

TEORIA RYZYKA

Ryszard Szekli

Skrypt do wykładu - Uniwersytet Wrocławski -2012/2013

Spis treści

1	Wprowadzenie	5
3	Prawdopodobieństwo ruiny: czas dyskretny	11
3.1	Proces ryzyka jako błędzenie losowe- prawdopodobieństwo ruiny	11
3.1.1	Współczynnik dopasowania	14
3.1.2	Prawdopodobieństwo ruiny - lekkie ogony	16
4	*Prawdopodobieństwo ruiny: czas ciągły	19
4.1	Proces zgłoszeń - teoria odnowy	19
4.2	Prawdopodobieństwo ruiny: proces zgłoszeń Poissona	25
4.3	Prawdopodobieństwo ruiny dla rozkładów fazowych	31
4.4	Prawdopodobieństwo ruiny dla rozkładów ciężkoogonowych	34
4.5	Funkcje Copula	36
4.5.1	Definicja i własności funkcji copula	36
4.5.2	Funkcje copula Archimedesesa	38
4.6	Model zrandomizowany	40
4.7	Przykłady modeli z zależnymi wielkościami roszczeń	43
4.7.1	Roszczenia o rozkładzie Pareto z funkcją Copula Claytona	43
4.7.2	Roszczenia o rozkładzie Weibull'a z funkcją Copula Gumbel'a	47
4.7.3	Odstępy między roszczeniami o rozkładzie Pareto z funkcją Copula Claytona	50
4.7.4	Odstępy między roszczeniami o rozkładzie Weibulla z funkcją Copula Gumbel'a	52
4.8	Dalsze rozszerzenia metody mieszania	54
5	Techniki statystyczne dla rozkładów ciągłych	57
5.1	Dopasowanie rozkładu do danych	58
5.1.1	Dystrybuenta empiryczna	58
5.1.2	Wykres kwantylowy (Q-Q plot)	59
5.1.3	Średnia funkcja nadwyżki	62

5.2	Rozkład Pareto	64
5.2.1	*Rozkłady typu Pareto	65
5.3	Rozkłady z ciężkimi ogonami	73
5.3.1	Klasy podwykładnicze	76
6	Dodatek	77
6.1	Funkcje specjalne	77
6.2	Parametry i funkcje rozkładów	77
6.3	Estymacja momentów	79
6.4	Rozkłady dyskretne	79
6.4.1	Rozkład dwumianowy $Bin(n, p)$	79
6.4.2	Rozkład Poissona $Poi(\lambda)$	80
6.4.3	Rozkład ujemny dwumianowy $Bin^-(r, p)$	80
6.5	Rozkłady ciągłe	81
6.5.1	Rozkład normalny	81
6.5.2	Rozkład odwrotny normalny $IG(\mu, \sigma^2)$	81
6.5.3	Rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma)$	82
6.5.4	Rozkład wykładniczy $Exp(\lambda)$	82
6.5.5	Rozkład Gamma $Gamma(\alpha, \beta)$	83
6.5.6	Rozkład Weibulla $Wei(r, c)$	83
6.5.7	Rozkład Pareto $Par(\alpha, c)$	84
	Literatura	84

Rozdział 1

Wprowadzenie

Zawód aktuariusza jest jednym z najstarszych w świecie finansów. Historia tego zawodu rozpoczyna się w połowie dziewiętnastego wieku wraz z ubezpieczeniami na życie i aż do lat sześćdziesiątych dwudziestego wieku matematyczne metody aktuariusza związane były z wyceną kontraktów ubezpieczeniowych, tworzeniem tablic przeżycia na podstawie danych statystycznych oraz z wyliczeniem rezerw pieniężnych firmy. W latach sześćdziesiątych rozpoczęto stosowanie matematycznych metod do stworzenia teorii ryzyka na użytek ubezpieczeń majątkowych i osobowych. Punktem wyjścia był standardowy złożony proces Poissona, którego pomysł pochodzi od Filipa Lundberga z 1903 roku, a który matematycznie został opracowany przez Haralda Cramera w latach trzydziestych. Do lat dziewięćdziesiątych był on rozwijany na różne sposoby. Proces Poissona został zastąpiony przez proces odnowy oraz przez proces Coxa, następnie użyto procesów Markowa kawałkami deterministycznych, wreszcie wprowadzono losowe otoczenie pozwalające na modelowanie losowych zmian w intensywności zgłoszeń szkód i wielkości szkód. Pojawia się wiele książek z teorii ryzyka, na przykład Bowers et al., Buhlman, Daykin, Pentakainen i Pesonen, Embrechts, Kluppelberg i Mikosch, Gerber, Panjer i Willmot, Rolski et al., Assmussen. Jednym z najbardziej matematycznie interesujących zagadnień w teorii ryzyka jest zagadnienie ruiny, gdzie czasy pierwszego przekroczenia wysokiego poziomu rezerwy kapitałowej są w centrum uwagi. Stare i nowe rezultaty na tym polu mogą być wytłumaczone przez teorię martyngałów i użyte do pokazania nierówności Lundberga dla bardzo ogólnych modeli dowodząc, iż dla małych szkód prawdopodobieństwo ruiny dąży do zera wykładniczo szybko wraz z rezerwą początkową. Specjalna teoria pojawia się dla szkód potencjalnie dużych. Warunkowe twierdzenia graniczne pozwalają zrozumieć trajektorie prowadzące do ruiny. Interesujący rozkwit metod matematycznych w latach dziewięćdziesiątych dokonał się głównie z dwóch przyczyn: wzrostu szkód związanych z katastrofami oraz z gwałtownego rozwoju rynków finansowych.

Wielkie katastrofy i szkody lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych spowodowały przekroczenia rezerw na rynku ubezpieczeń pierwotnych i wtórnych. Szybko rosnący rynek finansowy w tym czasie poszukiwał nowych możliwości inwestycyjnych również w zakresie przyjmowania zakładów w zakresie naturalnych katastrof takich jak trzęsienia ziemi i huragany. Częstość występowania i rozmiary wielkich szkód stworzyły potrzebę wprowadzenia wyszukanych modeli statystycznych do badania procesu szkód. Teoria wartości ekstremalnych dostarcza niezbędnych matematycznych narzędzi do wprowadzenia nowych metod. Pojawiają się książki w zakresie teorii wartości ekstremalnych w kontekście problematyki ubezpieczeniowej, na przykład Embrechts et al., Reiss and Thomas.

W latach osiemdziesiątych banki inwestycyjne dostrzegają, iż zabezpieczanie się przed ryzykiem finansowym nie jest wystarczające ze względu na dodatkowe ryzyka rynkowe. Tak zwany traktat z Bazylei z roku 1988 z poprawkami z lat 1994-1996, wprowadza tradycyjne metody ubezpieczeniowe budowania rezerw do sfery ryzyka bankowego. Rezerwy muszą być tworzone na pokrycie tzw. *earning at risk*, to znaczy różnicy między wartością średnią a kwantylem jednoprocentowym rozkładu zysku/straty (*profit/loss*). Wyznaczenie tak małego kwantyla wymaga bardzo specjalnych metod statystycznych. Metody aktuarialne stosowane są również do modelowania ryzyka kredytowego. Portfele kredytowe są porównywalne z portfelami ryzyk ubezpieczeniowych. Przyszły rozwój metod ubezpieczeniowych związany jest z powstawaniem złożonych rynków ubezpieczeniowych, firmy ubezpieczeniowe oczekują elastycznych rozwiązań zapewniających pomoc w całościowym podejściu do zarządzania ryzykiem.

Całkiem naturalnie na tym tle wprowadzane są metody pochodzące z teorii stochastycznej optymalizacji. Wiele zmiennych kontrolnych takich jak wielkość reasekuracji, dywidendy, inwestycje są badane łącznie w sposób dynamiczny prowadząc do równań Hamiltona-Jakobiego-Bellmana, rozwiązywanych numerycznie.

Po tym krótkim nakreśleniu historii rozwoju metod matematycznych w ubezpieczeniach wracamy do podstawowego modelu. Pomyślmy o konkretnej sytuacji. Przeglądając wszystkie polisy ubezpieczeniowe, zakupione w jednej firmie ubezpieczeniowej, które ubezpieczają skutki pożaru mieszkań w pewnej dzielnicy dużego miasta, najprawdopodobniej natkniemy się na porównywalną wartość ubezpieczanych dóbr oraz możemy przyjąć, iż szanse na pożar w poszczególnych budynkach są podobne. Taki zbiór polis tworzy **jednorodny portfel** ubezpieczeniowy. Większość firm ubezpieczeniowych używa tego rodzaju portfeli jako podstawowych cegiełek swej działalności. Cegielki takie, odpowiednio ułożone, tworzą większe bloki działalności takie jak ubezpieczenia od ognia, ubezpieczenia ruchu drogowego, ubezpieczenia przed kradzieżami, ubezpieczenia majątkowe itd. Blok ubezpieczeń od ognia zawiera wtedy wiele portfeli różniących się rodzajami ryzyka, na przykład dla: wolno stojących domów, domów szeregowych, budynków wielomieszkaniowych, sklepów, marketów

itd., które wymagają osobnego określenia **ryzyka ubezpieczeniowego** dla każdego rodzaju i wyliczenia innej składki ubezpieczeniowej, choćby z tego tylko powodu, iż rozmiar szkody w poszczególnych portfelach może być nieporównywalny. W dalszym ciągu skupiać będziemy naszą uwagę na analizie pojedynczych portfeli, które składać się będą z wielu elementów natury losowej lub deterministycznej. Podstawowym parametrem portfela jest czasokres w którym ubezpieczone ryzyka mogą generować szkody. Zwykle dane odnoszące się do danego portfela obejmują okres jednego roku. Kluczowym parametrem jest rezerwa początkowa (kapitał początkowy), wyznaczany na początku czasokresu w celu pokrycia kosztów wynikających ze zgłoszonych szkód w portfelu. Same zgłoszenia wyznaczone są przez chwile zgłoszeń $T_1 < T_2 < T_3 < \dots$, przy czym wygodnie jest przyjąć iż $T_0 = 0 < T_1$. Liczbę zgłoszeń do chwili $t > 0$ definiujemy przez $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$. Każde zgłoszenie związane jest z wielkością zgłaszanej szkody oznaczanej przez X_n , dla n -tego zgłoszenia. Przy tych oznaczeniach całkowita wartość szkód zgłoszonych do chwili t równa się $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$. (Przyjmujemy $S(t) = 0$, gdy $N(t) = 0$). Oznaczmy przez $H(t)$ wartość składek zebranych w portfelu do chwili t . Zwykle przyjmujemy, że $H(t) = ct$, dla pewnej stałej wartości $c > 0$. Wtedy rezerwa kapitału w portfelu, przy założeniu, że kapitał początkowy wynosi u , wyraża się wzorem $R(t) = u + H(t) - S(t)$. Zakładając, że momenty zgłoszeń oraz wielkości szkód są zmiennymi losowymi, możemy interpretować kolekcję zmiennych $(R(t), t > 0)$ jako proces stochastyczny. (Jest to tak zwany **proces ryzyka**). Badanie procesu ryzyka jest centralnym zagadnieniem tak zwanej teorii ryzyka, która z kolei stanowi niewątpliwie jądro matematyki ubezpieczeniowej poświęconej ubezpieczeniom majątkowym i osobowym.

Nakreślimy teraz bliżej zestawy założeń przyjmowanych o zmiennych losowych tego modelu, które umożliwiają dokładniejszą analizę portfeli.

