

**Zadania z matematyki ubezpieczeniowej z rozwiązaniami
do wykładu (MUMIO) 2018. Ryszard Szekli**

1. Zmienna X_1 ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, a niezależna od niej zmienna X_2 ma rozkład dany gęstością:

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dla } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{dla } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Wylicz $P(X_1 + X_2 \leq 2)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 2) &= \int_0^\infty P(X_1 + X_2 \leq 2 | X_2 = x) \cdot f_{X_2}(x) dx = \\ &= \int_0^1 P(X_1 + x \leq 2) \cdot 2x dx = \int_0^1 (1 - e^{-(2-x)}) 2x dx = \\ &= 1 - 2e^{-2} \int_0^1 e^x \cdot x dx = 1 - 2e^{-2}. \end{aligned}$$

2. Zmienne losowe X_1 i X_2 są niezależne i mają jednakowy rozkład o dystrybuancie: $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ 0.9 + x \cdot 0.01, & \text{dla } 0 \leq x \leq 10, \\ 1, & \text{dla } x > 10. \end{cases}$

Wylicz prawdopodobieństwo $P(X_1 + X_2 \leq 15)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 15) &= \int_0^{10} P(X_1 + X_2 \leq 15 | X_1 = x) \cdot dF_X(x) = \\ &= \int_0^{10} P(x + X_2 \leq 15) \cdot F'_X(x) dx + 0.9P(X_2 \leq 15) = \\ &= \int_0^{10} [0.9 + 0.01(15 - x)] \cdot I_{[5,15]}(x) \cdot 0.01 dx + \\ &\quad + 1 \cdot 0.9 + \int_0^{10} 0.01 \cdot I_{[0,5]}(x) dx \\ &= 0.01 \cdot \int_5^{10} (0.9 + 0.01(15 - x)) dx + 0.9 + \int_0^5 0.01 dx \\ &= \frac{799}{800} \end{aligned}$$

3. Zmienna X_1 ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, a niezależna od niej zmienna X_2 ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$. Wylicz $P(X_1 + X_2 \leq 2)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 2) &= \int_0^\infty P(X_1 + X_2 \leq 2 | X_2 = x) \cdot f_{X_2}(x) dx = \\ &= \int_0^\infty P(X_1 + x \leq 2) \cdot I_{(0,1)}(x) dx = \int_0^1 (1 - e^{-(2-x)}) dx = 1 - e^{-1} + e^{-2}. \end{aligned}$$

4. X_1 i X_2 to dwa niezależne ryzyka o zbiorze możliwych wartości $\{0, 1, 2, \dots\}$. Znamy wartości dystrybuanty $F_1(x) = P(X_1 \leq x)$ oraz $F_S(x) = P(X_1 + X_2 \leq x)$:

x	$F_1(x)$	$F_S(x)$
0	0.6	0.12
1	0.8	0.46
2	0.9	0.58
3	1	0.83

Wylicz $P(X_2 = 2)$.

Rozwiązanie:

Niech $S = X_1 + X_2$. Niech $f_S(x) = P(S = x)$. Z definicji splotu

$$f_S(x) = \sum_{i=0}^3 f_1(x-i) \cdot f_2(i),$$

$$\begin{cases} f_S(0) = f_1(0) \cdot f_2(0) \\ f_S(1) = f_1(1) \cdot f_2(0) + f_1(0) \cdot f_2(1) \\ f_S(2) = f_1(2) \cdot f_2(0) + f_1(1) \cdot f_2(1) + f_1(0) \cdot f_2(2) \end{cases}$$

Podstawiając dane z tabeli:

$$\begin{cases} 0.12 = 0.6 \cdot f_2(0) \Rightarrow f_2(0) = 0.2 \\ 0.34 = 0.2 \cdot f_2(0) + 0.6 \cdot f_2(1) \Rightarrow f_2(1) = 0.5 \\ 0.12 = 0.1 \cdot f_2(0) + 0.2 \cdot f_2(1) + 0.6 \cdot f_2(2) \Rightarrow f_2(2) = 0. \end{cases}$$

Stąd $f_2(2) = P(X_2 = 2) = 0$.

5. Niech X oznacza ryzyko (zmienną losową o własności $P(X \geq 0) = 1$), a $H(\cdot)$ niech oznacza formułę kalkulacji składki (przyporządkowującą każdemu ryzyku liczbę nieujemną lub $+\infty$). Która z poniższych pięciu formuł kalkulacji składki jest addytywna $H(X+Y) = H(X) + H(Y)$, translatywna $H(X+c) = H(X) + c$ oraz iteratywna $H(H(X|\Theta)) = H(X)$?

- (A) $H(X) = (1 + \alpha)E[X], \quad \alpha > 0$
 (B) $H(X) = E[X] + \alpha \cdot Var[X], \quad \alpha > 0$
 (C) $H(X) = E[X] + \alpha \cdot \sqrt{Var[X]}, \quad \alpha > 0$
 (D) $H(X) = \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha X}], \quad \alpha > 0$
 (E) $H(X) = \delta \cdot E[X] + (1 - \delta)r_{0.1}, \quad \delta \in (0, 1), r_{0.1} = \inf\{r : P(X > r) \leq 0.1\}$

Rozwiązanie:

(A) - translatywność

$$\begin{aligned} H(X + c) &= (1 + \alpha)E[X + c] = (1 + \alpha)(E[X] + c) \\ &= (1 + \alpha)E[X] + (1 + \alpha)c \neq H(X) + c = (1 + \alpha)E[X] + c. \end{aligned}$$

(B) • addytywność

$$\begin{aligned} H(X + Y) &= E[X + Y] + \alpha Var[X + Y] \\ &= E[X] + E[Y] + \alpha(Var[X] + Var[Y]) \\ &= E[X] + \alpha Var[X] + E[Y] + \alpha Var[Y] = H(X) + H(Y). \end{aligned}$$

• translatywność

$$H(X + c) = E[X + c] + \alpha Var[X + c] = E[X] + c + \alpha Var[X] = H(X) + c.$$

• iteratywność

$$\begin{aligned} H(H(X|\Theta)) &= E[H(X|\Theta)] + \alpha Var[H(X|\Theta)] \\ &= E[E[X|\Theta] + \alpha Var[X|\Theta]] + \alpha Var[E[X|\Theta] + \alpha Var[X|\Theta]] \\ &= E[E[X|\Theta]] + \alpha E[Var[X|\Theta]] + \alpha Var[E[X|\Theta] + \alpha Var[X|\Theta]] \\ &= E[X] + \alpha E[Var[X|\Theta]] + \alpha Var[E[X|\Theta]] + \alpha^3 Var[Var[X|\Theta]] \\ &\quad + 2\alpha Cov[E[X|\Theta], Var[X|\Theta]] \\ &= E[X] + \alpha Var[X] + \alpha^3 Var[Var[X|\Theta]] \\ &\quad + 2\alpha Cov[E[X|\Theta], Var[X|\Theta]] \\ &\neq H(X). \end{aligned}$$

(C) • addytywność

$$\begin{aligned} H(X + Y) &= E[X + Y] + \alpha \sqrt{Var[X + Y]} \\ &= E[X] + E[Y] + \alpha \sqrt{Var[X] + Var[Y]} \\ &\neq H(X) + H(Y) = E[X] + \alpha \sqrt{Var[X]} + E[Y] + \alpha \sqrt{Var[Y]}. \end{aligned}$$

(D) • addytywność

$$\begin{aligned} H(X + Y) &= \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha(X+Y)}] = \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha X} \cdot e^{\alpha Y}] \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha X}] \cdot E[e^{\alpha Y}] = \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha X}] + \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha Y}] \\ &= H(X) + H(Y), \end{aligned}$$

• translatywność

$$\begin{aligned} H(X + c) &= \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha(X+c)}] = \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha X} \cdot e^{\alpha c}] \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha X}] + \frac{1}{\alpha} \ln(e^{\alpha c}) = \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha c}] + c = H(X) + c, \end{aligned}$$

• iteratywność

$$\begin{aligned} H(H(X|\Theta)) &= H\left(\frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha(X|\Theta)}]\right) = \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha(1/\alpha \ln E[e^{\alpha(X|\Theta)}])}] \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\ln E[e^{\alpha(X|\Theta)}]}] \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln E[E[e^{\alpha(X|\Theta)}]] = \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha X}] = H(X). \end{aligned}$$

(E) • addytywność

$$\begin{aligned} H(X + Y) &= \delta E[X + Y] + (1 - \delta) \cdot \inf\{r : P(X + Y > r) \leq 0.1\} \\ &= \delta E[X] + \delta E[Y] + (1 - \delta)r_{0.1} \neq H(X) + H(Y). \end{aligned}$$

Odpowiedź (D).

6. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X dany jest w tabeli:

x	0	1	2	5	10	20
$P(X = x)$	0.8	0.1	0.03	0.03	0.03	0.01

Wyznacz d , jeśli wiadomo, że $E[I_d(X)] = 0.37$.

