

IMIĘ I NAZWISKO:.....

**Egzamin z matematyki ubezpieczeniowej (MUMIO), semestr zimowy
2017/18**

Data: **6.02.2018.**

Egzaminator: Ryszard Szekli

INSTRUKCJE:

Rozwiązując test zakreślamy literką **X** POPRAWNE ODPOWIEDZI W TABELCE NA KOŃCU!

Za każdy prawidłowo oznaczony podpunkt otrzymuje się 1 punkt. Piszemy bez użycia notatek i innych pomocniczych materiałów.

Max punktów: 50.

0-25=2.0

26-30=3.0

31-35=3.5

36-40=4.0

41-45=4.5

46-50=5.0

CZAS ROZWIĄZYWANIA: 150 min.

1. Niech N oraz Λ będą zmiennymi losowymi takimi, że $P(N = k | \Lambda = \lambda) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, $k = 0, 1, \dots$. Przyjmujemy, że $P(\Lambda = \lambda) = (1/2)^{\lambda+1}$, $\lambda = 0, 1, 2, \dots$

- (a) Wtedy $Var N = 4$;
- (b) wtedy $E(Var(N|\Lambda)) = 1$;
- (c) wtedy $P_N(t) = 1/(2 - e^{(t-1)})$;
- (d) wtedy $P(\Lambda = 1 | N = 0) = (1/(4e))(2 - e^{-1})$;
- (e) wtedy $Var \Lambda = 1$.

2. Niech $S_1 = X_1 + \dots + X_{N_1}$, gdzie X_i są niezależne i przyjmują wartość 0 z prawd. $1/2$ i wartość 2 z prawd. $1/2$ oraz niezależna od nich zmienna N_1 ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 1. Niech $S_2 = Y_1 + \dots + Y_{N_2}$ będzie niezależną od S_1 zmienną losową, gdzie Y_i są wzajemnie niezależne i przyjmują wartości 1 z prawd. $1/2$ i wartość 3 z prawd. $1/2$ oraz N_2 jest niezależna i ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 2.

- (a) Wtedy $E(S_1 + S_2) = 5$;
- (b) wtedy $Var(S_1 + S_2) = 12$;
- (c) wtedy $P_{S_1+S_2}(t) = e^{3(t/3+t^2/3+t^3/3-1)}$;
- (d) wtedy $S_1 + S_2$ ma taki rozkład jak $S = Z_1 + \dots + Z_N$, gdzie Z_i są niezależne o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą $F_Z(x) = (1/4)I_{[0,\infty)}(x) + (1/2)I_{[1,\infty)}(x) + (1/4)I_{[2,\infty)}(x)$, a N jest niezależną zmienną o rozkładzie Poissona z parametrem 3;
- (e) wtedy $P(S_1 + S_2 = 0) = e^{-5/2}$.

3. Ryzyko X przyjmuje wartość 0 z prawd. $1/3$ i wartość 1 z prawd. $1/3$, wartość 3 z prawd. $1/3$. Przyjmujemy, że inwestor ustala składkę netto za udział własny w podziale ryzyka na $Eh(X) = 1/3$.

- (a) Wtedy dla każdego kontraktu z ustaloną składką netto $E(h(X) = 1/3, Var(h(X))) \geq 1/18$;
- (b) wtedy przy wyborze kontraktu stop-loss postaci $h(X) = \min(d, X)$ o składce netto $1/3$, należy wybrać $d = 0.6$;
- (c) wtedy $Var(\min(0.6, X)) = 1/18$;
- (d) wtedy $E(X - d)_+ = 2/3$ dla $d = 0.6$;
- (e) wtedy $E(X - 1)_+ = 1/3$.