Rozpocniemy od podania detali dotyczących ciągu zgłoszeń. O zmiennych losowych $T_1, T_2, \dots$ można przyjąć wiele różnych założeń. W pewnych szczególnych przypadkach użytecznym i odpowiednim założeniem jest to, iż ciąg ten tworzy **proces odnowy**, tzn. ciąg zmiennych losowych odstępów między zgłoszeniami $W_i = T_i - T_{i-1}, i = 1, 2, \dots$, jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach. Taki proces zgłoszeń jest elementem składowym modelu *Sparre Andersena*, który będzie opisany detalicznie później. Klasycznym przykładem procesu odnowy jest **proces Poissona**, w którym odstępów między zgłoszeniami mają rozkład wykładniczy. Ponieważ rozkład wykładniczy jako jedyny ma własność **braku pamięci**, proces Poissona ma wiele strukturalnych własności odróżniających go od innych procesów. (Własność braku pamięci rozkładu wykładniczego jest zdefiniowana przez równość $P(W > x + y \mid W > y) = P(W > x)$, dla $x, y > 0$ lub równoważnie $P(W > x + y) = P(W > x)P(W > y)$). Na przykład, dla procesu Poissona $P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$, gdzie $0 < \lambda = (EW)^{-1}$, przy tym, $EN(t) = \lambda t = VarN(t)$. Ponadto liczby zgłoszeń w rozłącznych przedziałach cza-

sowych w procesie Poissona tworzą kolekcję niezależnych zmiennych losowych.

W praktyce aktuarialnej zauważono już dawno, iż stosunek wartości oczekiwanej do wariancji w procesach zgłoszeń $(N(t), t > 0)$ bardzo często nie jest równy jeden (tak jest w procesie Poissona). Można to wytłumaczyć tym, że indywidualne szkody w portfelu są zgłaszane zgodnie z procesem Poissona o pewnej wartości średniej, lecz wartość średnia ilości indywidualnych zgłoszeń może być różna dla każdej z polis w portfelu. Takie założenie prowadzi do procesu zgłoszeń dla którego $P(N(t) = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF(\lambda)$, gdzie F jest pewną dystrybucją określającą rozkład parametru λ w zbiorze możliwych wartości w danym portfelu (zakładamy zawsze, że $\lambda > 0$). Wygodnie jest przyjąć, że istnieje zmienna losowa Λ określająca losową wartość parametru λ , spełniająca $P(\Lambda \leq \lambda) = F(\lambda)$. Zakładamy przy tym, że Λ jest zmienną losową niezależną od indywidualnych procesów Poissona. Proces $(N(t), t > 0)$ spełniający te założenia jest tak zwanym **mieszanym Procesem Poissona**. Szczególny przypadek, gdy Λ ma rozkład gamma, odpowiada tak zwanemu **procesowi Polya**.

Inna użyteczna klasa procesów zgłoszeń jest wyznaczona związkiem rekurencyjnym postaci $P(N(t) = k) = (a + \frac{b}{k})P(N(t) = k - 1)$, dla $k = 1, 2, \dots$ oraz pewnych stałych a, b (być może zależnych jedynie od t). Rozkład geometryczny, dwumianowy i Poissona znajdują się w tej klasie, przy odpowiedniej specyfikacji stałych a, b . Dla takich procesów Panjer pokazał użyteczną rekurencję pozwalającą wyznaczyć rozkład całkowitej wartości szkód w portfelu.

Wspomniana wcześniej własność procesu Poissona, iż liczby zgłoszeń w rozłącznych przedziałach czasowych tworzą kolekcję niezależnych zmiennych losowych stanowi punkt wyjścia do teorii procesów o niezależnych przyrostach. Procesy zgłoszeń posiadające tę własność są procesami, dla których $P(N(t) = k) = \sum_{i=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} p_k^{*i}$, gdzie p_k^{*i} oznacza i -krotny spłot funkcji prawdopodobieństwa $(p_k, k = 0, 1, \dots)$. Oznacza to, że liczbę zgłoszeń można zapisać w postaci $N(t) = \sum_{i=1}^{K(t)} Y_i$, gdzie $(K(t), t > 0)$ jest Procesem Poissona niezależnym od ciągu zmiennych $(Y_i, i = 1, 2, \dots)$, które są z kolei wzajemnie niezależne o jednakowym rozkładzie $(p_k, k = 0, 1, \dots)$. Takie procesy są **złożonymi procesami Poissona**.

Podstawowym założeniem o wielkościach zgłaszanych szkód w portfelu jest to, iż tworzą one ciąg $X_1, X_2, \dots$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach. W zasadzie każda dystrybucja skoncentrowana na $[0, \infty)$ może być użyta do określenia rozkładu wielkości szkód, jednakże często odróżnia się dystrybucje o lekkich i ciężkich ogonach. Dystrybucje o lekkich ogonach są asymptotycznie równoważne rozkładowi wykładniczemu. Dystrybucje o ciężkich ogonach służą do modelowania szkód, które mogą osiągać wartości relatywnie bardzo duże z istotnymi prawdopodobieństwami (tak jak się zdarza w przypadku portfeli ubezpieczeń od pożarów). Typowym rozkładem ciężkoogonowym używanym w praktyce jest rozkład Pareto.

Łatwo wyobrazić sobie sytuację, w których proces zgłoszeń $(N(t), t > 0)$ i ciąg wielkości zgłaszanych szkód $(X_n, n = 1, 2, \dots)$ są zależne, jak na przykład w przypadku szkód wynikających z wypadków drogowych, kiedy to intensywność zgłoszeń jak również rozmiar szkód zależą od warunków drogowych związanych z porą roku. Obliczenie rozkładu całkowitej wartości szkód jest w tym przypadku możliwe jedynie w bardzo specjalnych przypadkach. Dlatego przyjmuje się bardzo często, że $(N(t), t > 0)$ oraz $(X_n, n = 1, 2, \dots)$ są niezależne. Nawet przy tym założeniu wyliczenie rozkładu $S(t)$ nie jest łatwym zadaniem. Podstawowym wzorem w tym przypadku jest $P(S(t) \leq x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(N(t) = i) F_X^{*i}(x)$, gdzie $F_X(x) = P(X_1 \leq x)$. Jak widzimy potrzebne są sploty F_X^{*i} , dla których proste wzory są znane jedynie w nielicznych przypadkach. Z tego powodu musimy zdać się często na aproksymacje. W przypadku, gdy liczba zgłoszeń jest duża a rozkłady mają skończone wariancje można będzie zastosować Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG) i wtedy $P(S(t) \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - ES(t)}{(VarS(t))^{1/2}}\right)$. Aproksymacja tego rodzaju jest bardzo niedokładna, gdy tylko niewielka ilość szkód wyznacza wartość całego portfela (tak jak w przypadku szkód o ciężkich ogonach). Wyznaczenie dobrych aproksymacji w takich przypadkach jest bardzo trudne.

Użyliśmy oznaczenia $H(t)$ dla oznaczenia wielkości składek zebranych w portfelu do chwili t . Zwykle składki pobierane są raz do roku od indywidualnych posiadaczy polis, jednakże wygodniej jest założyć, iż napływ składek odbywa się jednorodnie w ciągu całego roku. Wyznaczenie wielkości $H(t)$ jest jedną z niewielu rzeczy na jakie może wpłynąć ubezpieczający i musi być dokonane w taki sposób, aby pokryć zobowiązania w portfelu wynikające ze zgłaszanych szkód. Z drugiej strony zawyżanie wysokości składek jest ograniczane konkurencją na rynku ubezpieczeń. Najbardziej popularną formą składki jest $H(t) = (1 + \theta)EN(t)EX$, dla pewnej stałej θ odzwierciedlającej narzut gwarantujący bezpieczeństwo działania (safety loading). Taki sposób naliczania składki nie odzwierciedla losowej zmienności portfela, dlatego alternatywnie używa się wzorów uwzględniających wariancje składowych zmiennych losowych. Jeszcze innym aspektem w trakcie naliczania składek jest fakt, że nie wszyscy indywidualni posiadacze polis w danym portfelu powinni płacić składki w tej samej wysokości oraz składki powinny zależeć od historii indywidualnej polisy.

Rezerwa kapitału $R(t) = u + H(t) - S(t)$ przybiera szczególnie prostą postać, gdy przyjmiemy iż parametr czasu przebiega zbiór liczb naturalnych. Oznaczając wtedy przez H_n składki zebrane w n jednostkach czasu oraz przez S_n sumaryczne szkody zgłoszone w n jednostkach czasu otrzymujemy rezerwę w n tej chwili $R_n = u + H_n - S_n$ (przyjmujemy $S_0 = 0, H_0 = 0$). Przy dodatkowym założeniu, że przyrosty $H_n - H_{n-1}$ oraz $S_n - S_{n-1}$ są wzajemnie niezależne dla $n = 2, 3, \dots$, otrzymujemy ciąg $(R_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ zwany błądzeniem losowym (*random walk*). Ogólnie trajektorie przebiegu w czasie wartości $R(t)$ obrazują zachowanie się losowego procesu, w którym trend dodatni reprezentuje $H(t)$, a trend ujemny $S(t)$. Przedmiotem inten-

sywnych badań teoretycznych jest tak zwane prawdopodobieństwo ruiny w procesie $(R(t), t > 0)$. Jeśli przez $\tau = \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$ oznaczmy pierwszą chwilę, gdy rezerwa przyjmie wartość ujemną (tak zwana chwila ruiny), to prawdopodobieństwem ruiny jest $\psi(u) = P(\tau < \infty)$. W przypadku, gdy wielkości szkód mają rozkład lekkoogonowy, można podać aproksymacje i ograniczenia na $\psi(u)$ (będą to wzory oparte o funkcję wykładniczą). W przypadku ciężkich ogonów aproksymacje istnieją dla tak zwanych rozkładów podwykładniczych (*subexponential*).

Ostatnim zagadnieniem omówionym w tym wprowadzeniu będzie **reasekuracja**. Reasekuracja jest podstawową aktywnością ubezpieczycieli. Firmy ubezpieczeniowe podpisują kontrakty reasekuracyjne w celu zmniejszenia szansy na odpowiedzialność za szkody tak duże, że mogłyby zagrozić wypłacalności firmy. Taka sytuacja może nastąpić na przykład w sytuacji, gdy zgłoszone zostaną szkody o nadzwyczaj dużej wielkości lub gdy ilość zgłoszeń skumuluje się tworząc nadzwyczaj duże skupiska lub gdy nastąpią nadzwyczajne zmiany w trakcie zbierania składek (niespodziewana inflacja, nagły wzrost kosztów działania itp.). Reasekuracja zwiększa możliwości firmy ubezpieczeniowej i jej elastyczność pozwalając na oferowanie szerszego zakresu usług ubezpieczeniowych. Większość ze stosowanych kontraktów reasekuracyjnych mieści się w następującym zbiorze możliwości. Niech $Z(t) = S(t) - D(t)$ oznacza część szkód podlegających reasekuracji, gdzie $D(t)$ oznacza wielkość własnej odpowiedzialności firmy (*deductible*). Oczywiście, firma ubezpieczeniowa za przekazanie odpowiedzialności za $Z(t)$ musi część zebranych składek przekazać firmie reasekuracyjnej. Ta z kolei może postąpić podobnie rozpoczynając cały łańcuch reasekuracyjny. *Reasekuracja proporcjonalna* odpowiada sytuacji, gdy $Z(t) = aS(t)$, dla pewnej stałej $a \in (0, 1)$. *Reasekuracja excess-loss* wynika z zasady $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - d)_+$, gdzie d jest dodatnim poziomem retencji oraz $x_+ = \max(0, x)$. Oznacza to, iż do reasekuracji przekazywane są sumaryczne nadwyżki indywidualnych szkód ponad poziom retencji d . Taki kontrakt, przy dużej ilości zgłoszeń prowadzi do dużych kosztów administracyjnych. Reasekuracja *stop-loss* wyznaczona jest przez $Z(t) = (S(t) - D)_+$, dla poziomu retencji D wyznaczonego dla całego portfela. Taka reasekuracja zabezpiecza przed nadzwyczaj dużą ilością niewielkich szkód. Istnieją liczne inne sposoby reasekuracji oraz ich kombinacje, jednakże ze względu na ich złożoność nie są powszechnie akceptowane.