Rozwiązanie:

Niech $d \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} E[I_d] &= E[(X - d)_+] = \sum_{i=0}^n (x_i - d)_+ \cdot P(X = x_i) \\ &= (0 - d) \cdot 0.8 + (1 - d) \cdot 0.1 + (2 - d) \cdot 0.03 + (5 - d) \cdot 0.03 \\ &\quad + (10 - d) \cdot 0.03 + (20 - d) \cdot 0.01 \\ &= 0.37. \end{aligned}$$

Więc $d = \frac{0.37-0.81}{0.2} = 2.2 \notin (0, 1) \Rightarrow$ sprzeczność.
 Niech $d \in (1, 2)$:

$$\begin{aligned} 0.37 &= (2-d) \cdot 1 \cdot 0.03 + (5-d) \cdot 1 \cdot 0.03 \\ &\quad + (10-d) \cdot 1 \cdot 0.03 + (20-d) \cdot 1 \cdot 0.01 \\ &= 0.71 - 0.1 \cdot d. \end{aligned}$$

Stąd $d = \frac{0.37-0.71}{0.1} = 3.4 \notin (1, 2) \Rightarrow$ sprzeczność.
 Niech $d \in (2, 5)$:

$$0.37 = (5-d) \cdot 1 \cdot 0.03 + (10-d) \cdot 1 \cdot 0.03 + (20-d) \cdot 1 \cdot 0.01 = 0.65 - 0.07 \cdot d.$$

$$\text{Stąd } d = \frac{0.37-0.65}{0.07} = 4 \in (2, 5).$$

7. Jeśli zmienna losowa Y wyraża wartość szkody, to zmienna $I_d(Y) = (Y - d)_+$ wyraża nadwyżkę szkody ponad d . Załóżmy, że Y ma rozkład dyskretny określony na liczbach naturalnych. Jeśli w dodatku ograniczymy zainteresowanie do zmiennych $I_d(Y)$ o wartościach $d = 0, 1, 2, 3, \dots$, to pokaż, że

$$E[I_{d+1}(Y)] = E[I_d(Y)] - P(Y > d)$$

oraz

$$E[(I_{d+1}(Y))^2] = E[(I_d(Y))^2] - 2 \cdot E[I_d(Y)] + P(Y > d)$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} E[(I_{d+1}(Y))^2] &= \sum_{y=d+1}^{\infty} (y - (d+1))^2 P(Y = y) = \\ &= \sum_{y=d+1}^{\infty} [(y-d)^2 - 2(y-d) + 1] P(Y = y) = \\ &= E[(I_d(Y))^2] - 2 \cdot E[I_d(Y)] + P(Y > d). \end{aligned}$$

8. Wartość szkody S ma rozkład określony na zbiorze $\mathbf{N}$. Składka netto za nadwyżkę łącznej wartości szkód S ponad liczbę k wynosi:

k	1	2	3	4
$E[(S - k)_+]$	5.2500	4.5500	3.9075	3.3310

Wylicz $P(S = 2) + P(S = 3)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
E[(S-1)_+] &= P(S=2) + 2P(S=3) + 3P(S=4) + \dots = 5.25, \quad (i) \\
E[(S-2)_+] &= P(S=3) + 2P(S=4) + 3P(S=5) + \dots = 4.55, \quad (ii) \\
E[(S-3)_+] &= P(S=4) + 2P(S=5) + 3P(S=6) + \dots = 3.9075, \quad (iii) \\
E[(S-4)_+] &= P(S=5) + 2P(S=6) + 3P(S=7) + \dots = 3.3310. \quad (iv)
\end{aligned}$$

Obliczając różnicę (i)-(ii) dostajemy: $P(S=2) + P(S=3) + P(S=4) + \dots = 0.7$. Podobnie (iii)-(ii): $P(S=4) + P(S=5) + P(S=6) + \dots = 0.5765$. Otrzymane równania odejmiemy stronami. Stąd

$$P(S=2) + P(S=3) = 0.1235.$$

9. Dla pewnego ryzyka ilość szkód N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 2, a pojedyncza szkoda Y ma rozkład:

$$\begin{aligned}
P(Y=1) &= 0.5, \\
P(Y=3) &= 0.5.
\end{aligned}$$

Wylicz wartość oczekiwaną nadwyżki łącznej wartości szkód S z tego ryzyka ponad liczbę 3 (w przybliżeniu).

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
E[(S-3)_+] &= E[S] - E[\min(S, 3)], \\
E[S] &= 2 \cdot (0.5 + 1.5) = 4.
\end{aligned}$$

Wystarczy więc znaleźć $E[\min(S, 3)]$:

$$\begin{aligned}
E[\min(S, 3)] &= 0 \cdot P(S=0) + 1 \cdot P(S=1) + 2 \cdot P(S=2) + 3 \cdot P(S \geq 3) \\
&= P(S=1) + 2P(S=2) + 3[1 - P(S=0) - P(S=1) - P(S=2)] \\
&= 3 - 3P(S=0) - 2P(S=2) - P(S=1) = 2.2556.
\end{aligned}$$

10. Rozkład wartości szkody Y dany jest gęstością:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{(1+y)^4}, & \text{dla } y > 0, \\ 0, & \text{dla } y \leq 0. \end{cases}$$

Jeśli ilość szkód N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 0.1, a ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad 2. Wylicz składkę netto tej sumy, tzn. $\sum_{i=1}^N (Y_i - 2)_+$.

Rozwiązanie: Niech

$$S = \sum_{i=1}^N (Y_i - 2)_+.$$

Zatem

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N] \cdot E[(Y - 2)_+] = 0.1 \cdot \int_0^\infty (y - 2)_+ f_Y(y) dy \\ &= 0.1 \cdot \int_2^\infty (y - 2) \cdot \frac{3}{(1 + y)^4} dy = 0.1 \cdot 3 \cdot \int_2^\infty \frac{y - 2}{(1 + y)^4} dy. \end{aligned}$$

Podstawiając $x := 1 + y$ otrzymamy

$$0.1 \cdot 3 \cdot \int_3^\infty \frac{x - 3}{x^4} dx = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{180}.$$

11. Łączna wartość szkód S z pewnego ryzyka ma rozkład złożony Poissona z parametrem częstotliwości równym 0.2 oraz rozkładem pojedynczej szkody Y :

$$P(Y = 1) = 0.5,$$

$$P(Y = 2) = 0.3,$$

$$P(Y = 3) = 0.2.$$

Wylicz składkę netto za pokrycie łącznej wartości szkód do wysokości 3 (nadwyżka łącznej wartości szkód ponad 3 pozostaje niepokryta).

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} E[\min(S, 3)] &= P(S = 1) + 2 \cdot P(S = 2) + 3 \cdot P(S \geq 3) \\ &= P(S = 1) + 2 \cdot P(S = 2) + 3 \cdot [1 - P(S = 0) - P(S = 1) - P(S = 2)] \\ &= 3 - 3 \cdot P(S = 0) - 2 \cdot P(S = 1) - P(S = 2) \\ &= 3 - 3 \cdot P(N = 0) - 2 \cdot P(N = 1, Y = 1) - P(N = 1, Y = 2) - P(N = 2, Y = 1, Y = 2) \\ &= 3 - 3 \cdot e^{-0.2} - 2 \cdot e^{-0.2} \cdot 0.2 \cdot 0.5 - e^{-0.2} \cdot 0.2 \cdot 0.3 - e^{-0.2} \cdot \frac{(0.2)^2}{2} \cdot (0.5)^2 \\ &= 3 - 3.265 \cdot e^{-0.2} = 0.327. \end{aligned}$$

12. Rozkład wartości szkody X dany jest gęstością

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{(1+y)^5}, & \text{dla } y > 0, \\ 0, & \text{dla } y \leq 0. \end{cases}$$

Jeśli ilość szkód ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 0.3, a ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad 1. Wylicz składkę netto za takie ubezpieczenie.

Rozwiązanie: Niech

$$S = \sum_{i=1}^N (Y_i - 1)_+.$$

Zatem

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N] \cdot E[(Y - 1)_+] = 0.3 \cdot \int_0^\infty (y - 1)_+ f_Y(y) dy = \\ &= 0.3 \cdot \int_1^\infty (y - 1) \cdot \frac{4}{(1 + y)^5} dy = 0.3 \cdot 4 \cdot \int_1^\infty \frac{y - 1}{(1 + y)^5} dy \end{aligned}$$

Podstawiając $x := 1 + y$ otrzymamy

$$0.3 \cdot 4 \int_2^\infty \frac{x - 2}{x^5} dx = \frac{1}{20} - \frac{3}{80} = \frac{1}{80}.$$

13. Towarzystwo ubezpieczeniowe oferuje roczne kontrakty w wysokości 1 i 2, w grupach osób, gdzie w pierwszej grupie prawdopodobieństwo śmierci równa się 0.02, a w drugiej 0.10.

k	q_k	b_k	n_k
1	0.02	1	500
2	0.02	2	500
3	0.10	1	300
4	0.10	2	500

gdzie n_k oznaczają liczebności kontraktów, b_k wielkości wypłat. Towarzystwo to zamierza za 1800 powyżej opisanych kontraktów zebrać tyle składek, aby z prawdopodobieństwem 0.95 sumaryczna szkoda $S = X_1 + \dots + X_{1800}$ była mniejsza od zebranej sumy. Przy tym wymaga się aby składka każdego osobnika była proporcjonalna do wartości oczekiwanej jego szkody, tzn. ma być postaci $(1 + \theta)EX_j$, dla pewnej stałej $\theta > 0$ (składka wartości oczekiwanej). Wyznacz θ .

