

MUMIO, Lab 9 Proces ryzyka, czas dyskretny

1. (3p.) Model dyskretny. Niech $E[W] < c$. Definiujemy **współczynnik dopasowania** dla zmiennej losowej W jako liczbę $R(W, c)$ która jest dodatnim rozwiązaniem równania $M_{W-c}(r) = 1$. Załóżmy, że W przyjmuje dwie wartości: $P(W = a) = p = 1 - P(W = b)$. Dla $a = 2, b = 0, p < \frac{1}{2}, c = 1$ wylicz $R(W, c)$. Podaj wzór na prawdopodobieństwo ruiny w takim modelu szkód.
2. (3p.) Dla dyskretnego procesu nadwyżki $R_n = u + \cdot n - S_n, S_n = \sum_{i=1}^n W_i, n = 0, 1, 2, \dots$ wiemy, że $\Delta_n = R_n - R_{n-1}$, może przyjmować wartości $-1, 0, 1$ oraz $E[\Delta_n] = 0.4, Var[\Delta_n] = 0.44$. Wyznacz współczynnik dopasowania R ($R > 0 : e^{-R} \cdot M_{W_i}(R) = 1$). Podaj najbliższą wartość.
3. (3p.) Rozważmy proces nadwyżki ubezpieczyciela z kontrolą wypłacalności raz do roku $R_n = u + c \cdot n - S_n$, gdzie:
 $S_n = \sum_{i=1}^n W_i, W_i$ to zmienne losowe o rozkładzie Gamma o wartości oczekiwanej równej 3 i wariancji równej także 3. Roczna składka wynosi $c = \ln 64$. Wylicz przybliżony współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*) R dla tego procesu.
4. (3p.) Model dyskretny rezerwy. Ubezpieczyciel otrzymuje corocznie składkę $c = 2$ i wypłaca odszkodowania za rok i -ty w wysokości W_i . W_i są niezależne i mają jednakowy rozkład: $P(W_i = 1) = \frac{6}{7}$ oraz $P(W_i = 4) = \frac{1}{7}$. Wylicz współczynnik dopasowania R .
5. (3p.) Załóżmy, że $W \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dla $c = (1+\theta)E[W]$, wylicz $R(N(\mu, \sigma^2), c)$.
6. (M) Używając generatora liczb losowych przedstaw graficznie możliwe realizacje procesu ryzyka $R_n = u + cn - S_n$, gdzie $S_n = W_1 + \dots + W_n$, dla ustalonych wartości c, u i rozkładu szkód W_n o dystrybucji F wykładniczej.
7. (M) Wykonaj powyższe zadanie dla F Weibulla i Pareto o tej samej wartości oczekiwanej. Porównaj realizacje dla różnego typu rozkładów.
8. (M) Wylicz prawdopodobieństwo ruiny w modelu dyskretnym $R_n = u + n - S_n, S_n = W_1 + \dots + W_n$, jako funkcję zmiennej u , dla szkód o rozkładzie geometrycznym na $0, 1, 2, \dots$ z parametrem $p = 5/8$ przy pomocy symulacji. Porównaj z wykresem dokładnym.
9. (M) Wykonaj zadanie poprzednie dla rozkładu szkód dwumianowego o wartości średniej $1/3$, gdy $n = 10$.
10. (M) W modelu dyskretnym ruiny niech $c = 1$, oraz W_i mają rozkład geometryczny $P(W_i = k) = p(1 - p)^k, k = 0, 1, \dots$, dla $p = 3/4$.

Zrób wykres przybliżenia Cramera dla prawdopodobieństwa ruiny i porównaj z wykresem dokładnym.