Rozdział 3

Prawdopodobieństwo ruiny: czas dyskretny

Rozważmy następujący proces:

$$R_n = u + cn - S_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.0.1)$$

gdzie $u \geq 0$ jest kapitałem początkowym towarzystwa ubezpieczeniowego, c - składką otrzymaną w ciągu jednego okresu, a $S_n = W_1 + \dots + W_n$ - sumą szkód wypłaconych do chwili n . Zmienne losowe $(W_i)_{i \geq 1}$ są wypłatami w i -tym okresie. Proces $(R_n)_{n \geq 1}$ nazywamy **procesem nadwyżki ubezpieczyciela** lub **procesem ryzyka**.

Interesować nas będzie zmienna losowa T postaci

$$T = \min\{n : R_n < 0\},$$

(zmienna ta nazywana jest **momentem technicznej ruiny**), jak również

$$\psi(u) = P(T < \infty),$$

czyli **prawdopodobieństwo ruiny**, jeżeli kapitał początkowy wynosił u .

3.1 Proces ryzyka jako błądzenie losowe- prawdopodobieństwo ruiny

Ciąg R_n możemy zapisać jako błądzenie losowe startujące z poziomu u

$$R_n = u + (c - W_1) + \dots + (c - W_n),$$

oraz

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P\left(\bigcup_{i \geq 1} \{R_i < 0\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i \geq 1} \{S_i - ci > u\}\right) \\ &= P(\max(S_i - ci : i \geq 1) > u).\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo ruiny jest więc równe prawdopodobieństwu, że maksymalna wartość pewnego błędzenia losowego przekroczy poziom u . Oznaczmy to maksimum przez

$$M = \max(0, W_1 - c, (W_1 - c) + (W_2 - c), \dots),$$

gdzie błędzenie losowe ma przyrosty postaci $W_i - c$, stąd

$$\psi(u) = P(M > u).$$

Powstaje pytanie, kiedy błędzenie losowe osiąga skończone maksimum? Intuicja wskazuje na błędzenia, które dryfują "do dołu" i w związku z tym osiągają skończony pułap "do góry". Rzeczywiście zachodzi

Lemat 3.1.1 $P(M < \infty) = 1 \Leftrightarrow E[W_i - c] < 0$.

Dowód. Z mocnego prawa wielkich liczb

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (W_i - c)}{n} = E[W_i - c]\right) = 1,$$

stąd, jeśli $E[W_i - c] < 0$, to $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (W_i - c) = -\infty) = 1$, czyli trajektorie błędzenia z prawdopodobieństwem 1 dążą do $-\infty$ osiągając w związku z tym $M < \infty$. Z drugiej strony, jeśli $M < \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (W_i - c)}{n} \leq 0$, czyli $E[W_i - c] \leq 0$. Ponieważ w symetrycznym błędzeniu losowym trajektorie z prawdopodobieństwem 1 powracają do punktu wyjścia nieskończenie wiele razy, warunek $M < \infty$ nie może zachodzić z prawdopodobieństwem 1, stąd $E[W_i - c] = 0$ jest wykluczone. Oznacza to, że $M < \infty$ z prawdopodobieństwem 1 pociąga $E[W_i - c] < 0$. $\square$

Okazuje się, że rozkład maksimum M nie zmieni się jeśli dodamy jeden *extra* przyrost do M i wyrównamy do zera.

Lemat 3.1.2 *Rozkład zmiennej M jest taki sam jak zmiennej $\max(0, M + (W - c))$, gdzie W jest zmienną niezależną od całego błędzenia $\{W_i - c, i \geq 1\}$, ale posiadającą rozkład równy rozkładowi W_i , pisząc krótko*

$$M \stackrel{d}{=} (M + W - c)_+.$$

3.1. PROCES RYZYKA JAKO BŁĄDZENIE LOSOWE-PRAWDOPODOBIENSTWO RUINY 13

Dowód. Możemy M zapisać w postaci

$$M = \max(0, W_1 - c + L),$$

gdzie

$$L = \max(0, W_2 - c, (W_2 - c) + (W_3 - c), (W_2 - c) + (W_3 - c) + (W_4 - c), \dots).$$

Jeśli teraz w powyższych wzorach zastąpimy ciąg $W_1, W_2, W_3, \dots$ ciągiem $W, W_1, W_2, \dots$, to rozkład uzyskanych zmiennych nie zmieni się, bo wyjściowy i *nowy* ciąg są o tym samym rozkładzie. To znaczy, że rozkład M jest taki sam jak rozkład $\max(0, W - c + \max(0, W_1 - c, (W_2 - c) + (W_3 - c), \dots)) = (W - c + M)_+$. $\square$

Używając powyższy lemat uzyskujemy rozkład M w języku funkcji tworzących w przypadku $c = 1$.

Twierdzenie 3.1.3 *Zalóżmy, że $W_i \in \mathbb{N}$ mają funkcję tworzącą P_W . Jeśli $E[W_i] < 1$ to zmienna M ma funkcję tworzącą*

$$P_M(t) = \frac{1 - E[W_i]}{1 - E[W_i] P_{\tilde{W}}(t)},$$

gdzie

$$P_{\tilde{W}}(t) = \frac{1 - P_{W_i}(t)}{E[W_i](1 - t)}.$$

Dowód. Liczymy funkcję tworzącą

$$\begin{aligned} P_M(t) &= E[t^M] = E[t^{(M+W-1)_+}] \\ &= E[t^{(M+W-1)_+} I_{\{M+W-1 \geq 0\}}] + E[t^{(M+W-1)_+} I_{\{M+W-1 < 0\}}] \\ &= P(M+W=0) \\ &\quad + P(M+W-1=0) + P(M+W-1=1)t + P(M+W-1=2)t^2 + \dots \\ &= P(M+W=0) + \frac{1}{t}(P(M+W=1)t + P(M+W=2)t^2 + \dots) \\ &= P(M+W=0) - \frac{1}{t}P(M+W=0) + \frac{1}{t}P_{M+W}(t) \\ &= P(M+W=0)(1 - \frac{1}{t}) + \frac{1}{t}P_M(t)P_W(t). \end{aligned}$$

Wyliczamy stąd

$$P_M(t) = \frac{(t-1)P(M+W=0)}{t - P_W(t)}.$$

Przechodząc z $t \rightarrow 1$ w powyższej równości otrzymujemy

$$1 = \frac{P(M + W = 0)}{1 - E[W]},$$

co daje $P(M + W = 0) = 1 - E[W]$. Ostatecznie więc

$$P_M(t) = \frac{(1 - E[W])(1 - t)}{P_W(t) - t},$$

co po przekształceniu możemy zapisać jako

$$P_M(t) = \frac{1 - E[W]}{1 - E[W] P_{\tilde{W}}(t)}.$$

□

Funkcja tworząca $P_{\tilde{W}}$ odpowiada zmiennej losowej o rozkładzie

$$P(\tilde{W} = k) = \frac{P(W > k)}{E[W]},$$

który nazywamy rozkładem resztowym rozkładu zmiennej W .

Zmienna M ma rozkład złożony geometryczny $CGeo(p = 1 - E[W], F_{\tilde{W}})$. Tak więc widzimy, że **prawdopodobieństwo ruiny, przy wprowadzonych założeniach, jest równe ogonowi dystrybucji zmiennej losowej o złożonym rozkładzie geometrycznym**. Okaże się, że taka struktura jest również prawdziwa w modelu z czasem ciągłym.

3.1.1 Współczynnik dopasowania

Założmy, że zmienne losowe $(W_i)_{i \geq 1}$ mają ten sam rozkład i funkcję tworzącą momenty $M_W(t)$ oraz $E[W] < c$. Definiujemy **współczynnik dopasowania** $R(W, c)$ jako dodatnie rozwiązanie równania $M_{W-c}(r) = 1$, co jest równoważne

$$\exp(-cr)M_W(r) = 1. \quad (3.1.1)$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} M_{W-c}(r) &= E[(W - c)e^{r(W-c)}], \\ \frac{d^2}{dr^2} M_{W-c}(r) &= E[(W - c)^2 e^{r(W-c)}] \geq 0. \end{aligned}$$

Co więcej

$$\frac{d}{dr} M_{W-c}(r) = E[(W - c)e^{r(W-c)}] = E[W] - c < 0$$

i $M_{W-c}(0) = 1$. Oznacza to, że funkcja $M_{W-c}(r)$ maleje w otoczeniu 0 i jest wypukła, co daje istnienie współczynnika dopasowania.

Przykład 3.1.4 Załóżmy, że $W \sim N(\mu, \sigma^2)$. Wtedy $M_W(r) = \exp(\mu r + \sigma^2 r^2/2)$ i stąd $R(N(\mu, \sigma^2), c) = \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}$. Jeżeli składka za jeden okres naliczana jest według zasady wartości oczekiwanej, to $c = (1 + \theta)E[W]$, a stąd $R(N(\mu, \sigma^2), c) = \frac{2\theta\mu}{\sigma^2}$.

□

Zauważmy, że założenie o normalności zmiennej losowej W ma sens tylko wtedy, gdy do łącznych wypłat stosujemy aproksymację normalną (szkody nie mogą być ujemne).

Przykład 3.1.5 Załóżmy, że W przyjmuje dwie wartości: $P(W = a) = p = 1 - P(W = b)$. Wtedy $M_W(r) = p \exp(ra) + (1 - p) \exp(rb)$. Współczynnik dopasowania wylicza się więc ze wzoru

$$\exp(cr) = p \exp(ra) + (1 - p) \exp(rb)$$

Jeżeli $a = 2$, $b = 0$, $p < \frac{1}{2}$, $c = 1$ powyższe równanie staje się równaniem kwadratowym i otrzymujemy $R(W, c) = -\log\left(\frac{p}{1-p}\right)$.

□

Powyższy przykład pokazuje, że rozwiązanie równania (3.1.1) rzadko da się przedstawić w postaci jawnej. Współczynnik R można jednak przybliżyć stosując podobne rozumowanie jak w przypadku aproksymacji Edgewortha. Rozwijając $\log M_W(r)$ w szereg Taylora i uwzględniając dwa (trzy) pierwsze składniki dostajemy równanie (3.1.1) w następującej postaci:

$$\begin{aligned} rE[W] + \frac{1}{2}r^2\text{Var}[W] - cr &= 0, \\ (rE[W] + \frac{1}{2}r^2\text{Var}[W] + \frac{1}{6}r^3E[(W - E[W])^3] - cr &= 0), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

co w pierwszym przypadku daje przybliżony współczynnik dopasowania

$$R(W, c) \approx \frac{2(c - E[W])}{\text{Var}[W]}. \quad (3.1.3)$$

Dla W będącego rozkładem złożonym $W = \sum_{i=1}^N X_i$ dostajemy więc

$$R\left(\sum_{i=1}^N X_i, c\right) \approx \frac{2(c - E[N] E[X])}{E[N] \text{Var}[X] + (E[X])^2 \text{Var}[N]}.$$

Przykład 3.1.6 Załóżmy, że $c = (1 + \theta)E[W] = (1 + \theta)E[N] E[X]$.

1. Jeżeli $W \sim CPoi(\lambda, F_X)$, to

$$R(CPoi(\lambda, F_X), c) \approx \frac{2\theta E[X]}{E[X^2]}.$$

2. Jeżeli $W \sim CBin(n, p, F_X)$, to

$$R(CBin(n, p, F_X), c) \approx \frac{2\theta E[X]}{\text{Var}[X] + q(E[X])^2}.$$

3. Jeżeli $W \sim CBin^-(r, p, F_X)$, to

$$R(CBin^-(r, p, F_X), c) \approx \frac{2\theta E[X]}{E[X^2] + (E[X])^2(1/p - 1)}.$$

Zauważmy, że jeżeli $p \rightarrow 1$ to współczynnik dopasowania $R(CBin^-(r, p, F_X), c)$ jest równy analogicznej wielkości dla rozkładu $CPoi(\lambda, F_X)$. Nie jest to zaskakujący, gdyż rozkład Poissona można w tym przypadku traktować jako graniczny dla rozkładu ujemnego dwumianowego.