14. Rozkład wartości szkody Y określony jest na zbiorze liczb naturalnych. W tabeli podane są wartości oczekiwane nadwyżki szkody ponad d dla kolejnych (naturalnych) liczb d :

d	7	8	9	10
$E[(Y - d)_+]$	2.42	2.10	1.85	1.65

Wylicz wartość $P(Y = 8)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 (i) E[(Y - 7)_+] &= P(Y = 8) + 2P(Y = 9) + 3P(Y = 10) + \dots = 2.42, \\
 (ii) E[(Y - 8)_+] &= P(Y = 9) + 2P(Y = 10) + 3P(Y = 11) + \dots = 2.1, \\
 (iii) E[(Y - 9)_+] &= P(Y = 10) + 2P(Y = 11) + 3P(Y = 12) + \dots = 1.85, \\
 (iv) E[(Y - 10)_+] &= P(Y = 11) + 2P(Y = 12) + 3P(Y = 13) + \dots = 1.65.
 \end{aligned}$$

Obliczając różnicę (i)-(ii) dostajemy: $P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) + \dots = 0.32$. Podobnie (iii)-(ii): $P(Y = 9) + P(Y = 10) + P(Y = 11) + \dots = 0.25$. Otrzymane równania odejmujemy stronami. Stąd

$$P(Y = 8) = 0.07.$$

15. Wiedząc, że szkoda ma gęstość f daną wzorem

$$f(x) = \beta \exp(-\beta x), \quad \beta > 0, \quad x > 0,$$

oblicz dla dowolnego $d > 0$, $E[X - d]_+$.

Rozwiązanie:

Mamy całkując przez części.

$$\begin{aligned}
 E[X - d]_+ &= E[(X - d)I\{X > d\}] \\
 &= E[XI\{X > d\}] - dP(X > d) \\
 &= \int_d^\infty \beta x \exp(-\beta x) dx - d \exp(-d\beta) \\
 &= d \exp(-d\beta) + \frac{1}{\beta} \exp(-d\beta) - d \exp(-d\beta) \\
 &= \frac{1}{\beta} \exp(-d\beta).
 \end{aligned}$$

16. Rozkład losowej straty X jest dany przez gęstość $f(x) = \frac{1}{100}$, $0 < x < 100$

a) Policz $E[X]$, $Var[X]$;

b) Niech $I(x) = kx$, $k \in (0, 1)$ będzie polisą proporcjonalną oraz $I_d(x) = (x - d)_+$ będzie polisą stop-loss. Wyznacz takie k i takie d , aby cena polisy wynosiła $P = 12.5$;

c) Używając k i d z b) pokaż, że $Var(X - I(X)) > Var(X - I_d(X))$.

Rozwiązanie:

$$\text{a) Mamy } E[X] = \frac{1}{100} \int_0^{100} x dx = 50 \text{ oraz } E[X^2] = \frac{1}{100} \int_0^{100} x^2 dx = \frac{10000}{3}. \text{ Stąd } Var[X] = \frac{2500}{3}.$$

- b) Szukamy k by $E[kX] = 12.5$. Z a) mamy $E[X] = 50$, czyli $k = 0.25$. Szukamy d by $E[I_d(X)] = 12.5$. Mamy

$$\begin{aligned} E[I_d(X)] &= \frac{1}{100} \int_d^{100} (x-d) dx \\ &= 50 - d + \frac{1}{200} d^2 \end{aligned}$$

i wartość d otrzymujemy przyrównując powyższe wyrażenie do 12.5. Mamy $d = 50$ lub $d = 100$. Oczywiście wzięcie $d = 150$ nie ma sensu, gdyż zmiana losowa X przyjmuje wartości od 0 do 100. Stąd $d = 50$.

- c) Ponieważ z b) $E[X - I(X)] = E[X - I_d(X)]$ wystarczy pokazać nierówność dla drugich momentów. Mamy

$$\begin{aligned} E[(X - I(X))^2] &= (1-k)^2 E[X^2] \\ &= \frac{9}{16} \frac{10000}{3} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} E[(X - I_d(X))^2] &= E[(\min\{X, d\})^2] \\ &= \frac{1}{100} \int_0^d x^2 dx + \frac{1}{100} \int_d^{100} d^2 dx \\ &= \frac{38750}{3}. \end{aligned}$$

17. Ryzyko X ma rozkład

x	1	2	3	10
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

Oblicz $E[I_d(X)]$ dla $d = 2.5$

Rozwiązanie:

Mamy

$$E[I_d(X)] = 0.3(3-d) + 0.4(10-d).$$

18. Dla zmiennej losowej X o rozkładzie Pareto i gęstości

$$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^{\alpha+1}, \quad x > 0,$$

udowodnij: $E[(I_d(X))^\alpha] = \left(\frac{\lambda}{\lambda+d} \right)^{\alpha-1} E[X]$, jeżeli $1 < \alpha$.

Rozwiązanie:

Mamy

$$\begin{aligned}
 E[I_d(X)] &= \int_d^\infty (x-d) \left(\frac{\lambda}{\lambda+x} \right)^{\alpha+1} dx \\
 &= \int_d^\infty (x+\lambda) \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda+x} \right)^{\alpha+1} dx - \int_d^\infty (d+\lambda) \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda+x} \right)^{\alpha+1} dx \\
 &= \alpha \lambda^\alpha \int_d^\infty (\lambda+x)^{-\alpha} dx - (d+\lambda) \alpha \lambda^\alpha \int_d^\infty (\lambda+x)^{-\alpha-1} dx . \\
 &= \frac{\lambda^\alpha}{\alpha-1} (\lambda+d)^{-\alpha+1} .
 \end{aligned}$$

Z drugiej strony $E[X] = E[I_0(X)] = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha-1} \lambda^{-\alpha+1}$.

19. Dla pewnego ubezpieczenia w roku 1998 wartość szkody ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1000)$. Udział własny ubezpieczonego w szkodzie wynosi 20% jej wartości, jednak nie więcej niż 100. W wyniku inflacji wysokość szkód w roku 1999 wzrośnie o 10%. Udział własny ubezpieczonego pozostaje taki sam jak w 1998 roku (tj., odpowiednio, 20% i 100). O ile wzrośnie wartość oczekiwana wypłaty?

Rozwiązanie:

Wartości oczekiwane wypłaty przed i po inflacji wynoszą

$$P_1 = E[\min\{0.2X, 100\}]$$

i

$$P_2 = E[\min\{0.2 * 1.1X, 100\}] ,$$

odpowiednio. Policzmy więc $E[\min\{kX, 100\}]$ dla $k \in (0, 10)$.

$$\begin{aligned}
 E[\min\{kX, 100\}] &= E[kXI\{kX < 100\}] + E[100I\{kX \geq 100\}] \\
 &= kE[XI\{X < 100/k\}] + 100P(X \geq 100/k) \\
 &= \frac{k}{1000} \int_0^{100/k} x dx + 100P(X \geq 100/k) \\
 &= 100 - \frac{5}{k} .
 \end{aligned}$$

Podstawiamy teraz odpowiednio $k = 0.2$ i $k = 0.2 \times 1.1$ i dostajemy $P_1 = 75$, $P_2 = 77.2727$.

20. Decydent kieruje się maksymalizacją wartości oczekiwanej funkcji użyteczności postaci: $u(x) = \sqrt{x}$,
 posiada majątek wart 400 i narażony jest na stratę X o rozkładzie trzypunktowym:
 $P(X = 0) = P(X = 50) = P(X = 100) = \frac{1}{3}$.
 Gotów jest on zapłacić nie więcej niż $P = 30$ za pokrycie ryzyka X (lub

jego części $k(X)$). Ubezpieczyciele oferują wszystkie dopuszczalne kontrakty po cenie równej składce netto. Wylicz maksimum oczekiwanej użyteczności decydenta $E[u(w + k(X) - X - P)]$, dla $E(k(X)) = P$.

Rozwiązanie:

Maksimum $E[u(w + I_d(X) - X - P)]$ osiągnięte jest dla $I_d(X) = (X - d)_+$. W naszym zadaniu $w = 400$, $P = E[I_d(X)] = 30$, $E[X] = 50$. Aby znaleźć takie $I_d(X)$, skorzystamy z danych podanych w treści zadania.

$E[I_d(X)] = 30$. Niech $d \in (0, 50)$: $E[I_d(X)] = E[(X - d)_+] = (0 - d) \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + (50 - d) \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + (100 - d) \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 30$. Zatem $d = 30$. Czyli największą wartość uzyskamy dla $I_{30}(X)$.

$$\begin{aligned} \max E[u(w + I(X) - X - P)] &= E[u(400 + I_{30}(X) - X - 30)] \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{400 + 0 - 0 - 30} + \frac{1}{3}\sqrt{400 + 20 - 50 - 30} + \frac{1}{3}\sqrt{400 + 70 - 100 - 30} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{370} + \frac{2}{3}\sqrt{340} = 18.7 \end{aligned}$$

21. Pewien decydent posiada wyjściowy majątek w kwocie $w = 10$. Narażony jest on na stratę X o rozkładzie normalnym z parametrami $(\mu, \sigma^2) = (2, 6)$. (*Strata jest tutaj terminem umownym, ponieważ z pewnym prawdopodobieństwem będzie ujemna, a więc de facto wystąpi zysk*). W swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją funkcji użyteczności o postaci: $u(x) = -\exp(-\frac{1}{5} \cdot x)$. Decydent dokonuje wyboru współczynnika $\beta \in [0, 1]$, w efekcie czego w jego udziale pozostanie strata w wysokości $\beta \cdot X$, natomiast pozostałą część straty w wysokości $(1 - \beta) \cdot X$ pokryje ubezpieczyciel za cenę równą $\frac{6}{5} \cdot (1 - \beta) \cdot \mu$. Wylicz współczynnik β , który wybierze decydent.

