

MUMIO Lab 8 Użyteczność, miary ryzyka/proces zgłoszeń

1. (3p.) Decydent kieruje się maksymalizacją wartości oczekiwanej funkcji użyteczności postaci: $u(x) = \sqrt{x}$, posiada majątek wart 400 i narażony jest na stratę X o rozkładzie trzypunktowym:
 $P(X = 0) = P(X = 50) = P(X = 100) = \frac{1}{3}$.
Gotów jest on zapłacić nie więcej niż $P = 30$ za pokrycie ryzyka X (lub jego części $k(X)$). Ubezpieczyciele oferują wszystkie dopuszczalne kontrakty po cenie równej składce netto. Wylicz maksimum oczekiwanej użyteczności decydenta $E[u(w + k(X) - X - P)]$, dla $E(k(X)) = P$.
2. (3p.) Pewien decydent posiada wyjściowy majątek w kwocie $w = 10$. Narażony jest on na stratę X o rozkładzie normalnym z parametrami $(\mu, \sigma^2) = (2, 6)$. (*Strata jest tutaj terminem umownym, ponieważ z pewnym prawdopodobieństwem będzie ujemna, a więc de facto wystąpi zysk*). W swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją funkcji użyteczności o postaci: $u(x) = -\exp(-\frac{1}{5} \cdot x)$. Decydent dokonuje wyboru współczynnika $\beta \in [0, 1]$, w efekcie czego w jego udziale pozostanie strata w wysokości $\beta \cdot X$, natomiast pozostałą część straty w wysokości $(1 - \beta) \cdot X$ pokryje ubezpieczyciel za cenę równą $\frac{6}{5} \cdot (1 - \beta) \cdot \mu$. Wylicz współczynnik β , który wybierze decydent.
3. (3p.) Kapitał początkowy wynosi $w = 100$. Inwestor ma awersję do ryzyka z funkcją $u(w) = -\exp(-\alpha w)$, $\alpha > 0$. Szkoda mu zagrażająca ma rozkład wykładniczy $X \sim \text{Exp}(2)$. Jaką składkę G jest gotowy płacić inwestor?
4. (3p.) Jeśli założymy, podobnie jak J. Bernoulli, że funkcja użyteczności $u(w)$ posiadanego majątku spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{du(w)}{dw} = \frac{k}{w}, \quad w > 0, \quad k > 0,$$

to znajdź jej postać. Jeśli teraz podejmujący decyzję posiadacz kwoty w , $w > 1$ używa takiej właśnie funkcji u oraz stoi w obliczu losowej straty X o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$, pokaż, że maksymalna kwota jaką on zapłaci jako składkę w celu ubezpieczenia się od tej straty wynosi

$$G = w - \frac{w^w}{e(w-1)^{w-1}}$$

5. (3p.) Niech G takie, że

$$u(w - G) = E[u(w - X)]$$

Zaóómy, ó funkcja uóytecznoóci u jest dwukrotnie róóniczkowalna oraz X jest zmienną losową o skoóózonej wariancji. Pokaż, óe

$$G \approx E[X] - \frac{u''(w - E[X])}{2u'(w - E[X])} Var[X].$$

6. (3p.) Niech

$$\varrho(X) = Var[X, p] := F_X^{-1}(p),$$

dla $p \in (0, 1)$. Sprawdź, óe dla kaódego X i $\epsilon > 0$ oraz dla kaódej funkcji $\varrho(X)$

$$E[(X - Var[X, 1 - \epsilon])_+ + \epsilon Var[X, 1 - \epsilon]] \leq E[(X - \varrho(X))_+ + \varrho(X)\epsilon]$$

7. (3p.) Znajdó zmiennie losowe X, Y , takie by nie zachodziła własnoóó

$$Var[X + Y, p] \leq Var[X, p] + Var[Y, p].$$

8. (3p.) Niech

$$TVaR[X, p] := \frac{1}{1 - p} \int_p^1 Var[X, u] du.$$

Uzasadnij, óe $TVaR[X, p] \geq E[X]$.

9. (3p.) Sprawdź, óe jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, to (Φ oznacza standardową dystrybuantę rozkładu normalnego)

$$Var[X, p] = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p),$$

$$TVaR[X, p] = \mu + \sigma \frac{\Phi'(\Phi^{-1}(p))}{1 - p}.$$

10. (M) Dla $T_0 = 0$, $T_{n+1} - T_n = X_{n+1}$, zakładamy, óe (X_n) tworzą ciąg iid zmiennych dodatnich. (T_n oznaczają chwile zgłoszeń). Niech $N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{T_i \leq t\}}$ będzie liczbą zgłoszeń do chwili t . Wylicz $EN(10)$ (byó może przyblióoną wartoóó) przy założeniu, óe X_n mają rozkład Weibulla z wybranymi parameterami (większymi i mniejszymi od 1). Osobno zbadaj przypadek rozkładu wykładniczego i wylicz $N(10)$. Zróó symulację procesu $(N(t))$.