□

Podobnie jak w przypadku rozwinięcia Edgewortha wzór (3.1.3) daje złe przybliżenie jeżeli zmienna W ma dużą skośność.

3.1.2 Prawdopodobieństwo ruiny - lekkie ogony

Twierdzenie 3.1.7 *Założmy, że w procesie ryzyka (3.0.1)*

- zmienne losowe $(W_i)_{i \geq 1}$ są niezależne i o tym samym rozkładzie,
- funkcja tworząca momenty $M_W(t)$ istnieje i jest skończona,

- $E[W] < c$.

Wtedy dla $R := R(W, c)$

$$\psi(u) = \exp(-Ru) \frac{1}{E[\exp(-RR_T | T < \infty)]}. \quad (3.1.4)$$

Dowód: Zauważmy najpierw, że ciąg $(R_n)_{n \geq 1}$ ma przyrosty niezależne, tzn. zmienne losowe $R_{n_1} - R_0, R_{n_2} - R_{n_1}, R_{n_3} - R_{n_2}, \dots$ są niezależne dla dowolnych $0 \leq n_1 < n_2 < \dots$. Poza tym dla dowolnych $n > i$ mamy z niezależności

$$\begin{aligned} E[\exp(-R(R_n - R_i))] &= E[\exp(-R(c - W_{i+1}) - \dots - R(c - W_n))] = \\ &= E[\exp(-R(c - W))]^{n-i} = 1 \end{aligned}$$

i w szczególności dla $i = 0$ mamy

$$E[\exp(-R(R_n))] = \exp(-Ru). \quad (3.1.5)$$

Stąd

$$\begin{aligned} \exp(-Ru) &= E[\exp(-RR_n)] \\ &= \sum_{i=1}^n E[\exp(-RR_n | T = i)] P(T = i) + E[\exp(-RR_n | T > n)] P(T > n) \\ &= \sum_{i=1}^n E[\exp(-RR_i - R(R_n - R_i) | T = i)] P(T = i) \\ &\quad + E[\exp(-RR_n | T > n)] P(T > n) \\ &= \sum_{i=1}^n E[\exp(-RR_i | T = i)] P(T = i) + E[\exp(-RR_n | T > n)] P(T > n). \end{aligned}$$

Teraz, ostatni składnik w powyższym równaniu dąży do 0 przy $n \rightarrow \infty$, a stąd

$$\exp(-Ru) = \sum_{i=1}^{\infty} E[\exp(-RR_i | T = i)] P(T = i) = E[\exp(-RU_T | T < \infty)].$$

□

Przykład 3.1.8 (cd. Przykładu 4.5.1 z $a = 1$ i $b = 0$) Zauważmy, że $R_T = -1$ z prawdopodobieństwem 1. Stąd

$$\psi(u) = \exp(-R(u+1)) = \left(\frac{p}{1-p} \right)^{u+1}.$$

□

Wyliczenie wartości znajdującej się w mianowniku (3.1.4) jest zazwyczaj trudne i możliwe jedynie tylko w kilku przypadkach. Z Twierdzenia 3.1.7 otrzymujemy jednak górne oszacowanie na prawdopodobieństwo ruiny: **Nierówność Cramera**

$$\psi(u) \leq \exp(-Ru). \quad (3.1.6)$$

Rozdział 4

*Prawdopodobieństwo ruiny: czas ciągły

Podobnie do dyskretnego procesu ryzyka (3.0.1) rozważa się model w czasie ciągłym:

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

gdzie $(X_i)_{i \geq 1}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, a $(N(t), t \geq 0)$ jest procesem opisującym ilość szkód zgłoszonych do chwili t . Jeżeli więc szkody zgłaszane są w losowych chwilach $0 = T_0 < T_1 < \dots$, to

$$N(t) := \max\{n : T_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{T_n \leq t\}}.$$

zajmiemy się najpierw własnościami procesu $(N(t), t > 0)$.

4.1 Proces zgłoszeń - teoria odnowy

Jeśli $U_i = T_i - T_{i-1}$ dla $i = 1, 2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach, to proces $(N(t), t > 0)$ jest **procesem odnowy**. Zachodzą podstawowe związki zdarzeń opisujących ten proces.

- $\{N(t) = 0\} = \{T_1 > t\}$,
- $\{N(t) = k\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\}$,
- $\{N(t) \geq k\} = \{T_k \leq t\}$,

- $\{N(t) < k\} = \{T_k > t\}$.

Stąd $P(N(t) = 0) = 1 - F_U(t)$, oraz $P(N(t) \geq k) = F_U^{*k}(t)$, gdzie F_U jest dystrybucją odstępów U_i .

Twierdzenie 4.1.1 *Jeśli $E[U_i] > 0$, to*

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E[U]}\right) = 1.$$

Dowód: Korzystając z podstawowych zależności, mamy

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

z mocnego prawa wielkich liczb otrzymujemy z prawdopodobieństwem 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = E[U],$$

stąd teza, gdyż z prawdopodobieństwem 1, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$. □

Wielkość $N(t)$ można postrzegać jako efekt sumaryczny wielu zmiennych losowych, gdy t rośnie do ∞ . Należy więc oczekiwać, że zachodzi twierdzenie graniczne podobne do CTG. Rzeczywiście:

Twierdzenie 4.1.2 *Jeśli $0 < \text{Var}[U_i] < \infty$, to*

$$P\left(\frac{N(t) - t/E[U]}{\sqrt{(\text{Var}[U] t / (E[U])^3)}} \leq x\right) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \Phi(x),$$

gdzie Φ oznacza dystrybucję standardowego rozkładu normalnego.

Dowód:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{N(t) - t/E[U]}{\sqrt{(\text{Var}[U] t / (E[U])^3)}} \leq x\right) &= P(N(t) \leq x\sqrt{(\text{Var}[U] t / (E[U])^3)} + t/E[U]) \\ &= P(T_{\lfloor x\sqrt{(\text{Var}[U] t / (E[U])^3)} + t/E[U] \rfloor + 1} > t) \\ &= P\left(\frac{U_1 + \dots + U_K - KE[U]}{\sqrt{(K\text{Var}[U])}} \geq \frac{t - KE[U]}{\sqrt{(K\text{Var}[U])}}\right), \end{aligned}$$

gdzie $K = \lfloor x\sqrt{(\text{Var}[U]t/(\text{E}[U])^3) + t/\text{E}[U]} \rfloor + 1$. Ponieważ

$$\frac{t - K\text{E}[U]}{\sqrt{(K\text{Var}[U])}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -x,$$

z CTG dla ciągu (U_i) i równości $1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$, otrzymujemy tezę. $\square$

Wartość oczekiwaną liczby zgłoszeń do chwili t nazywamy **funkcją odnowy** i oznaczamy

$$H(t) := \text{E}[N(t)], \quad t > 0.$$

Otrzymujemy natychmiast z podstawowych zależności między zdarzeniami

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) > k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) \geq k+1) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(T_{k+1} \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_U^{*k}(t). \quad (4.1.1)$$

Z twierdzenia 4.1.1 wiemy, że z prawdopodobieństwem 1 uśredniona w czasie liczba zgłoszeń jest zbieżna do odwrotności wartości oczekiwanej odstępów między zgłoszeniami. Można się spodziewać, że wartość oczekiwana liczby zgłoszeń uśredniona w czasie będzie zbieżna do tej samej granicy. Rzeczywiście tak jest, ale wymaga to technicznie dodatkowej uwagi, ponieważ zbieżność z prawdopodobieństwem 1 ciągu zmiennych losowych nie implikuje - ogólnie rzecz biorąc - zbieżności wartości oczekiwanych tego ciągu.

Twierdzenie 4.1.3 *Jeśli $\text{E}[U_1] < \infty$, to*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\text{E}[U]}.$$

Dowód: Z lematu Fatou otrzymujemy

$$\frac{1}{\text{E}[U]} = \text{E} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} \right] \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t}.$$

Wystarczy więc pokazać, że

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} \leq \frac{1}{\text{E}[U]}.$$

W tym celu pokażemy najpierw tę nierówność dla obciętych odstępów

$$U_n^K := \min(K, U_n), \quad K > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Ze względu na obcięcie mamy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H^K(t)}{t},$$

gdzie H^K jest funkcją odnowy dla obciętych odstępów. Aby oszacować wartość $H^K(t)$, pokażemy, że

$$H^K(t) + 1 = \mathbb{E} [N^K(t) + 1] = \frac{\mathbb{E} [U_1 + \cdots + U_{N^K(t)+1}]}{\mathbb{E} [U_1^K]}.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [U_1 + \cdots + U_{N^K(t)+1}] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} U_i^K I_{\{i \leq N^K(t)+1\}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} [U_i^K I_{\{i \leq N^K(t)+1\}}] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} [U_i^K I_{\{T_{i-1}^K \leq t\}}] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} [U_i^K] P(T_{i-1}^K \leq t) \\ &= \mathbb{E} [U_1^K] \sum_{i=0}^{\infty} P(N^K(t) + 1 > i) \\ &= \mathbb{E} [U_1^K] \mathbb{E} [N^K(t) + 1], \end{aligned}$$

gdzie korzystaliśmy z niezależności T_{i-1}^K od U_i^K . Otrzymujemy więc oszacowanie

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H^K(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} [U_1 + \cdots + U_{N^K(t)+1}]}{t \mathbb{E} [U_1^K]}.$$

Ponieważ $\mathbb{E} [U_1 + \cdots + U_{N^K(t)+1}] \leq t + K$ mamy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H^K(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t + K}{t \mathbb{E} [U_1^K]} = \frac{1}{\mathbb{E} [U^K]}.$$

Przechodząc z $K \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} \leq \frac{1}{\mathbb{E} [U]}.$$

□

Funkcja odnowy spełnia równanie całkowe (Fredholma)

$$H(t) = F_U(t) + H * F_U(t), \quad t > 0, \quad (4.1.2)$$

gdzie tutaj operacja splotu $*$ jest zdefiniowana na $(0, \infty)$ dla dowolnych funkcji f, g ograniczonych na przedziałach zwartych o wahaniu ograniczonym, tzn.

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-y)dg(t).$$

Przypomnijmy, że $f^{*0}(t) = I_{(0,\infty)}(t)$. Rzeczywiście

$$F_U(t) + H * F_U(t) = F_U(t) + F_U^{*2}(t) + F_U^{*3}(t) + \dots = H(t),$$

z równania (4.1.1).

Okazuje się, że rozważanie równań tego typu jest bardzo owocne w kontekście badania procesu ryzyka. Zachodzi następujący ogólny lemat.

Lemat 4.1.4 *Niech F będzie być może ułomną dystrybuantą nieujemnej zmiennej losowej, tzn. $F(0) = 0$, F jest niemalejąca i prawostronnie ciągła oraz $F(\infty) \leq 1$. Jeśli dla pewnej funkcji $z(t) \geq 0$, ograniczonej na przedziałach zwartych zachodzi równanie*

$$Z(t) = z(t) + Z * F(t),$$

to rozwiązaniem tego równania jest

$$Z(t) = z * \hat{H}(t), \quad \hat{H}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t).$$

Dowód: Niech

$$Z_k(t) = z * \left(\sum_{n=0}^k F^{*n}(t) \right),$$

wtedy

$$Z_{k+1}(t) = z(t) + Z_k * F(t).$$

Przy założeniu $z \geq 0$ mamy monotoniczność ciągu $Z_k(t)$, więc przechodząc z $k \rightarrow \infty$ w powyższej równości otrzymujemy tezę. □

Przykład 4.1.5 Niech $F := F_U$, o gęstości $F'_U = f_U$. Niech $z := f_U$. Wtedy $Z(t) = H'(t)$, tzn, zachodzi

$$H'(t) = f_U(t) + H' * F_U(t).$$

Wynika to natychmiast ze wzoru $(f * g)' = f' * g = f * g'$, dla dowolnych różniczkowalnych splatanych funkcji f, g .