Rozwiązanie:

Niech G oznacza składkę, jaką decydent gotowy jest zapłacić za ubezpieczenie losowej szkody $S = (1 - \beta)X$, tzn. zgodnie z założeniem

$$G = \frac{6}{5}(1 - \beta) \cdot \mu.$$

Z drugiej strony szkoda S ma rozkład normalny z parametrami $(2, 6)$, funkcja użyteczności jest postaci $u(x) = -e^{-1/5x}$, a majątek wyjściowy $w = 10$, więc G spełnia równoważnie

$$u(w - G) = E[u(w - (1 - \beta)S)].$$

Wstawiając wartość G zależną od β otrzymujemy równania

$$-e^{-1/5(10-6/5(1-\beta)2)} = E[-e^{-1/5(10-(1-\beta)S)}],$$

$$\begin{aligned}
-e^{-2+12/25(1-\beta)} &= -e^{-2}E[e^{1/5(1-\beta)S}], \\
-e^{-38/25-12/25\beta} &= -e^{-2}M_S(1/5(1-\beta)) = -e^{-2}e^{3/25(1-\beta)^2+2/5(1-\beta)}, \\
-\frac{38}{25} - \frac{12}{25}\beta &= -2 + \frac{3}{25}(1-\beta)^2 + \frac{2}{5}(1-\beta).
\end{aligned}$$

Zatem

$$\beta = \frac{1}{3}.$$

22. Kapitał początkowy wynosi $w = 100$. Inwestor ma awersję do ryzyka z funkcją $u(w) = -\exp(-\alpha w)$, $\alpha > 0$. Szkoda mu zagrażająca ma rozkład wykładniczy $X \sim \text{Exp}(2)$. Jaką składkę G jest gotowy płacić inwestor?

Rozwiązanie:

Równanie

$$u(w - G) = E[u(w - X)]$$

przyjmuje postać

$$\exp(-\alpha(w - G)) = E[\exp(-\alpha(w - X))]$$

co jest równoważne

$$\exp(\alpha G) = E[\exp(\alpha X)].$$

Stąd

$$G = \frac{\log E[\exp(\alpha X)]}{\alpha}.$$

Zauważ, że składka G nie zależy od kapitału początkowego w .

23. Kapitał początkowy wynosi $w = 100$. Inwestor ma awersję do ryzyka z funkcją $u(w) = w^{1/2}$. Szkoda mu zagrażająca ma rozkład $X \sim U(0, 10)$. Jaką składkę G jest gotowy płacić inwestor?
24. Jeśli założymy, podobnie jak J. Bernoulli, że funkcja użyteczności $u(w)$ posiadanego majątku spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{du(w)}{dw} = \frac{k}{w}, \quad w > 0, \quad k > 0,$$

to znajdź jej postać. Jeśli teraz podejmujący decyzję posiadacz kwoty w , $w > 1$ używa takiej właśnie funkcji u oraz stoi w obliczu losowej straty X o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$, pokaż, że maksymalna kwota jaką on zapłaci jako składkę w celu ubezpieczenia się od tej straty wynosi

$$G = w - \frac{w^w}{e(w-1)^{w-1}}$$

Rozwiązanie:

Funkcja u ma postać

$$u(w) = k \ln w .$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} E[\ln(w - X)] &= \int_0^1 \ln(w - x) \\ &= \ln(w - 1)^{w-1} - w \ln w + 1 , \end{aligned}$$

więc nakładając $\exp$ na obie strony równania

$$u(w - G) = E[u(w - X)]$$

dostajemy G .

25. Niech G takie, że

$$u(w - G) = E[u(w - X)]$$

Założmy, że funkcja użyteczności u jest dwukrotnie różniczkowalna oraz X jest zmienną losową o skończonej wariancji. Pokaż, że

$$G \approx E[X] - \frac{u''(w - E[X])}{2u'(w - E[X])} \text{Var}[X].$$

Rozwiązanie:

Korzystając z Twierdzenia Taylora w równaniu

$$u(w - G) = E[u(w - X)]$$

zastosuj przybliżenia

$$u(w - G) \approx u(w - E[X]) + (E[X] - G)u'(w - E[X]),$$

$$u(w - x) \approx u(w - E[X]) + (E[X] - x)u'(w - E[X]) + 1/2(E[X] - x)^2 u''(w - E[X]) .$$

26. Załóżmy, że portfel składa się z n ryzyk.. Zakładamy, że liczby szkód N_0 i N_1 w portfelu w latach 0 i 1 są warunkowo niezależne i mają rozkład

$$P(N_i = k | \Theta = \theta) = \frac{\theta^k}{k!} \exp(-\theta), \quad i = 1, 2.$$

Oblicz $E[(N_1 - N_0)^2 | \theta]$.

Rozwiązanie: Mamy

$$\begin{aligned} E[(N_1 - N_0)^2 | \theta] &= E[N_1^2 | \theta] + E[N_0^2 | \theta] - 2E[N_1 N_0 | \theta] \\ &= \text{Var}[N_0 | \theta] + (E[N_0 | \theta])^2 + \\ &\quad + \text{Var}[N_1 | \theta] + (E[N_1 | \theta])^2 - 2E[N_0 | \theta]E[N_1 | \theta] \\ &= \text{Var}[N_0 | \theta] + \text{Var}[N_1 | \theta] + (E[N_0 | \theta] - E[N_1 | \theta])^2 \\ &= \text{Var}[N_0 | \theta] + \text{Var}[N_1 | \theta] = 2\theta. \end{aligned}$$

Interpretacja zadania: jeżeli w roku 0 wyestymowaliśmy parametr rozkładu Poissona jest θ i ilość szkód w roku 1 estymujemy punktowo $\hat{N}_1 = \theta$, to wariancja (warunkowa) tej prognozy wynosi 2θ .

27. W kolejnych okresach czasu ubezpieczony charakteryzujący się wartością θ parametru ryzyka $\Theta \in (0, 1)$ generuje szkody w ilości $N_i, i = 1, 2$. Wiemy, że

$$P(N_i = 1 | \Theta = \theta) = \theta = 1 - P(N_t = 0 | \Theta = \theta), \quad i = 1, 2,$$

oraz zmienne losowe N_1 i N_2 są warunkowo (pod warunkiem $\Theta = \theta$) niezależne, tzn.

$$P(N_1 = 1, N_2 = 1 | \Theta = \theta) = P(N_1 = 1 | \Theta = \theta)P(N_2 = 1 | \Theta = \theta).$$

Parametr ryzyka Θ ma rozkład o gęstości

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 6\theta(1-\theta) & \text{dla } \theta \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla } \theta \notin (0, 1) \end{cases}.$$

Oblicz $Cov(N_1, N_2)$.

Rozwiązanie: Mamy

$$Cov(N_1, N_2) = E[Cov(N_1, N_2) | \Theta] + Cov[E[N_1 | \Theta], E[N_2 | \Theta]].$$

Ponieważ N_1 i N_2 są warunkowo (pod warunkiem $\Theta = \theta$) niezależne, więc $Cov[(N_1, N_2) | \Theta = \theta] = 0$ dla każdego θ i stąd pierwsze wyrażenie znika. Teraz

$$\begin{aligned} Cov[E[N_1 | \Theta], E[N_2 | \Theta]] &= E[E[N_1 | \Theta], E[N_2 | \Theta]] - E[E[N_1 | \Theta]] \times E[E[N_2 | \Theta]] \\ &= E[\Theta^2] - E[N_1]E[N_2]. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} E[\Theta^2] &= \int_0^1 6\theta^3(1-\theta)d\theta \\ &= 3/10 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} E[N_1] &= E[E[N_1 | \Theta]] \\ &= \int_0^1 6\theta^2(1-\theta)d\theta \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

dostajemy

$$Cov(N_1, N_2) = 3/10 - 1/4 = 1/20.$$

28. W kolejnych okresach czasu ubezpieczony charakteryzujący się wartością θ parametru ryzyka $\Theta \in (0, \infty)$ generuje szkody w ilości N_j , $j = 1, 2, 3$. Wiemy, że

$$P(N_j = n | \Theta = \theta) = \exp(-\theta) \frac{\theta^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

oraz zmienne losowe N_j są warunkowo (pod warunkiem $\Theta = \theta$) niezależne. Parametr ryzyka Θ ma rozkład dwupunktowy $P(\Theta = 1) = 0.5 = P(\Theta = 2)$. Jeżeli $N_1 + N_2 = 2$, oblicz $P(N_3 = 0)$.

