiedzmy μ , najmniejszą zmienną względem relacji $<_{icx}$ jest zmienna $X \equiv \mu$.
3. Jeśli rozważymy klasę zmiennych o ustalonej wartości średniej μ takich, aby wartości zmiennych leżały w skończonym przedziale $[a, b]$, to sprawdź, że rozkładem maksymalnym względem $<_{icx}$ w takiej klasie jest rozkład o dystrybuancie

$$F_{max}(x) = \frac{b - \mu}{b - a} I_{[a, \infty)}(x) + \frac{\mu - a}{b - a} I_{[b, \infty)}(x).$$

4. Z Twierdzenia Sklara wiemy, że dla dowolnej dystrybuanty łącznej $F_{(X,Y)}$ zmiennych X, Y o brzegowych dystrybuantach F_X, F_Y ciągłych, istnieje jednoznacznie wyznaczona funkcja $C : R \times R \rightarrow [0, 1]$, taka, że

$$F_{(X,Y)}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

(Nazywamy ją funkcją **copula**). $C(x, y)$ jest dystrybuantą dwuwymiarową o nośniku zawartym w $[0, 1] \times [0, 1]$.

(i) Narysuj na jednym wykresie funkcje $C^*(x, y) = xy$, $C^-(x, y) = \max(0, x + y - 1)$, $C^+(x, y) = \min(x, y)$, $x, y \in [0, 1]$.

(ii) Zrób animację ze względu na parametr α następujących funkcji copula

Clayton : $C(x, y) = (x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1)^{-(\alpha^{-1})}$, $\alpha > 0$.

Frank:

$C(x, y) = -(\alpha^{-1}) \ln(1 + (1 - \exp(-\alpha x))(1 - \exp(-\alpha y)) / (\exp(-\alpha) - 1))$,

$\alpha \neq 0$.

Sprawdź, że dla nich zachodzi $C^- \leq C \leq C^+$.

5. Rozważmy dwa dowolne ryzyka o rozkładach logarytmicznie normalnych $X \sim LN(0, \sigma^2)$, $Y \sim LN(0, 1)$ o których nie mamy informacji o łącznej dystrybuancie. Stosując wzory z wykładu policz, że dla $\sigma = 4$,

$$-0.00025 \leq \text{Corr}(X, Y) \leq 0.01372.$$