□

Przykład 4.1.6 Niech $F := qG$, dla $q \in (0, 1)$ i właściwej dystrybucyjności G . Niech $z(t) \equiv 1 - q = p$. Mamy więc równanie

$$Z = p + Z * qG.$$

Wtedy Z jest dystrybucyjnością złożonego rozkładu geometrycznego $CGeo(p, G)$, tzn.

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} pq^n G^{*n}(t).$$

□

Własności asymptotyczne rozwiązań $Z(t)$ tego typu równań są zależne od całkowalności funkcji $z(t)$. **Kluczowym twierdzeniem odnowy** jest fakt o istnieniu granicy rozwiązania równania typu odnowy.

Twierdzenie 4.1.7 *Jeśli $z \geq 0$ jest nierosnącą i całkowalną oraz F jest właściwą dystrybucyjnością ciągłą, to rozwiązanie równania z lematu 4.1.4 ma granicę*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \frac{\int_0^{\infty} z(x) dx}{\int_0^{\infty} 1 - F(x) dx}$$

Twierdzenie to można uogólnić na funkcje bezpośrednio całkowalne w sensie Riemanna.

4.2 Prawdopodobieństwo ruiny: proces zgłoszeń Poissona

Mówimy, że $(N(t), t \geq 0)$ jest **procesem Poissona** z parametrem λ jeśli ten proces ma następujące własności:

- $N(0) = 0$;
- Dla $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, przyrosty $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona

$$P(N(t_i) - N(t_{i-1}) = m) = \exp(-\lambda(t_i - t_{i-1})) \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^m}{m!}, \quad m \geq 0, i = 1, \dots, k;$$

- dla $h > 0$, $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ oraz $P(N(h) > 1) = o(h)$;
- Odstępy między zgłoszeniami są niezależne i mają rozkład wykładniczy: $P(T_i - T_{i-1} \leq x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $i \geq 1$.

Niech $(N(t), t \geq 0)$ będzie więc procesem Poissona z parametrem λ . Ponadto, niech $(X_i)_{i \geq 1}$ będzie ciągiem dodatnich, niezależnych zmiennych losowych o tej samej dystrybucji $F_X(x) = P(X_1 \leq x)$, niezależnym od procesu $(N(t), t \geq 0)$. Niech $f_X = F'_X$. **Prawdopodobieństwem ruiny** przy kapitale początkowym u jest

$$\psi(u) = P(T < \infty), \quad T := \inf(t > 0 : R(t) < 0).$$

Możemy, więc równoważnie napisać

$$\psi(u) = P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct > u \quad \text{dla pewnego } t \geq 0\right).$$

Wygodnie jest wprowadzić zmienną $M = \sup(t > 0 : \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct)$, bo wtedy, analogicznie do modelu w czasie dyskretnym, możemy napisać

$$\psi(u) = P(M > u).$$

Zauważmy, że ruina może nastąpić jedynie w chwili jednego ze zgłoszeń, stąd supremum M wystarczy badać w chwilach zgłoszeń:

$$M = \sup(0, X_1 - cU_1, (X_1 - cU_1) + (X_2 - cU_2), \dots).$$

Widać, że musimy założyć

$$q := \frac{\lambda E[X]}{c} < 1, \quad (4.2.1)$$

gdzie $E[X] = E[X_1] < \infty$. W przeciwnym razie, M nie będzie skończoną zmienną losową i $\psi(u) = 1$ dla każdego $u > 0$. Przy tym warunku, $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] = E[N(t)] E[X_1] = \lambda t E[X]$, stąd (4.2.1) oznacza, że składka c zebrana w jednostce czasu jest większa niż średnia wartość wypłaconych szkód.

Okazuje się, że funkcja ψ oraz funkcja $\bar{\psi} := 1 - \psi$ spełniają pewne równania typu odnowy, z których będziemy mogli wywnioskować ich podstawowe własności.

Lemat 4.2.1 *Jeśli $q \in (0, 1)$, to*

$$\bar{\psi}(u) = p + q\bar{\psi} * \tilde{F}_X(u),$$

gdzie $\tilde{F}_X(u) = \frac{1}{E[X]} \int_0^u 1 - F_X(x) dx$, $p = 1 - q$.

Zanim podamy dowód tego faktu, zauważmy, że równanie w tym lemacie ma postać taką jak w przykładzie 4.1.6, a stąd natychmiast widzimy, że $\bar{\psi}$ jako rozwiązanie ma postać

Twierdzenie 4.2.2 (wzór Pollaczka-Chinczyna)

Przy założeniu, że $q = \frac{\lambda E[X]}{c} < 1$ mamy

$$\bar{\psi}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p q^n \tilde{F}_X^{*n}(t),$$

Czyli prawdopodobieństwo nie zajścia ruiny $\bar{\psi}(u)$ jest jako funkcja kapitału początkowego u dystrybuantą (zmiennej M) złożonego rozkładu geometrycznego $CGeo(p, \tilde{F}_X)$. Jest to sytuacja analogiczna do modelu w czasie dyskretnym, ale tutaj nie zakładamy, że mamy w błędzeniu losowym, dla którego szukamy maksimum, do czynienia ze zmiennymi o wartościach naturalnych.

Dowód: lematu 4.2.1.

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(u) &= P(R(t), t > 0) = P(S(t) < u + ct, t > 0) \\
&= P(S(T_1) < u + cT_1, S(t) - S(T_1) < u + ct - S(T_1), t > T_1) \\
&= P(X_1 < u + cT_1, S(z + T_1) - S(T_1) < u + c(z + T_1) - X_1, z > 0) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty P(X_1 < u + cT_1, S(z + T_1) - S(T_1) < \\
&\quad u + c(z + T_1) - X_1, z > 0 | X_1 = x, T_1 = y) dF_X(x) \lambda \exp(-\lambda y) dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty I_{\{x < u + cy\}}(x, y) P(S(z + y) - S(y) < u + cz + cy - x, z > 0) \\
&\quad dF_X(x) \lambda \exp(-\lambda y) dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^{u+cy} P(S(z) < u + cy - x + cz, z > 0) dF_X(x) \lambda \exp(-\lambda y) dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^{u+cy} \bar{\psi}(u + cy - x) dF_X(x) \lambda \exp(-\lambda y) dy \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \int_0^s \bar{\psi}(s - x) dF_X(x) \exp(-\lambda \frac{s - u}{c}) ds,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość zachodzi po podstawieniu $u + cy := s$.

Przypomnijmy regułę różniczkowania całki oznaczonej. Dla

$$\Psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(u, s) ds,$$

$$\frac{d}{du} \Psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial}{\partial u} f(u, s) ds + f(u, b(u))b'(u) - f(u, a(u))a'(u).$$

Różniczkując względem u otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_u^\infty \frac{d}{du} \left(\int_0^s \bar{\psi}(s - x) dF_X(x) \exp(-\lambda \frac{s - u}{c}) \right) ds - \right. \\
&\quad \left. \int_0^u \bar{\psi}(u - x) dF_X(x) \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[\frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \int_0^s \bar{\psi}(s - x) dF_X(x) \exp(-\lambda \frac{s - u}{c}) ds - \right. \\
&\quad \left. \int_0^u \bar{\psi}(u - x) dF_X(x) \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} [\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u - x) dF_X(x)].
\end{aligned}$$

Całkując po zmiennej u w zakresie od 0 do t mamy

$$\bar{\psi}(t) - \bar{\psi}(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^t [\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u - x) dF_X(x)] du.$$

Aby wyliczyć

$$\int_0^t \int_0^u \bar{\psi}(u-x) dF_X(x) du,$$

podstawiamy $s := u - x$ i całkujemy przez części otrzymując

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^u \bar{\psi}(u-x) dF_X(x) du &= \int_0^\infty \int_0^{t-x} \bar{\psi}(s) ds dF_X(x) \\ &= \int_0^t \bar{\psi}(s) ds - \int_0^\infty \bar{\psi}(t-x)(1-F_X(x)) dx, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{\psi}(u) du - \\ &\quad \frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{\psi}(s) ds + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{\psi}(t-x)(1-F_X(x)) dx. \end{aligned}$$

Gdy $t \rightarrow \infty$

$$1 - \bar{\psi}(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1-F_X(x)) dx = \frac{\lambda}{c} E[X],$$

co daje

$$\bar{\psi}(t) = (1 - \frac{\lambda}{c} E[X]) + \frac{\lambda}{c} E[X] \bar{\psi} * \tilde{F}_X(t).$$

□

Z równania dla $\bar{\psi}$ natychmiast otrzymujemy równanie dla ψ .

Lemat 4.2.3 Funkcja prawdopodobieństwa ruiny ψ spełnia następujące równanie typu odnowy:

$$\psi(u) = q(1 - \tilde{F}_X(u)) + q\psi * \tilde{F}_X(u), \quad (4.2.2)$$

Przykład 4.2.4 Gdy wielkości szkód X_i mają rozkład wykładniczy $Exp(1/E[X])$, to $\tilde{F}_X$ jest znowu dystrybucją wykładniczą $Exp(1/E[X])$ i wtedy $\bar{\psi}$ jest dystrybucją $CGeo(p, Exp(1/E[X]))$, wiemy z (??), że jest to dystrybucja wykładnicza wymieszana z atomem w zerze, dokładniej, dla $p = 1 - \lambda E[X]/c$:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u) &= p + q(1 - \exp(-pu/E[X])), \\ \psi(u) &= q \exp(-pu/E[X]). \end{aligned}$$

Wprowadzając narzut (security loading) $\vartheta > 0$ poprzez równość

$$c = (1 + \vartheta)\lambda E[X],$$

otrzymujemy alternatywną postać

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(u) &= \frac{\vartheta}{1+\vartheta} + \frac{1}{1+\vartheta} (1 - \exp(-\frac{\vartheta}{E[X](1+\vartheta)}u)), \\ \psi(u) &= \frac{1}{1+\vartheta} \exp(-\frac{\vartheta}{E[X](1+\vartheta)}u).\end{aligned}$$

□

Rozkłady lekkoogonowe- model Cramera-Lundberga

W modelu z czasem ciągłym przydatny będzie również współczynnik dopasowania, zdefiniowany jednak inaczej niż w modelu z czasem dyskretnym. Dodatnie rozwiązanie równania

$$M_X(r) = \frac{c}{\lambda}r + 1,$$

nazywamy współczynnikiem dopasowania w modelu ciągłym i oznaczamy $\tilde{R} := \tilde{R}(X, \lambda, c)$.

Przykład 4.2.5 Dla $X \sim \text{Exp}(1/E[X])$, równanie definiujące przyjmuje postać

$$\frac{1}{1 - E[X]r} = \frac{c}{\lambda}r + 1,$$

co prowadzi do

$$\tilde{R}(\text{Exp}(1/E[X]), \lambda, c) = p/E[X],$$

dla $p = (1 - \lambda E[X])/c$. W języku narzutu otrzymujemy

$$\tilde{R}(\text{Exp}(1/E[X]), \lambda, c) = \frac{\vartheta}{E[X](1+\vartheta)}.$$

□

Porównując wzory na $\tilde{R} = \tilde{R}(\text{Exp}(1/E[X]), \lambda, c)$ z wzorami na prawdopodobieństwo ruiny dla szkód o rozkładach wykładniczych z poprzedniego przykładu widać, że możemy napisać krótko, w języku współczynnika dopasowania, że w tym przypadku

$$\psi(u) = (1 - E[X]\tilde{R}) \exp(-\tilde{R}u).$$

Widzimy, z tych wzorów, że prawdopodobieństwo ruiny w przypadku szkód o rozkładach wykładniczych zależy od wielkości narzutu i wartości średniej szkody. Prawdopodobieństwo ruiny nie zmienia się w takim modelu przy jednoczesnym proporcjonalnym zwiększeniu intensywności nadchodzenia szkód i intensywności pobierania składek.