Rozwiązanie: Trzeba obliczyć

$$P(N_3 = 0 | N_1 + N_2 = 2) = \frac{P(N_3 = 0, N_1 + N_2 = 2)}{P(N_1 + N_2 = 2)}.$$

Obliczamy mianownik. Ponieważ N_1 i N_2 są warunkowo niezależne, więc pod warunkiem $\Theta = \theta$, $N_1 + N_2$ ma rozkład Poissona z parametrem 2θ .

$$P(N_1 + N_2 = 2 | \theta) = 2\theta^2 \exp(-2\theta)$$

i stąd

$$\begin{aligned} P(N_1 + N_2 = 2) &= \frac{1}{2}P(N_1 + N_2 = 2 | \Theta = 1) + \frac{1}{2}P(N_1 + N_2 = 2 | \Theta = 2) \\ &= \exp(-2) + 4 \exp(-4). \end{aligned}$$

Obliczamy licznik

$$\begin{aligned} P(N_3 = 0, N_1 + N_2 = 2) &= \frac{1}{2}P(N_3 = 0, N_1 + N_2 = 2 | \Theta = 1) + \frac{1}{2}P(N_3 = 0, N_1 + N_2 = 2 | \Theta = 2) \\ &= \frac{1}{2} \left[P(N_3 = 0 | \Theta = 1)P(N_1 + N_2 = 2 | \Theta = 1) \right. \\ &\quad \left. + P(N_3 = 0 | \Theta = 2)P(N_1 + N_2 = 2 | \Theta = 2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \exp(-1) \exp(-2) + 8 \exp(-2) \exp(-4) \right]. \end{aligned}$$

29. Załóżmy, że w roku 0 i 1 liczby szkód N_0 i N_1 na pojedyncze ryzyko w latach 0 i 1 są niezależne i mają warunkowy rozkład Poissona

$$P(N_i = k | \Theta_i = \theta) = \frac{\theta^k}{k!} \exp(-\theta), \quad i = 1, 2$$

gdzie $\Theta_i \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ są niezależne. Oblicz $E[(N_1 - N_0)^2]$.

Rozwiązanie: Ilość szkód ma tutaj bezwarunkowy rozkład $\text{Bin}^-(\alpha, \frac{\beta}{1+\beta})$. Ze względu na niezależność dostajemy

$$E[(N_1 - N_0)^2] = \text{Var}[N_0] + \text{Var}[N_1] + 2(E(N_0))^2 = 2\alpha \left(\frac{1+\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} \right).$$

30. Łączna wartość szkód S ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną ilością szkód równą $E[N] = 4$ oraz z rozkładem wartości pojedynczej szkody Y danym gęstością:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3/8, & \text{dla } y \in (0, 2), \\ 1/24, & \text{dla } y \in (2, 5) \end{cases}$$

oraz masą prawdopodobieństwa równą 0.125 w punkcie $y = 5$. Wylicz wariancję zmiennej S .

Rozwiązanie:

$$E[Y_i] = \int_0^2 \frac{3}{8} y dy + \int_2^5 \frac{1}{24} y dy + 5 \cdot 0.125 = 1.8125,$$

$$E[Y_i^2] = \int_0^2 \frac{3}{8} y^2 dy + \int_2^5 \frac{1}{24} y^2 dy + 25 \cdot 0.125 = 5.75,$$

$$Var[Y_i] = 2,4649.$$

Stąd

$$Var[S] = 4 \cdot 2.4649 + 4 \cdot 3.2851 = 23.$$

31. Łączna wartość szkód S ma złożony rozkład Poissona. Wartość szkody Y jest zawsze liczbą naturalną, a jej rozkład jest postaci:

i	1	2	3	4	5	$i \geq 6$
$P(Y = i)$	0.30	0.20	0.15	0.05	0.05	0.25

O rozkładzie prawdopodobieństwa wartości zagregowanych szkód $f_S(y)$ wiemy, że w przybliżeniu $f(0) = 0,05$ (dokładniej 0.04978706837). Wylicz przybliżone prawdopodobieństwo, iż zagregowana wartość szkód przekroczy 2, tj. $P(S > 2)$.

Rozwiązanie: Wiemy, że S ma złożony rozkład Poissona, czyli

$$f(0) = P(S = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = 0.04978706837$$

Stąd $\lambda = 3$.

$$\begin{aligned} P(S > 2) &= 1 - P(S \leq 2) = 1 - [P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2)] = \\ &= 1 - \left(0.05 + 0.3 \frac{3e^{-3}}{1} + (0.3)^2 \frac{9e^{-3}}{2} + 0.2 \frac{3e^{-3}}{1} \right) \\ &\simeq 1 - (0.05 + 0.045 + 0.02025 + 0.03) = 0.855. \end{aligned}$$

32. Łączna wartość szkód S wyraża się wzorem: $S = Y_1 + \dots + Y_N$, gdzie wartości poszczególnych szkód są zmiennymi iid, niezależnymi od zmiennej N (liczby szkód). Każda ze zmiennych Y_i ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2, zaś N ma rozkład geometryczny ($k = 0, 1, \dots$) z parametrem $p = 0.5$. Wylicz $P(S \leq 4 \ln 5)$.

Rozwiązanie:

Złożony rozkład geometryczny rozkładów wykładniczych jest mieszkanką atomu w zerze i rozkładu wykładniczego z parametrem λ , tzn.

$$\begin{aligned}
 F_S(x) &= P(X_1 + X_2 + \dots + X_N \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_N \leq x | N = n) P(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x) P(N = n) \\
 &= P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x) P(N = n) \\
 &= p \cdot I_{(0, \infty)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda u} u^n du p q^n \\
 &= p \cdot I_{(0, \infty)}(x) + \int_{-\infty}^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda u} u^n p q^n du \\
 &= p \cdot I_{(0, \infty)}(x) + \int_{-\infty}^x p q \lambda u e^{-\lambda u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} q^{n-1} u^{n-1} du \\
 &= p \cdot I_{(0, \infty)}(x) + \int_{-\infty}^x p q \lambda u e^{-\lambda u} e^{\lambda q u} du \\
 &= p \cdot I_{(0, \infty)}(x) + q \cdot (1 - e^{-x\lambda}), \quad p + q = 1.
 \end{aligned}$$

Stąd

$$P(S \leq 4 \ln 5) = F_S(4 \ln 5) = 0.5 + 0.5 \cdot (1 - e^{-2 \ln 5}) = 1 - 0.5 \cdot (5)^{-2} \approx 0.9.$$

33. Znajdź $P(S = 3)$, gdzie S ma złożony rozkład Poissona o parametrze częstotliwości $\lambda = 2$ i gdzie rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest funkcją prawdopodobieństwa $f_Y(y)$

y	1	2	3	4
$f_Y(y)$	0.5	0.2	0.2	0.1

Rozwiązanie:

Ponieważ $P(S = 3) = P(\sum_{i=1}^N X_i = 3)$, gdzie $P(N = k) = \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2}$ $k = 0, 1, \dots$, więc

$$\begin{aligned}
P(S = 3) &= P(N = 1, X_1 = 3) + P(N = 2, X_1 = 1, X_2 = 2) + \\
&+ P(N = 2, X_1 = 2, X_2 = 1) + P(N = 3, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \\
&= 2 \cdot e^{-2} \cdot 0,2 + 2 \cdot \frac{4}{2} e^{-2} \cdot 0,5 \cdot 0,2 + \frac{8}{6} e^{-2} \cdot (0,5)^3 = \frac{29}{30} e^{-2}.
\end{aligned}$$

34. Niech $S = Y_1 + \dots + Y_N$, $N = M_1 + \dots + M_K$ oraz wszystkie zmienne $Y_1, Y_2, \dots, M_1, M_2, \dots$ oraz K są nawzajem niezależne. Jeśli teraz $M_1, M_2, \dots$ mają identyczny rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.5, zmienna K ma także rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.3, a zmienna Y ma wartość oczekiwaną p_1 i wariancję $p_2 - p_1^2$. Wylicz wariancję zmiennej S .

Rozwiązanie:

$$N = \sum_{i=1}^K M_i.$$

Mamy więc: $E[N] = E[M] \cdot E[K]$ oraz $Var[N] = Var[M] \cdot E[K] + Var[K] \cdot (E[M])^2$. Podstawiając dane z zadania uzyskamy:

$$E[N] = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15,$$

$$Var[N] = 0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot (0.5)^2 = 0.225.$$

A więc

$$Var[S] = (p_2 - p_1^2) \cdot 0.15 + 0.225 \cdot p_1^2 = 0.15p_2 + 0.075p_1^2 = 0.15(p_2 + 0.5p_1^2).$$

35. Łączna wartość szkód S ma złożony rozkład Poissona z częstotliwością $\lambda = 4$ i rozkładem wartości pojedynczej szkody Y danym wzorem: $P(Y = i) = (\frac{1}{2})^i$ dla $i = 1, 2, 3, \dots$. Wylicz $E[\max(0, S - 3)]$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
E[\max(0, S - 3)] &= E[\max(0, S - 3) \cdot I_{[3, \infty)}(S)] + E[\max(0, S - 3) \cdot I_{[0, 3)}(S)] = \\
&= E[(S - 3) \cdot I_{[3, \infty)}(S)] = \sum_{k=3}^{\infty} (k - 3)P(S = k) = \\
&= E[S - 3] - \sum_{k=0}^3 (k - 3)P(S = k) = \\
&= E[S] - 3 + 3P(S = 0) + 2P(S = 1) + P(S = 2) = \\
&= E[S] - 3 + 3P(N = 0) + 2P(N = 1, Y = 1) + \\
&+ P(N = 1, Y = 2) + P(N = 2, Y = 1) = \\
&= 4 \cdot E[Y] - 3 + 3e^{-4} + 4e^{-4} + e^{-4} + 2e^{-4} = \\
&= 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k - 3 + 10e^{-4} = 8 - 3 + 10e^{-4} = 5 + 10e^{-4}.
\end{aligned}$$

36. Niech $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$. Wiemy, że

- $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ mają rozkład wykładniczy ze średnią $1/\beta$,
- N ma rozkład Poissona ze średnią 1,
- $M_S(1) = 3$.