4. Ryzyko X przyjmuje wartości 1, 2, 3 z prawd. $1/3$. Kapitał początkowy $w = 2/3$. Funkcja użyteczności $u(x) = 1 - e^{-x}$, $x \in R$. Przyjmujemy, że inwestor ustala składkę netto za ryzyko przekazane do reasekuracji w podziale ryzyka $X = h(X) + k(X)$, na $Ek(X) = 1/3$.
- Wtedy przy wyborze kontraktu stop-loss $k(X) = I_d(X) = (X - d)_+$ o wartości oczekiwanej $1/3$, wartość $d = 1.5$;
 - wtedy $E((\min(1.5, X))^2) = 11/6$;
 - wtedy $E(u(w - \min(2, X) - 1/3)) \geq E(u(w - h(X) - 1/3))$ dla każdego kontraktu $h(X)$ jak wyżej;
 - wtedy $EI_{2.5}(X) = 1/5$;
 - $E(u(w - \min(1.5, X) - 2/3)) = 1 - e/3 - 2e^{3/2}/3$.
5. Niech $R_0 = u$, $R_n = u + n - (W_1 + \dots + W_n)$, dla $n \geq 1$, $u > 0$, (W_i) iid. Niech $\psi(u) = P(T < \infty)$, $T = \inf\{n : R_n < 0\}$. Przyjmujemy, że W_i przyjmują wartość 0 z prawd. $1/2$, wartość 1 z prawd. $1/4$ i wartość 2 z prawd. $1/4$.
- Wtedy $\psi(u) = P(M > u)$ dla zmiennej o funkcji tworzącej $P_M(t) = 1/(2 - t)$;
 - wtedy $\psi(1) = 1/4$;
 - wtedy $\psi(u) = P(M > u)$ dla zmiennej M która ma złożony rozkład geometryczny, taki jak $Y_1 + \dots + Y_N$, gdzie Y_i sa niezależne, przyjmujące wartość 0 z prawd. $1/3$ i wartość 1 z prawd. $2/3$, a niezależna zmienna N ma rozkład geometryczny na $0, 1, 2, \dots$ z parametrem $p = 1/4$;
 - wtedy $\psi(0) = 1/2$;
 - wtedy $\psi(u) = P(M > u)$ dla zmiennej M , która ma rozkład geometryczny na $0, 1, 2, \dots$ z pr. sukcesu $1/2$.
6. Niech dla $t \geq 0$, $R(t) := u + 2t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, $u \geq 0$, $c > 0$, (X_i) iid, $(N(t), t \geq 0)$ proces Poissona z intensywnością $\lambda = 2$. Niech $\psi(u) = P(T < \infty)$, gdzie $T = \inf\{t : R(t) < 0\}$. Przyjmujemy, że X_i przyjmują wartość 0 z prawd. $1/2$, wartość 1 z prawd. $1/4$ i wartość 2 z prawd. $1/4$.
- Wtedy $\psi(u) = P(M^* > u)$ dla zmiennej M^* o rozkładzie złożonym geometrycznym takim jak $Y_1 + \dots + Y_N$, gdzie Y_i sa niezależne, o rozkładzie z gęstością $f_Y(x) = (2/3)I_{[0,1)}(x) + (1/3)I_{[1,2)}(x)$, a niezależna zmienna N ma rozkład geometryczny na $0, 1, 2, \dots$ z parametrem $p = 3/4$;
 - wtedy $\psi(0) = 3/4$;
 - $\psi(u) = P(M^* > u)$ dla zmiennej M^* , takiej, że $EM^* = 2.5$;
 - wtedy, jeśli szkody X_i miałyby rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $3/4$, to $\psi(0) = 1/4$;
 - wtedy, jeśli szkody X_i miałyby rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $3/4$, to $\psi(u) = (3/4)e^{-u/3}$.
7. O rozkładzie pewnego ryzyka S wiemy, że:
- $E[(S - 2)_+] = 8$
 - $E[S|1 < S \leq 2] = 1.3$
 - $P(S \leq 2) = \frac{2}{4}$
 - $P(S \leq 1) = \frac{1}{4}$.