Dla rozkładów innych niż wykładniczy, wyliczenie prawdopodobieństwa ruiny jest kłopotliwe. Dla rozkładów lekkoogonowych można jednakże wyznaczyć jego granicę przy $u \rightarrow \infty$.

Twierdzenie 4.2.6 *Jeśli istnieje skończony współczynnik dopasowania dla rozkładu szkód w modelu ciągłym $\tilde{R} = \tilde{R}(X, \lambda, c)$, oraz $M'_X(\tilde{R}) < \infty$, to*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) \exp(\tilde{R}u) = \frac{p}{M'_X(\tilde{R})(\lambda/c) - 1},$$

gdzie $p = 1 - \lambda E[X]/c$.

Dla dużych wartości kapitału początkowego można prawdopodobieństwo ruiny przybliżyć następująco:

$$\psi(u) \approx \exp(-\tilde{R}u) \frac{p}{M'_X(\tilde{R})(\lambda/c) - 1}.$$

Dowód: Wychodząc od równania

$$\psi(u) = q(1 - \tilde{F}_X(u)) + q\psi * \tilde{F}_X(u),$$

mnożymy je obustronnie przez $\exp(\tilde{R}u)$, otrzymując

$$\begin{aligned} \psi(u) \exp(\tilde{R}u) &= q(1 - \tilde{F}_X(u)) \exp(\tilde{R}u) \\ &\quad + \int_0^u \psi(u-x) \exp(\tilde{R}(u-x)) \frac{\lambda}{c} (1 - F_X(x)) \exp(\tilde{R}x) dx, \end{aligned}$$

czyli traktując $\frac{\lambda}{c} (1 - F_X(x)) \exp(\tilde{R}x)$ jako gęstość dystrybucyjną powiedzmy F , oraz przyjmując $Z(u) = \psi(u) \exp(\tilde{R}u)$, $z(u) = q(1 - \tilde{F}_X(u)) \exp(\tilde{R}u)$, widzimy, że jest to równanie typu odnowy

$$Z(u) = z(u) + Z * F(u). \tag{4.2.3}$$

Z twierdzenia 4.1.7 otrzymujemy więc

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) \exp(\tilde{R}u) = \frac{\int_0^\infty q(1 - \tilde{F}_X(u)) \exp(\tilde{R}u) du}{\int_0^\infty 1 - F(x) dx}.$$

Pozostaje wyliczyć wartości całek pojawiających się w granicy,

$$\int_0^\infty q(1 - \tilde{F}_X(u)) \exp(\tilde{R}u) du = p/\tilde{R},$$

$$\int_0^\infty 1 - F(x) dx = \frac{M'_X(\tilde{R})(\lambda/c) - 1}{\tilde{R}},$$

co wynika natychmiast z całkownia przez części. $\square$

Dla dowolnych wartości u można podać ograniczenie górne i ograniczenie dolne na $\psi(u)$ jeśli założymy lekkoogonowość rozkładu wielkości szkód.

Twierdzenie 4.2.7 *Jeśli istnieje skończony współczynnik dopasowania dla rozkładu szkód w modelu ciągłym $\tilde{R} = \tilde{R}(X, \lambda, c) < \infty$, to*

$$a_- \exp(-\tilde{R}u) \leq \psi(u) \leq a_+ \exp(-\tilde{R}u),$$

gdzie

$$a_+ = \sup_{x \geq 0} \frac{z(x)}{1 - F(x)},$$

$$a_- = \inf_{x \geq 0} \frac{z(x)}{1 - F(x)},$$

dla funkcji z i F zdefiniowanych w równaniu (4.2.3).

4.3 Prawdopodobieństwo ruiny dla rozkładów fazowych

Przypomnijmy, że zmienna losowa ma rozkład fazowy $PH(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, n)$, jeżeli $\bar{F}(x) = P(X > x) = \mathbf{p} \exp(\mathbf{Q}x) \mathbf{e}$, gdzie $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ jest wektorem liczb nieujemnych sumujących się do 1, $\mathbf{Q}$ jest macierzą $n \times n$, w której poza przekątną są liczby dodatnie, a na przekątnej są wartości ujemne takie, że suma w wierszach macierzy jest mniejsza lub równa zero, $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)'$, $\exp(\mathbf{Q})$ oznacza tzw. eksponens macierzowy, $\exp(\mathbf{Q}) := \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2/2 + \dots + \mathbf{Q}^n/n! + \dots$, gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową.

Dla rozkładu fazowego dystrybuanta resztowa F_e jest też fazowa i ma reprezentację: $PH(\mathbf{r}, \mathbf{Q}, n)$, gdzie $\mathbf{r} = -\mathbf{p}\mathbf{Q}^{-1}/E[X]$ i $E[X]$ wylicza się ze wzoru

$$E[X] = -n!\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}.$$

Jeżeli teraz dla zadanego ciągu szkód $(X_i)_{i \geq 1}$ o dystrybuancie fazowej F_X , rozważymy ciąg $(Y_i)_{i \geq 1}$ o dystrybuancie resztowej $\tilde{F}_X$, to złożony rozkład geometryczny

$\sum_{i=1}^T Y_i$ jest znowu fazowy z parametrami $(\rho \mathbf{r}, \mathbf{Q} + \mathbf{t}_0 \mathbf{r} \rho, n)$, gdzie $\mathbf{t}_0 = -\mathbf{Q} \mathbf{e}$. Funkcja ψ ma więc postać

$$\psi(u) = \rho \mathbf{r} \exp((\mathbf{Q} + \mathbf{t}_0 \mathbf{r} \rho)x) \mathbf{e}. \quad (4.3.1)$$

Przykład 4.3.1 Rozkład wykładniczego $Exp(\mu)$ jest fazowy z parametrami $\mathbf{p} = 1$, $\mathbf{Q} = [-1/\mu]$, $n = 1$. Wtedy $\mathbf{r} = 1$ i rozkład resztowy jest też wykładniczy. Wyliczając $\psi(u)$ ze wzoru (4.3.1) dostajemy $\psi(u) = \rho \exp(-x/(1 - \rho)/\mu)$.

□

W ogólnym przypadku rozkładów fazowych, dla zadanych wartości x powyższy wzór wyliczamy numerycznie.

Przykład 4.3.2 Niech $\mathbf{p} = (1/4, 1/8, 1/8, 1/4)$ i

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Wtedy

$$\bar{F}_X(x) = 1/4 \exp(-x) + 1/8 \exp(-2x) + 1/8 \exp(-3x) + 1/4 \exp(-4x)$$

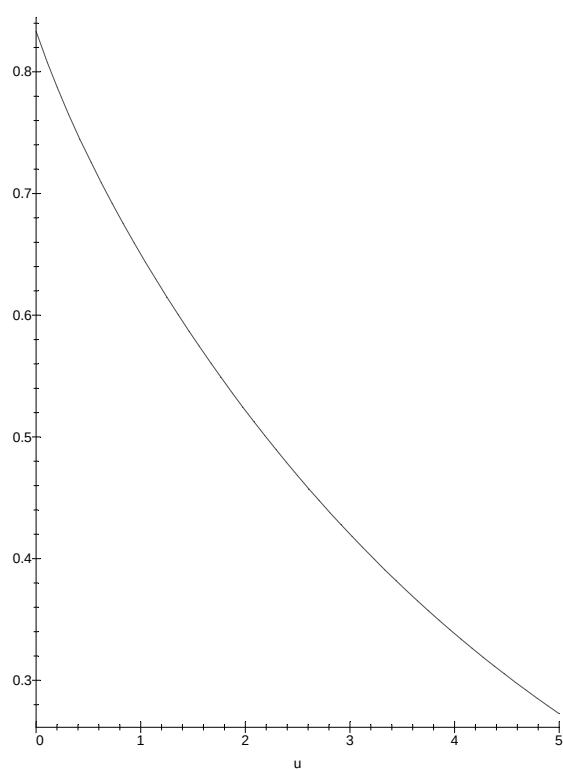
jest mieszkanką rozkładów wykładniczych. Rozkład resztowy dany jest wzorem

$$\bar{F}_X(x) = 3/5 \exp(-x) + 3/20 \exp(-2x) + 1/10 \exp(-3x) + 3/20 \exp(-4x).$$

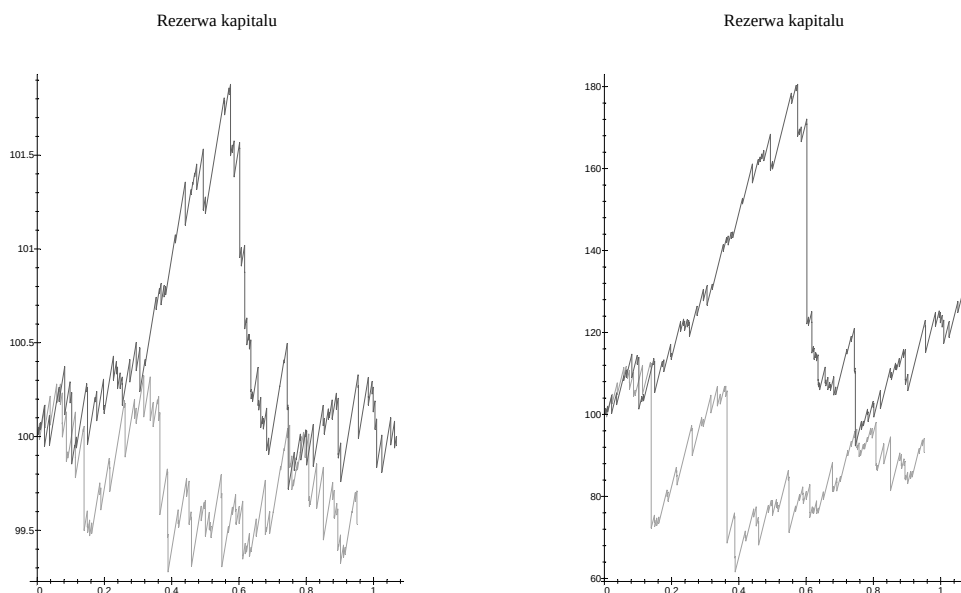
Funkcja ψ nie ma już tak ładnej postaci, można ją jednak łatwo wyrysować lub podać konkretne wartości. Na przykład $\psi(10) = 0.095$ ¹.

□

¹Plik ruina-ciagla-1.mws



Rysunek 4.3.1:



Rysunek 4.4.1: Trajektorie procesu ryzyka

4.4 Prawdopodobieństwo ruiny dla rozkładów ciężkoogonowych

Ze wzoru (4.3.1) wynika, że w przypadku rozkładów fazowych funkcja prawdopodobieństwa ruiny maleje wykładniczo. Podobnie wygląda to w przypadku wszystkich rozkładów, dla których istnieje współczynnik dopasowania, zdefiniowany w Rozdziale 3.1.1. Przypomnijmy jednak, że dla rozkładów ciężkoogonowych nie istnieje funkcja tworząca momenty, nie istnieje więc współczynnik dopasowania. W takich przypadkach jesteśmy w stanie jednak otrzymać asymptotykę prawdopodobieństwa ruiny.

Przed podaniem twierdzenia, przyjrzyjmy się najpierw trajektoriom procesu ryzyka dla dwóch modeli.

Lewy rysunek przedstawia proces ryzyka, gdzie szkody mają rozkład wykładniczy, prawy rysunek - szkody Pareto z $\alpha = 2$, a więc z nieskończoną wariancją. Widzimy ogólną tendencję 'do góry', co jest zagwarantowane przez $\rho < 1$. Na lewym rysunku trajektorie mają lokalnie tendencję w dół poprzez nagromadzenie małych szkód, na

prawym - poprzez jedną dużą szkodę².