Wylicz β .

Rozwiązanie:

Mamy

$$M_S(t) = e^{\lambda(M_Y(t)-1)},$$

z

$$M_Y(t) = \frac{\beta}{\beta - t},$$

a zatem

$$M_S(t) = e^{1 \cdot (\frac{\beta}{\beta-1} - 1)} = e^{\frac{t}{\beta-1}}.$$

Wiemy, że

$$M_S(1) = e^{\frac{1}{\beta-1}} = 3,$$

czyli

$$\beta = 1 + \frac{1}{\ln 3} = 1.91.$$

37. Ilość szkód N ma rozkład dany rekurencyjnie:

$$P(N = 0) = \frac{1}{27},$$

$$\frac{P(N=k)}{P(N=k-1)} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3 \cdot k}, \quad k=2,3,\dots$$

Wylicz stosunek wariancji do wartości oczekiwanej zmiennej N .

Rozwiązanie:

Niech $P_N(s) = E[s^N] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(N=k)$ oznacza funkcję tworzącą zmiennej N .

$$P(N=k) = \frac{2}{3}P(N=k-1) + \frac{4}{3k}P(N=k-1),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} s^k P(N=k) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} s s^{k-1} P(N=k-1) + \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} P(N=k-1),$$

$$P_N(s) - \frac{1}{27} = \frac{2}{3}sP_N(s) + \frac{4}{3} \int P_N(s) ds,$$

$$P'_N(s) = \frac{2}{3}[P_N(s) + sP'_N(s)] + \frac{4}{3}P_N(s).$$

Wiadomo, że $E[N] = P'_N(1)$, więc

$$E[N] = \frac{2}{3}(1 + E[N]) + \frac{4}{3},$$

stąd

$$E[N] = 6.$$

Ponieważ $Var[N] = P''_N(1) + P'_N(1) - (P'_N(1))^2$, więc licząc drugą pochodną znajdziemy drugi moment N i wariancję,

$$P''_N(s) = \frac{8}{3}P'_N(s) + \frac{2}{3}sP''_N(s),$$

Zatem

$$P''_N(1) = 48, \quad Var[N] = 18.$$

$$\frac{Var[N]}{E[N]} = \frac{18}{6} = 3.$$

38. Łączna wartość szkód z polisy wynosi $S = Y_1 + \dots + Y_N$, (zero, jeśli $N = 0$). S ma złożony rozkład Poissona z wartością oczekiwaną zmiennej N równą: $E[N] = \ln(1 + \frac{1}{3})$ zaś Y ma rozkład logarytmiczny:

$$g_k = P(Y=k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \cdot \frac{c^k}{k}, \quad k=1,2,\dots$$

z parametrem $c = 0.25$. Znajdź taką liczbę k , że: $P(S > k) < \frac{1}{1000} < P(S \geq k)$

Rozwiązanie:

$P(S > k) < 0.001 < P(S \geq k)$ jest równoważne wyrażeniu $P(S < k) < 0.999 < P(S \leq k)$. Szukamy więc takiego k , dla którego $P(S = 0) + P(S = 1) + \dots + P(S = k - 1) < 0.999$ i $P(S = 0) + P(S = 1) + \dots + P(S = k - 1) + P(S = k) > 0.999$. Mamy $P(S = 0) = P(N = 0) = e^{-\ln(\frac{4}{3})} = \frac{3}{4}$.

Ponieważ zmienna N ma rozkład Poissona, możemy zastosować algorytm Panjera. Wiemy, że w algorytmie Panjera $a = 0$ oraz $b = \lambda$. W naszym przypadku parametry te będą wynosić $a = 0$ i $b = \ln(4/3)$. Posłużymy się tym algorytmem, aby wyliczyć kolejne prawdopodobieństwa:

$$P(S = 1) = \lambda \cdot g_1 \cdot P(S = 0) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{\ln(\frac{4}{3})} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16},$$

$$P(S = 2) = \sum_{i=1}^2 \frac{i}{2} \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \cdot g_i \cdot P(S = 2-i) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{1}{\ln(\frac{4}{3})} \frac{1}{4} \frac{3}{16} + \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{1}{\ln(\frac{4}{3})} \frac{1}{32} \frac{3}{4} = \frac{3}{64},$$

$$P(S = 3) = \sum_{i=1}^3 \frac{i}{3} \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \cdot g_i \cdot P(S = 3-i) = \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{3}{64} + \frac{2}{3} \frac{1}{32} \frac{3}{16} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{3}{4} = \frac{3}{256},$$

$$P(S = 4) = \sum_{i=1}^4 \frac{i}{4} \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \cdot g_i \cdot P(S = 4-i) = \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{3}{256} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{64} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{3}{16} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{3}{4} = \frac{3}{1024},$$

Stąd $P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) + P(S = 3) = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} = \frac{255}{256} = 0.99609 < 0.999$,

$P(S = 0) + \dots + P(S = 4) = \frac{255}{256} + \frac{3}{1024} = 0.99901 > 0.999$. Zatem $P(S > 4) < 0.0001 < P(S \geq 4)$.

39. W modelu łącznego ryzyka rozkład ilości szkód N jest rozkładem geometrycznym (dla $n = 0, 1, \dots$), a rozkład wartości pojedynczej szkody Y określony jest na zbiorze $\{1, 2, 3, \dots\}$. Znamy częściowo rozkład łącznej wartości szkód S :

k	0	1	2	3	4	5
$P(S = k)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{3}{4000}$	$\frac{4503}{40000}$	$\frac{9003}{4000000}$

Wylicz $P(Y = 5)$.

Rozwiązanie:

Zmienna N ma rozkład geometryczny (czyli $p_n = pq^n$, $n = 0, 1, \dots$) z parametrem $q = \frac{1}{4}$, ponieważ

$$P(S = 0) = P(N = 0) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{3}{4}.$$

Mamy

$$pq^{n+1} = (a + \frac{b}{n+1})pq^n,$$

$$q = a + \frac{b}{n+1}.$$

Zatem parametry a i b wynoszą: $a = q$, $b = 0$.

Zastosujemy algorytm Panjera:

$$P(S = k) = \frac{1}{1 - qg_0} \sum_{i=1}^k qgiP(S = k - i).$$

Dla $q = \frac{1}{4}$ oraz $g_0 = 0$ dostajemy

$$P(S = 1) = \frac{1}{4} \cdot P(Y = 1) \cdot P(S = 0) = \frac{3}{40}.$$

Stąd $P(Y = 1) = \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} P(S = 2) &= \frac{1}{4} \cdot P(Y = 1) \cdot P(S = 1) + \frac{1}{4} \cdot P(Y = 2) \cdot P(S = 0) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{40} + \frac{1}{4} P(Y = 2) \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{400}. \end{aligned}$$

Zatem $P(Y = 2) = 0$. Identycznie

$$P(S = 3) = \frac{3}{4000},$$

co daje $P(Y = 3) = 0$.

Dalej

$$P(S = 4) = \frac{4503}{40000}.$$

Uzyskujemy $P(Y = 4) = \frac{3}{5}$.

Z otrzymanych wartości dostajemy $P(Y = 5) = 0$, ponieważ

$$P(Y = 1) + P(Y = 4) = 1.$$

40. Liczba szkód zaistniałych w czasie t jest procesem stochastycznym $(N(t), t \geq 0)$. Przyjmijmy, że czas $t = 0$ odpowiada dacie 1 stycznia 1999 roku, a jednostką czasu jest 1 miesiąc, przy czym dla uproszczenia przyjmujemy, że każdy miesiąc ma 30 dni. Czasy oczekiwania pomiędzy następującymi po sobie szkodami, są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa i dystrybucie $F(t) = 1 - e^{-10t}$. Znajdź prawdopodobieństwo, że dokładnie 5 szkód wystąpi pomiędzy 1 kwietnia 1999 a 15 kwietnia 1999.

Rozwiązanie:

Niech X oznacza czas oczekiwania pomiędzy następującymi po sobie uszkodzeniami. Wtedy $X \sim F(x) = 1 - e^{-10x}$ i $(N(t), t \geq 0)$ będzie procesem Poissona, z parametrem $\lambda = 10$:

$$P(N(t) = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} = P(X_1 > t) = e^{-10t}.$$

Proces Poissona jest procesem stacjonarnym, tzn. liczba szkód w dowolnym przedziale nie zależy od jego położenia, a jedynie od jego długości. Zachodzi więc równość co do rozkładu:

$$(N(t_2 + s) - N(t_1 + s)) \stackrel{d}{=} (N(t_2) - N(t_1)).$$

Należy więc znaleźć prawdopodobieństwo, że dokładnie 5 szkód wystąpi pomiędzy $t = 0$ a $t = \frac{1}{2}$.

$$P(N(1/2) = 5) = \frac{(10 \cdot 1/2)^5}{5!} \cdot e^{-10 \cdot 1/2} \approx 0.18.$$

41. Liczba szkód generowanych przez pewną grupę ryzyk w ciągu miesiąca ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 33.33. Wysokość pojedynczej szkody ma rozkład prawdopodobieństwa o wartości oczekiwanej 8 i odchyleniu standardowym 6. Niech S_{12} oznacza łączną wartość szkód w ciągu roku.