Wtedy

- $E[(S - 1)_+] = 8.575$
- $E[SI_{1 < S \leq 2}] = 13/40$
- $ES \leq 9.6$
- $E(S - d)_+$ jest funkcją wklęsłą zmiennej d
- $ES \geq 9.325$

8. Jeśli

$$P(N = n) = \int_0^\infty P(N = n | \Theta = \theta) dF_\Theta(\theta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\theta} \theta^n}{n!} dF_\Theta(\theta),$$

to

- (a) $P_N(t) = E[e^{\Theta(t-1)}]$
- (b) $\text{Var}[N] = E[N] + E[\Theta] + \text{Var}[\Theta]$
- (c) $E[N^2] = E[\Theta^2] + E[\Theta]$
- (d) Załóżmy, że Θ ma rozkład o funkcji tworzącej momenty

$$M_\Theta(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha \quad \text{dla } t < \beta,$$

(tzn. rozkład $\Gamma(\alpha, \beta)$), to $M_N(t) = (\frac{p}{1-qe^t})^\beta$, dla $p = 1 - q$, $p = \alpha/(\alpha + 1)$

(e) $P(N = 0) = E[e^{-\Theta}]$

9. Niech X i Y będą niezależnymi ryzykami o wartościach naturalnych oraz $S = X + Y$, o funkcjach tworzących, odpowiednio P_X , P_Y i P_S . Wtedy,

- (a) Ciąg ogona dyskretnego rozkładu zmiennej X określamy przez $q_n := p_{n+1} + p_{n+2} + \dots$. Funkcja tworząca ciągu $(q_n)_{n \geq 0}$, dana przez $Q_X(t) = \sum_{n=0}^\infty q_n t^n$, spełnia $Q_X(t) = \frac{1-P_X(t)}{1-t}$.
- (b) $Q'_X(1) = E(X(X-1))$
- (c) $\text{Var} X = P''_X(1) + P'_X(1) - (P'_X(1))^2$
- (d) Liczba porażek przy oczekiwaniu na $(n \geq 1)$ -ty sukces jest sumą n niezależnych zmiennych losowych o rozkładach geometrycznych na $0, 1, \dots$, z parametrem sukcesu p , $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Zmienna ta ma funkcję tworzącą prawdopodobieństwa $P_{S_n}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^n$
- (e) $Q_X(1) = EX$

10. (a) Niech X będzie zmienną o rozkładzie z gęstością $\exp(-x)I_{(0,\infty)}(x)$, wtedy zmienna $\exp(-X)$ ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$.
- (b) Niech funkcja C (funkcja copula) będzie wyznaczona relacją $F_{(X,Y)}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$, dla pewnej dystrybucyjnej łącznej zmiennych (X, Y) , $F_{(X,Y)}$, gdzie F_X, F_Y są dystrybucyjnymi brzegowymi. Wtedy $C(u \vee v) + C(u \wedge v) \geq C(x) + C(y)$, dla $u, v \in (0, 1) \times (0, 1)$, gdzie $\vee$ oznacza operację brania maksimum po współrzędnych wektorów u, v , a $\wedge$ oznacza operację minimum.
- (c) Niech $X = \min(W, Z)$ oraz $Y = \min(V, Z)$, gdzie zmienne W, V, Z są niezależne o rozkładach wykładniczych o średniej wartości 1. Wtedy $F_{(X,Y)}$ (rozkład Marshalla Olkina) ma funkcję copula C taką, że $C(x, y) \geq \min(x, y)$, $x, y \in (0, 1)$.
- (d) Dla pewnych zmiennych losowych (X, Y) jej funkcja copula C spełnia $C(x, y) \geq xy$, $x, y \in (0, 1)$, wtedy $\text{Cov}(X, Y) \geq 0$.
- (e) Jeśli X, Y są niezależne, to $F_{(X,Y)}(x, y) \geq \max(0, F_X(x) + F_Y(y) - 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
a)										
b)										
c)										
d)										
e)										