Jak należy się więc spodziewać, funkcja prawdopodobieństwa ruiny dla szkód ciężkoogonowych będzie zachowywała się inaczej niż dla fazowych. W następującym twierdzeniu użyjemy klasę rozkładów $\mathcal{S}^*$, wprowadzoną w Rozdziale 5.3.1.

Twierdzenie 4.4.1 *Jeżeli $F \in \mathcal{S}^*$, to*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}_e(u)} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Dowód: Podamy najpierw bez dowodu dwa lematy techniczne.

Lemat 4.4.2 *Jeżeli $F_e \in \mathcal{S}$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $D > 0$ takie, że dla każdego $n \geq 2$,*

$$\frac{\overline{F}_e^{*n}(u)}{\overline{F}_e(u)} \leq D(1 + \varepsilon)^n, \quad x \geq 0. \quad (4.4.1)$$

Lemat 4.4.3 *Niech $\overline{G}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \overline{H}^{*n}(u)$, (p_n) jest rozkładem prawdopodobieństwa, $H \in \mathcal{S}$. Jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1 + \varepsilon)^n < \infty$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, to*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(u)}{\overline{H}(u)} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n.$$

Ze wzoru (??) dostajemy

$$\psi(u) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P\left(\sum_{i=1}^n Y_i > x\right) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \overline{F}^{*n}(u).$$

Położmy $p_n = \rho^n$ i weźmy $\varepsilon > 0$ tak, by $\rho(1 + \varepsilon) < 1$. Stąd $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1 + \varepsilon)^n < \infty$.

Z faktu, że $F \in \mathcal{S}^*$ mamy $F_e \in \mathcal{S}$, a więc korzystając z Lematu 4.4.2, istnieje $D > 0$ takie, że (4.4.1) jest prawdziwe. Z Lematu 4.4.3 mamy

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}_e(u)} = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = (1 - \rho) \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

□

²Plik ruina-ciągła-2.mws

4.5 Funkcje Copula

Bieżący rozdział jest oparty głównie na publikacji T. Schmidt’a [35] oraz R. Nelsena [31]. Przedstawione poniżej funkcje copula zostaną w kolejnych rozdziałach wykorzystane do opisu struktury zależności w modelach z zależnymi roszczeniami lub odstępami czasowymi.

4.5.1 Definicja i własności funkcji copula

Definicja 4.5.1 *Niech $d \geq 2$. Funkcja $C: R^d \rightarrow R$ nazywana jest **funkcją copula**, gdy jest d -wymiarową dystrybuantą o jednowymiarowych, brzegowych rozkładach jednostajnych na $(0,1)$.*

Twierdzenie 4.5.2 *(Sklar)*

Dla d wymiarowej dystrybuanty o ciągłych dystrybuantach brzegowych $F_1, \dots, F_d$ istnieje wyznaczona jednoznacznie funkcja copula C taka, że:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (4.5.1)$$

Odwrotnie, dla danej funkcji copula C i dystrybuant brzegowych $F_1, \dots, F_d$ wzór (4.5.1) definiuje d -wymiarową dystrybuantę F .

Podstawowe własności funkcji Copula $C(u) = C(u_1, \dots, u_d)$ to:

- 1) $C: R^d \rightarrow [0, 1]$, jest rosnąca po współrzędnych
- 2) Rozkład brzegowy u_i otrzymuje się przez podstawienie $u_j = 1$ dla wszystkich $j \neq i$

$$C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \quad u_i \in [0, 1]$$

- 3) Dla $a_i < b_i$ prawdopodobieństwo $P(U_1 \in [a_1, b_1], \dots, U_d \in [a_d, b_d])$ jest nieujemne, co prowadzi do nierówności:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{d,i_d}) \geq 0,$$

gdzie $u_{j,1} = a_j$ oraz $u_{j,2} = b_j$.

Z drugiej strony każda funkcja $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, która spełnia powyższe własności jest funkcją copula. Ponadto, mając d -wymiarową funkcję copula $C(u_1, \dots, u_d)$, $C(1, u_1, \dots, u_{d-1})$ jest również funkcją copula.

Hoeffding i Frechet niezależnie dowiedli, że funkcja copula zawsze leży pomiędzy określonymi granicami. Powodem tego jest istnienie skrajnych przypadków zależności. Pierwszy przypadek takiej skrajnej zależności to doskonała dodatnia zależność zmiennych (comonotonic). Wówczas funkcję copula podaje wzór:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \min(u_1, \dots, u_d).$$

W przypadku niezależnych zmiennych losowych funkcja copula to:

$$C(u_1, \dots, u_d) = u_1 \cdot \dots \cdot u_d. \quad (4.5.2)$$

Bezpośrednio z twierdzenia Sklar'a otrzymujemy, że zmienne losowe są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy ich funkcja copula, to opisana wzorem (4.5.2), funkcja copula niezależności.

Jednakże, niezależność jest tylko etapem pośrednim od doskonałej dodatniej zależności do doskonałej ujemnej zależności (countermonotonic), dla której funkcję copula dla dwóch zmiennych losowych, tj. w przypadku $U_1 = 1 - U_2$, przedstawia wzór:

$$C(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} \quad (4.5.3)$$

W całej ogólności, nie istnieje taka funkcja copula dla trzech zmiennych, ponieważ równość $U_1 = 1 - U_2$ nakłada pewne ograniczenia na zmienną losową U_3 tzn. jeśli $U_3 = 1 - U_2$, to $U_3 = U_1$, a jeśli $U_3 = 1 - U_1$, to $U_3 = U_2$. Z drugiej strony, nawet jeśli taka funkcja copula nie istnieje to wynikające z niej ograniczenia nadal obowiązują, mianowicie:

Twierdzenie 4.5.3 (*ograniczenia Frechet-Hoeffding*)

Rozważmy funkcje copula $C(u_1, \dots, u_d)$. Wtedy:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0\right\} \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\}. \quad (4.5.4)$$

W analogiczny sposób, w jaki funkcja copula wiąże dystrybuantę łączną z jej dystrybuantami brzegowymi, można opisać związek pomiędzy funkcjami przeżycia:

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_d) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d)) \quad (4.5.5)$$

gdzie $\bar{F}(x_1, \dots, x_d)$ to łączna funkcja przeżycia opisana wzorem:

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_d) = P(X_1 > x_1, \dots, X_d > x_d)$$

natomiast $\bar{F}_i(x_i)$, dla $i = 1, \dots, d$, to funkcje brzegowe:

$$\bar{F}_i(x_i) = \bar{F}(-\infty, \dots, x_i, \dots, -\infty)$$

Funkcja $\hat{C}$ również jest funkcją copula, zwaną funkcją copula przeżycia (ang. survival copula). Funkcje C i $\hat{C}$ wiąże równość:

$$\hat{C}(u_1, \dots, u_d) = u_1 + \dots + u_d - 1 + C(1 - u_1, \dots, 1 - u_d). \quad (4.5.6)$$

4.5.2 Funkcje copula Archimedesesa

Bardzo ważną klasą kopuł są, tak zwane, kopuły Archimedesesa. Charakteryzują się one dużą różnorodnością oraz łatwością, z jaką mogą być konstruowane.

Definicja 4.5.4 Niech $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ będzie ciągłą, ściśle malejącą funkcją taką, że $\varphi(1) = 0$. Funkcją pseudo-odwrotną do φ jest funkcja $\varphi^{[-1]}$, zdefiniowana wzorem:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (4.5.7)$$

Funkcja $\varphi^{[-1]}$ jest ciągła i nierosnąca na przedziale $[0, \infty]$, oraz ściśle malejąca na przedziale $[0, \varphi(0)]$. Poza tym, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ na przedziale $[0, 1]$, oraz:

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)). \end{aligned}$$

W końcu, jeśli $\varphi(0) = \infty$, to $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Celem prezentacji kolejnego lematu wprowadzamy definicję funkcji całkowicie monotonicznych:

Definicja 4.5.5 Funkcja f jest całkowicie monotoniczna na przedziale J , jeżeli jest na tym przedziale ciągła i posiada pochodne $f^{(n)}$ wszystkich rzędów spełniające nierówność:

$$(-1)^n f^{(n)}(\lambda) \geq 0, \quad (4.5.8)$$

dla każdego λ należącego do wnętrza przedziału J oraz $n=0,1,2,\dots$.

Lemat 4.5.1 Niech $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ będzie ciągłą, ściśle malejącą funkcją taką, że $\varphi(1) = 0$ oraz niech $\varphi^{[-1]}$ będzie funkcją pseudo-odwrotną do φ zdefiniowaną przez (4.5.7). Funkcja $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ postaci:

$$C(u) = \varphi^{[-1]} \left(\sum_{i=1}^d \varphi(u_i) \right) \quad (4.5.9)$$

jest funkcją copula wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\varphi^{[-1]}$ jest całkowicie monotoniczna na przedziale $[0, \infty)$.

Konsekwencją (4.5.8) jest, że jeśli $\varphi^{[-1]}$ jest funkcją całkowicie monotoniczną oraz $\varphi^{[-1]}(c) = 0$ dla skończonego $c > 0$, wtedy $\varphi^{[-1]}$ jest tożsamościowo równa 0. Zatem funkcja $\varphi^{[-1]}$ musi być dodatnia na przedziale $[0, \infty)$, co z kolei oznacza, że zachodzi równość $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Funkcje copula postaci (4.5.9) są nazywane funkcjami copula Archimedeses. Natomiast funkcja φ jest zwana generatorem funkcji copula.

Przykład 4.5.1 Funkcja Copula Gumbell'a jest szczególną funkcją Archimedeses, uzyskaną dla generatora $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$:

$$C_\theta^{Gumbel}(u_1, \dots, u_d) = \exp[-((-\ln u_1)^\theta + \dots + (-\ln u_d)^\theta)^{1/\theta}] \quad (4.5.10)$$

gdzie $\theta \in [1, \infty)$. Dla $\theta = 1$ otrzymujemy funkcję copula niezależności. Natomiast dla $\theta \rightarrow \infty$ szukana funkcja jest zbieżna do funkcji copula doskonale dodatnio zależnej, tak więc funkcja Copula Gumbell'a jest funkcją copula albo niezależności, albo doskonałej dodatniej zależności.

Zgodnie z wzorem (4.5.6) funkcja copula przeżycia w tym przypadku to:

$$\hat{C}(u_1, \dots, u_d) = u_1 + \dots + u_d - 1 + \exp[-((-\ln(1 - u_1))^\theta + \dots + (-\ln(1 - u_d))^\theta)^{1/\theta}].$$

Przykład 4.5.2 Funkcja Claytona również należy do rodzin funkcji copula Archimedeses, otrzymujemy ją przez podstawienie $\varphi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$:

$$C_\theta^{Clayton}(u_1, \dots, u_d) = (\max\{u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - 1, 0\})^{-1/\theta} \quad (4.5.11)$$

gdzie $\theta \in (0, \infty)$. Dla $\theta \rightarrow 0$, otrzymujemy funkcję copula niezależności, a dla $\theta \rightarrow \infty$ copula Clayton'a zmierza do funkcji copula doskonale dodatnio skorelowanej. Dla $\theta = -1$ otrzymujemy ograniczenie z dołu Frechet-Hoeffding'a. Podsumowując, tak jak funkcja copula Gumbell'a, copula Clayton'a interpoluje wśród struktur zależności takich jak: niezależność oraz doskonała dodatnia zależność.