Niech q będzie liczbą taką, że $P(S_{12} > q) = 0.95$. Stosując aproksymację normalną, wylicz q .

Rozwiązanie:

Zastosujemy aproksymację normalną:

$$P(S_{12} > q) = 0.95,$$

czyli $1 - P(S_{12} \leq q) = 0.95$.

$$1 - P\left(\frac{S_{12} - E[S_{12}]}{\sqrt{Var[S_{12}]}} \leq \frac{q - E[S_{12}]}{\sqrt{Var[S_{12}]}}\right) = 0.95.$$

Z CTG

$$1 - P(S_{12} \leq q) = \Phi\left(\frac{q - E[S_{12}]}{\sqrt{Var[S_{12}]}}\right) = 0.95,$$

gdzie $\Phi(x)$ jest dystrybucją rozkładu normalnego standardowego w punkcie x . Z tablic rozkładu normalnego otrzymujemy

$$\frac{q - E[S_{12}]}{\sqrt{Var[S_{12}]}} = 1.645.$$

Stąd $q = \sqrt{\text{Var}[S_{12}]} \cdot 1.645 + E[S_{12}]$. Aby znaleźć q należy zatem obliczyć $E[S_{12}]$ oraz $\text{Var}[S_{12}]$. W zadaniu dane są: $E[N] = 33.33$, $E[Y] = 8$, $\text{Var}[Y] = 36$, gdzie Y jest wielkością pojedynczej szkody. $E[S_{12}] = 12 \cdot E[N] \cdot E[Y] = 3199.68$, $\text{Var}[S_{12}] = 12 \cdot \{\text{Var}[Y] \cdot E[N] + (E[Y])^2 \cdot \text{Var}[N]\} = 39996$.

Podstawiając obliczone wartości uzyskujemy $q = \sqrt{39996} \cdot 1.645 + 3199.68 = 3529$.

42. Łączna wartość szkód S w portfelu ryzyk jest sumą łącznej wartości szkód S_1 w podportfelu 1 i łącznej wartości szkód S_2 w podportfelu 2. S_1 i S_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi. W tabeli podane są ich wartości oczekiwane, wariancję i skośności:

	$E[S_i]$	$E[(S_i - E[S_i])^2]$	$E[(S_i - E[S_i])^3]$
S_1	200	500	4000
S_2	150	350	2800

Rozważmy dwie alternatywne metody aproksymacji rozkładu zmiennej S :

- metoda 1: aproksymujemy rozkład zmiennej S za pomocą rozkładu przesuniętego $\text{Gamma}(c, \alpha, \beta)$ (gdzie c jest parametrem przesunięcia);
- metoda 2: aproksymujemy osobno rozkład zmiennej S_1 za pomocą rozkładu przesuniętego $\text{Gamma}(c_1, \alpha_1, \beta_1)$ i rozkład zmiennej S_2 za pomocą rozkładu przesuniętego $\text{Gamma}(c_2, \alpha_2, \beta_2)$, a następnie splot otrzymanych rozkładów traktujemy jako aproksymację rozkładu zmiennej S .

Wylicz różnicę: $c - (c_1 + c_2)$.

Rozwiązanie:

$$E[S] = E[S_1] + E[S_2] = 200 + 150 = 350,$$

$$\text{Var}[S] = \text{Var}[S_1] + \text{Var}[S_2] = 500 + 350 = 850,$$

$$E[(S - E[S])^3] = E[(S_1 - E[S_2])^3] + E[(S_2 - E[S_2])^3] = 4000 + 2800 = 6800.$$

Ze wzoru na parametr przesunięcia w aproksymacji gamma obliczamy c oraz c_1 i c_2 :

$$c = E[S] - 2 \cdot \frac{(\text{Var}[S])^2}{E[(S - E[S])^3]} = 350 - 2 \cdot \frac{850^2}{6800} = 350 - 212.5 = 137.5,$$

$$c_1 = E[S_1] - 2 \cdot \frac{(\text{Var}[S_1])^2}{E[(S_1 - E[S_1])^3]} = 200 - 2 \cdot \frac{500^2}{4000} = 200 - 125 = 75,$$

$$c_2 = E[S_2] - 2 \cdot \frac{(Var[S_2])^2}{E[(S_2 - E[S_2])^3]} = 150 - 2 \cdot \frac{350^2}{2800} = 150 - 87.5 = 62.5.$$

Różnica $c - (c_1 + c_2)$ wynosi więc $137.5 - (75 + 62.5) = 0$.

43. Portfel ryzyk składa się z dwóch niezależnych podportfeli. Wyznaczono charakterystyki rozkładu łącznej wartości szkód z tych podportfeli:

	wartość oczekiwana	wariancja	skośność
podportfel 1	5	9	54
podportfel 2	15	16	16

Rozkład łącznej wartości szkód z całego portfela aproksymujemy przesuniętym rozkładem Gamma (x_0, α, β) zachowującym wartość pierwszych trzech momentów zmiennej aproksymowanej. Wylisz parametry (x_0, α, β)

44. Rozwiązanie:

Niech X będzie łączną wartością szkód z podportfela 1, Y łączną wartością szkód z podportfela 2, a S łączną wartością szkód z całego portfela. Wtedy

$$E[S] = E[X] + E[Y] = 20,$$

$$Var[S] = Var[X] + Var[Y] = 25,$$

$$E[(S - ES)^3] = E[(X - EX)^3] + E[(Y - EY)^3] = 70.$$

Korzystając ze wzorów na aproksymację gamma

$$\alpha = 4 \cdot \frac{25^3}{70^2} = \frac{625}{49},$$

$$\beta = 2 \cdot \frac{25}{70} = \frac{5}{7},$$

$$x_0 = 20 - \frac{25^2}{70} = 20 - \frac{125}{7} = \frac{15}{7}.$$

45. Dla dyskretnego procesu nadwyżki $R_n = u + n - S_n$, $S_n = \sum_{i=1}^n W_i$, $n = 0, 1, 2, \dots$ wiemy, że $\Delta_n = R_n - R_{n-1}$, może przyjmować wartości $-1, 0, 1$ oraz $E[\Delta_n] = 0.4$, $Var[\Delta_n] = 0.44$ Wyznacz współczynnik dopasowania R ($R > 0 : e^{-R} \cdot M_{W_i}(R) = 1$). Podaj najbliższą wartość.

Rozwiązanie:

$$\Delta_n = R_n - R_{n-1} = u + n - S_n - u - (n-1) + S_{n-1} = 1 - (S_n - S_{n-1}) = 1 - W_n,$$

$$M_{\Delta_n}(R) = M_{1-W_n}(R) = E[e^{(1-W_n) \cdot R}] = e^R E[e^{-W_n R}] = e^R M_{W_n}(-R),$$

czyli $e^{-R} M_{W_n}(R) = M_{\Delta_n}(-R)$.

Otrzymaliśmy więc równanie

$$M_{\Delta_n}(-R) = 1.$$

Wiemy, że:

$$E[\Delta_n] = (-1)P(\Delta_n = -1) + 0 \cdot P(\Delta_n = 0) + 1 \cdot P(\Delta_n = 1) = 0.4$$

oraz

$$Var[\Delta_n] = E[\Delta_n^2] - (E[\Delta_n])^2 = P(\Delta_n = -1) + P(\Delta_n = 1) - (0.4)^2 = 0.44.$$

Z tych równań dostajemy: $P(\Delta_n = -1) = 0.1$, $P(\Delta_n = 0) = 0.4$, $P(\Delta_n = 1) = 0.5$. Więc

$$E[e^{-R\Delta_n}] = 0.1 \cdot e^R + 0.5 \cdot e^{-R} + 0.4 = 1,$$

$$e^R + 5e^{-R} = 6,$$

a stąd $e^R = 1$ lub $e^R = 5$. Dostajemy więc

$$R = \ln 5 = 1,61.$$

46. Rozważmy proces nadwyżki ubezpieczyciela z kontrolą wypłacalności raz do roku $R_n = u + c \cdot n - S_n$, gdzie:
 $S_n = \sum_{i=1}^n W_i$, W_i to zmienne losowe o rozkładzie Gamma o wartości oczekiwanej równej 3 i wariancji równej także 3. Roczna składka wynosi $c = \ln 64$. Wylicz przybliżony współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*) R dla tego procesu.

Rozwiązanie:

$W_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ oraz $E[W_i] = 3$ i $Var[W_i] = 3$, czyli W_i ma rozkład Gamma z parametrami $(3, 1)$.

$$M_{W_i}(r) = \left(\frac{\beta}{\beta - r} \right)^\alpha = \frac{1}{(1 - r)^3}.$$

Ze wzoru na współczynnik dopasowania

$$e^{-cr} \cdot \frac{1}{(1 - r)^3} = 1.$$

Równoważnie

$$\ln\left(\frac{1}{(1-r)^3}\right) - r \ln c = 0,$$
$$(1-r)^3 \cdot 64^r = 1.$$

Równość jest spełniona dla $R = 0.5$.

47. Model dyskretny rezerwy. Ubezpieczyciel otrzymuje corocznie składkę $c = 2$ i wypłaca odszkodowania za rok i -ty w wysokości W_i . W_i są niezależne i mają jednakowy rozkład: $P(W_i = 1) = \frac{6}{7}$ oraz $P(W_i = 4) = \frac{1}{7}$. Wylicz współczynnik dopasowania R .

Rozwiązanie:

W dyskretnym modelu czasowym R jest rozwiązaniem równania

$$e^{-cR} \cdot M_W(R) = 1.$$

W naszym zadaniu $c = 2$, a $M_W(R) = E[e^{RW}] = \frac{6}{7}e^R + \frac{1}{7}e^{4R}$. Podstawiając do równania otrzymujemy

$$e^{-2R} \cdot \left(\frac{6}{7}e^R + \frac{1}{7}e^{4R}\right) = 1,$$

czyli $6e^{-R} + e^{2R} = 7$. Niech $R = \ln 2$.

$$6e^{-\ln 2} + e^{2\ln 2} = 6 \cdot 0.5 + 4 = 7.$$

48. Klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela $R(t) = u + ct - \sum^{N(t)} Y_i$ charakteryzują parametry:

- λ - częstotliwość (roczna) Poissonowskiego procesu pojawiania się szkód $N(t)$,
- u - nadwyżka początkowa,
- rozkład zmiennej Y - wartości pojedynczej szkody,
- θ - stosunkowy narzut na składkę netto, $c = (1 + \theta)\lambda EY$.

Założmy, iż $P(Y = M) = 1$, gdzie M jest dodatnie. Założmy także, iż $u = 10 \cdot M$. Przyjmijmy wreszcie, iż nasz cel to skalkulowanie składki tak, aby zachodził warunek bezpieczeństwa: $e^{-Ru} = 0.1$, gdzie R jest współczynnikiem dopasowania (tzn. $R : 1 + (1 + \theta)E[Y] \cdot R = M_Y(R)$). Wylicz wartość θ :

Rozwiązanie:

$$e^{-Ru} = 0.1,$$
$$e^{-R \cdot 10 \cdot M} = 0.1,$$

$$-10 \cdot R \cdot M = \ln(0.1),$$

$$M \cdot R = \ln(0.1^{-1/10}) = \ln(10^{0.1}).$$

Aby znaleźć θ skorzystamy z równania $1 + (1 + \theta)E[Y] \cdot r = M_Y(r)$.
Ponieważ $E[Y] = M$, $M_Y(r) = e^{rM}$, więc

$$1 + (1 + \theta) \cdot M \cdot R = e^{RM},$$

$$1 + (1 + \theta) \cdot \ln(10^{0.1}) = e^{\ln(10^{0.1})} = 10^{0.1}.$$

Otrzymaliśmy

$$\theta = \frac{10 \cdot (10^{0.1} - 1)}{\ln 10} - 1.$$

49. Model ciągły. Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona. Rozkład pojedynczej szkody Y_i jest rozkładem wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 0.5, tj. $Y \sim \text{Exp}(2)$. Współczynnik dopasowania modelu ciągłego wynosi $R = 1$, $c = 1$. Aby prawdopodobieństwo ruiny wynosiło 0.1, ile nadwyżka początkowa u musi być równa?

Rozwiązanie:

Wiemy, że $c = 1$,

$$M_Y(R) = cR/\lambda + 1, \quad c = (1 + \theta)\lambda EY,$$

$$1 + (1 + \theta)E[Y]R - M_Y(R) = 0,$$

oraz

$$M_Y(R) = \frac{\beta}{\beta - R} = \frac{2}{2 - 1} = 2.$$

Znajdujemy współczynnik bezpieczeństwa θ :

$$1 + (1 + \theta)0.5 - 2 = 0,$$

czyli

$$\theta = 1.$$

Podstawiając otrzymane wartości do wzoru na prawdopodobieństwo ruiny w modelu ciągłym ze szkodami wykładniczymi otrzymujemy

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{0.5}} = 0.1.$$

Stąd

$$u = \ln 5.$$

50. Model ciągły. Prawdopodobieństwo ruiny z nadwyżką początkową $u = 14$ wynosi $\frac{5}{7}e^{-16}$. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa indywidualnych szkód Y_i jest wykładnicza

$$4e^{-4y}, \quad y > 0.$$

Wylicz współczynnik bezpieczeństwa θ i współczynnik dopasowania R .

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{\frac{\theta}{1+\theta}\beta u},$$

więc dla $u = 14$ mamy

$$\Psi(14) = \frac{5}{7}e^{-16} = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{1+\theta}14 \cdot 4}.$$

Stąd

$$\frac{\theta}{1+\theta}14 \cdot 4 = 16,$$

$$\theta = \frac{2}{5}.$$

Teraz szukamy R takiego, że

$$1 + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{4}R - \frac{4}{4-R} = 0,$$

więc

$$R = \frac{8}{7}.$$

51. Model ciągły. Niech $R(t)$ będzie procesem nadwyżki ubezpieczyciela gdzie:

- $S(t)$ jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ ,
- wartość pojedynczej szkody Y ma rozkład wykładniczy $Exp(\beta)$,
- składka c zawiera współczynnik bezpieczeństwa $\theta = 0.2$, co zapewnia, iż prawdopodobieństwo ruiny: $\Psi(u) = \frac{1}{10}$.

Udziałowcy zwiększyli nadwyżkę początkową dwukrotnie - do wysokości $2 \cdot u$. Zakładając, iż wszystkie pozostałe parametry procesu nie uległy zmianie, wylicz prawdopodobieństwo ruiny.

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo ruiny ma postać:

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta} \cdot u}.$$

U nas $\theta = 0.2$ oraz $\Psi(u) = 0.1$.

$$0.1 = \frac{1}{1.2} e^{-\frac{0.2}{1.2} \cdot \beta u},$$

$$0.12 = e^{-\frac{1}{6} \beta u}.$$

Stąd

$$u = \frac{1}{\beta} \cdot 12.72.$$

Niech $t = 2u$,

$$\Psi(t) = \frac{1}{1,2} e^{-\frac{0.2}{1.2} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot 2 \cdot 12.72} = \frac{5}{6} e^{-\frac{1}{6} \cdot 25.44} \approx 0.012.$$

52. Niech $R(t)$ będzie procesem nadwyżki ubezpieczyciela, $N(t)$ procesem Poissona z parametrem intensywności λ oraz niech Y_i ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ . Rozważmy prawdopodobieństwa ruiny dla trzech następujących zestawów parametrów procesu:

- Ψ_1 dla procesu o parametrach: $u_1 = 10$, $c_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_1 = 1$
- Ψ_2 dla procesu o parametrach: $u_2 = 20$, $c_2 = 8$, $\mu_2 = 2$, $\lambda_2 = 2$,
- Ψ_3 dla procesu o parametrach: $u_3 = 10$, $c_3 = 4$, $\mu_3 = 2$, $\lambda_3 = 1$.

Pokaż, że $\Psi_1 = \Psi_2 < \Psi_3$.

Rozwiązanie:

Dla złożonego rozkładu Poissona o wykładniczym rozkładzie pojedynczych szkód prawdopodobieństwo ruiny ma postać:

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{(1+\theta)\mu} \cdot u},$$

gdzie $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$. Dla określonych parametrów procesu pierwszego

$$\theta_1 = \frac{c_1}{\lambda_1\mu_1} - 1 = \frac{2}{1 \cdot 1} - 1 = 1.$$

Ψ_1 wynosi więc: $\Psi_1(u_1) = \frac{1}{1+1} e^{-\frac{1}{(1+1) \cdot 1} \cdot 10} = \frac{1}{2} e^{-5}$, w procesie drugim:

$$\theta_2 = \frac{c_2}{\lambda_2\mu_2} - 1 = \frac{8}{2 \cdot 2} - 1 = 1.$$

Wobec tego Ψ_2 równa się: $\Psi_2(u_2) = \frac{1}{1+1} e^{-\frac{1}{(1+1) \cdot 2} \cdot 20} = \frac{1}{2} e^{-5}$. Dla parametrów procesu trzeciego otrzymamy: $\theta_3 = \frac{c_3}{\lambda_3\mu_3} - 1 = \frac{4}{1 \cdot 2} - 1 = 1$.

Ψ_3 jest równe: $\Psi_3(u_3) = \frac{1}{1+1} e^{-\frac{1}{(1+1) \cdot 2} \cdot 10} = \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{2}}$.

Otrzymaliśmy więc zależności:

$$\Psi_1 = \Psi_2 < \Psi_3.$$

53. Model ciągły. Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest postaci

$$R(t) = 250t - S(t),$$

gdzie S ma złożony rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 100$, a rozkład pojedynczej szkody Y zadany jest gęstością:

$$f_Y(y) = \frac{2}{y^3}, \quad \text{dla } y > 1.$$

Wylicz prawdopodobieństwo ruiny.

Rozwiązanie:

Ponieważ nadwyżka początkowa $u = 0$, prawdopodobieństwo ruiny wynosi

$$\Psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}.$$

Możemy znaleźć szukane θ ze wzoru

$$c = (1 + \theta)\lambda E[Y].$$

Dla zadanej gęstości pojedynczej szkody Y

$$E[Y] = \int_1^\infty y \frac{2}{y^3} dy = -\frac{2}{y} \Big|_{y=1}^\infty = 2.$$

Zatem

$$250 = (1 + \theta)100 \cdot 2,$$

$$1 + \theta = \frac{5}{4}.$$

Stąd

$$\Psi(0) = \frac{4}{5}.$$