Funkcja copula przeżycia wyliczona dla omawianego przykładu z wzoru (4.5.6) to:

$$\hat{C}(u_1, \dots, u_d) = u_1 + \dots + u_d - 1 + (\max\{(1 - u_1)^{-\theta} + \dots + (1 - u_d)^{-\theta} - 1, 0\})^{-1/\theta}.$$

4.6 Model zrandomizowany

Rozważmy teraz klasyczny model ryzyka (??) z wykładniczymi wielkościami roszczeń, dla których, dla każdego n , spełniona jest równość:

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n | \Theta = \theta) = \prod_{k=1}^n e^{-\theta x_k}, \quad (4.6.1)$$

gdzie Θ to dodatnia zmienna losowa. Wyliczając rozkład brzegowy X_k okazuje się, że nie jest on wykładniczy, a wielkości roszczeń są zależne. Pokażmy to na przykładzie.

Przykład 4.6.1 Weźmy dwuwymiarowy wektor losowy $X = (X_1, X_2)$ oraz zmienną losową Θ o rozkładzie

$$F_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[1, \infty)}(\theta) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[2, \infty)}(\theta)$$

Z wcześniejszych rozważań mamy równość:

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2 | \Theta = \theta) = \prod_{k=1}^n e^{-\theta x_k} = e^{-\theta(x_1+x_2)}$$

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \int_0^{\infty} \exp^{-\theta(x_1+x_2)} dF_{\Theta}(\theta)$$

Liczymy rozkład brzegowy X_1 . Najprościej będzie skorzystać z rozkładu łącznego wykluczając z niego wpływ zmiennej X_2 , co osiągniemy przez podstawienie $x_2 = 0$:

$$P(X_1 > x_1, X_2 > 0) = P(X_1 > x_1) = \int_0^{\infty} \exp^{-\theta(x_1+0)} dF_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2} \exp^{-x_1} + \frac{1}{2} \exp^{-2x_1}$$

Analogicznie dla X_2 :

$$P(X_1 > 0, X_2 > x_2) = P(X_2 > x_2) = \int_0^{\infty} \exp^{-\theta(0+x_2)} dF_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2} \exp^{-x_2} + \frac{1}{2} \exp^{-2x_2}$$

Sprawdzamy niezależność:

$$\begin{aligned} P(X_1 > x_1)P(X_2 > x_2) &= \left(\frac{1}{2} \exp^{-x_1} + \frac{1}{2} \exp^{-2x_1}\right) \left(\frac{1}{2} \exp^{-x_2} + \frac{1}{2} \exp^{-2x_2}\right) = \\ &= \frac{1}{4} \exp^{-x_1-x_2} + \frac{1}{4} \exp^{-x_1-2x_2} + \frac{1}{4} \exp^{-2x_1-x_2} + \frac{1}{4} \exp^{-2x_1-2x_2} \end{aligned}$$

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \int_0^\infty \exp^{-\theta(x_1+x_2)} dF_\Theta(\theta) = \frac{1}{2} \exp^{-x_1-x_2} + \frac{1}{2} \exp^{-2x_1-2x_2}$$

Iloczyn brzegowych rozkładów i rozkład łączny są różne, co świadczy o tym, że zmienne X_1 i X_2 nie są niezależne. Rozkłady brzegowe nie są wykładnicze, ale są mieszanymi rozkładów wykładniczych.

Kolejnym krokiem jest przedstawienie wzoru na prawdopodobieństwo ruiny dla modelu z zależnymi ryzykami. W tym celu przypomnę wzór na prawdopodobieństwo ruiny (??) w klasycznym modelu z wykładniczymi wielkościami roszczeń $Exp(\theta)$, który został wyprowadzony w przykładzie (1.1):

$$\psi_\theta(u) = \min\left\{\frac{\lambda}{\theta c} \exp\left\{-\left(\theta - \frac{\lambda}{c}\right)u\right\}, 1\right\}, u \geq 0. \quad (4.6.2)$$

Wówczas, po uwzględnieniu zmiennej θ , prawdopodobieństwo ruiny dla modelu zależności dane jest wzorem:

$$\psi(u) = \int_0^\infty \psi_\theta(u) dF_\Theta(\theta). \quad (4.6.3)$$

Dla $\theta \leq \theta_0 = \frac{\lambda}{c}$, złamany jest wspomniany warunek zysku netto, mówiący, że składka c zebrana w jednostce czasu musi być większa niż średnia wypłaconych szkód. Oznacza to, że dla $\theta \leq \theta_0 = \frac{\lambda}{c}$ pojawienie się ruiny jest pewne tzn. $\psi_\theta(u) = 1$, dla wszystkich $u \geq 0$, dlatego wzór ogólny na prawdopodobieństwo ruiny można zastąpić przez:

$$\psi(u) = F_\Theta(\theta_0) + \int_{\theta_0}^\infty \psi_\theta(u) dF_\Theta(\theta). \quad (4.6.4)$$

Bezpośrednią konsekwencją jest:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = F_\Theta(\theta_0) \quad (4.6.5)$$

co jest dodatnie, gdy zmienna losowa Θ ma dodatnią masę prawdopodobieństwa na poziomie $\theta = \frac{\lambda}{c}$ lub poniżej.

Twierdzenie 4.6.1 *Model ryzyka z zależnymi wielkościami szkód, spełniający równanie (4.6.1), można opisać za pomocą wektora szkód $(X_1, X_2, \dots)$ o całkowicie monotonicznych brzegowych rozkładach roszczeń zmiennych $X_1, X_2, \dots$ takiego, że odpowiednie funkcje copula przeżycia są funkcjami Archimedesów z generatorem $\varphi = (\mathcal{L}(F_\Theta))^{-1}$, gdzie $\mathcal{L}(F_\Theta)$ oznacza transformatę Laplace-Stieltjesa F_Θ , a potęgą (-1) funkcję odwrotną.*

Dowód: Powołując się na wzór (4.6.1), łączny rozkład $X_1, \dots, X_n$ możemy zapisać jako:

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) = \int_0^\infty e^{-\theta(x_1 + \dots + x_n)} dF_\Theta(\theta) = \mathcal{L}(F_\Theta)(x_1 + \dots + x_n). \quad (4.6.6)$$

Na podstawie twierdzenia Sklara (tw. 2.2) oraz wzoru dla kopuł przeżycia (4.5.5), dla każdej wielowymiarowej dystrybuanty z rozkładami brzegowymi $F_1, \dots, F_n$ istnieje kopuła przeżycia $\hat{C}$ taka, że:

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) = \hat{C}(\bar{F}_{X_1}(x_1), \dots, \bar{F}_{X_n}(x_n))$$

gdzie $\bar{F}_X(x_i) = 1 - F_X(x_i)$ to ogon dystrybuanty rozkładu brzegowego X_i . W omawianym przykładzie X_i , $i = 1, \dots, n$ mają takie same rozkłady. Jeśli kopuła jest funkcją Archimedesesa z generatorem φ wtedy powyższy wzór możemy wyrazić jako: $\hat{C}(\bar{F}_X(x_1), \dots, \bar{F}_X(x_n)) = \varphi^{-1}(\varphi(\bar{F}_X(x_1)) + \dots + \varphi(\bar{F}_X(x_n)))$, gdzie

$$\bar{F}_X(x_i) = \int_0^\infty e^{-\theta x_i} dF_\Theta(\theta) = \mathcal{L}(F_\Theta)(x_i), \quad i = 1 \dots n, \quad (4.6.7)$$

co dokładnie pasuje do (4.6.6), gdy generator $\varphi(t) = (\mathcal{L}(F_\Theta))^{-1}(t)$. Zauważmy, że φ jako odwrotna transformata Laplace'a dystrybuanty jest funkcją ciągłą, ściśle malejącą z $[0, 1]$ do $[0, \infty]$, dla której $\varphi(0) = \infty$ i $\varphi(1) = 0$ i φ^{-1} jest całkowicie monotoniczna, więc zgodnie z lematem 4.5.1 funkcja copuła Archimedesesa jest dobrze określona dla każdego n . Z równości (4.6.7) widzimy, że zmienne losowe X_i muszą być całkowicie monotoniczne.

Uwaga

Powyższą zmianę konstrukcji można zobrazować jako pobieranie próbek θ z Θ według F_Θ , a następnie poprowadzenie trajektorii dla niezależnego modelu ryzyka z parametrem θ . Tak, więc zależność zostaje wprowadzana poprzez realizację modelu dla wszystkich możliwych wartości θ . Odpowiednio, otrzymana zależność będzie tym silniejsza im bardziej dystrybucja Θ będzie rozrzucona. Taka zmiana w budowie modelu jest tylko narzędziem do określenia wzoru na prawdopodobieństwo ruiny, natomiast nie jest konieczna do stworzenia modelu zależności. Kolejno można równoważnie pójść w dwie strony: dla każdego modelu ryzyka z całkowicie monotonicznymi wielkościami roszczeń - zmiennymi losowymi X_i , oraz dla dodatniej zmiennej losowej Θ zachodzi równość (4.6.7). Wówczas wzór (4.6.2) odnosi się do struktury zależności opisanej za pomocą kopuły Archimedesesa z generatorem $\varphi = (\mathcal{L}(F_\Theta))^{-1}$. Alternatywnie można zacząć od określenia kopuły Archimedesesa przez jej generator, wówczas powyższe równania dadzą rozkład brzegowy, dla którego jawny wzór (4.6.2) zachodzi.

Poniżej znajduje się kilka szczegółowych przykładów modeli zależnych.

4.7 Przykłady modeli z zależnymi wielkościami roszczeń

4.7.1 Roszczenia o rozkładzie Pareto z funkcją Copula Claytona

Rozważmy model zrandomizowany z wykładniczymi wielkościami roszczeń (4.6.1) oraz z parametrem Θ o rozkładzie $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ z gęstością:

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \quad \theta > 0$$

Otrzymany wówczas rozkład łączny wielkości roszczeń to:

$$P(X_1 > x_n, \dots, X_n > x_n) = \int_0^{\infty} e^{-\theta(x_1 + \dots + x_n)} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta,$$

co wynika bezpośrednio z:

$$P(X_1 > x_n, \dots, X_n > x_n | \Theta = \theta) = e^{-\theta(x_1 + \dots + x_n)}.$$

Na podstawie twierdzenia (3.1) strukturę zależności rozważanego modelu można przedstawić za pomocą rozkładów brzegowych oraz funkcji copula przeżycia Archimedes'a z generatorem:

$$\varphi(t) = (\mathcal{L}(F_{\Theta}))^{-1}(t)$$

W tym celu obliczamy rozkład brzegowy wielkości roszczeń X_k , zgodnie ze wzorem (4.6.7):

$$\bar{F}_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-\theta x} f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} e^{-\theta x} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta = \left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^{\alpha}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{(x+\beta)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\theta(x+\beta)} d\theta = \left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^{\alpha} = \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}, \quad x \geq 0$$

Wyrażenie pod całką $\frac{(x+\beta)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\theta(x+\beta)}$ jest gęstością zmiennej θ z rozkładem Gamma z parametrami α oraz $x + \beta$, co na przedziale $(0, \infty)$ całkuje się do 1.

Otrzymany rozkład brzegowy X_k dla $k = 1, \dots, n$ to rozkład $\text{Pareto}(\alpha, \beta)$. Mając dany rozkład brzegowy, na podstawie wzoru (4.6.7) z dowodu twierdzenia (3.1), można obliczyć generator funkcji copula Archimedes'a:

$$\varphi(t) = (\mathcal{L}(F_{\Theta}))^{-1}(t) = (\bar{F}_X)^{-1}(t) = t^{-1/\alpha} - 1.$$

Kopuła Archimedesowa z takim generatorem φ , opisana w przykładzie (2.2), jest kopułą Claytona z parametrem α . Z równości (4.6.4) wynika dla tego modelu, że:

$$\psi(u) = F_{\Theta}(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\infty} \frac{\lambda}{\theta c} e^{-(\theta - \frac{\lambda}{c})u} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta.$$

Na początek obliczymy $F_{\Theta}(\theta_0)$ poprzez oszacowanie ogonu dystrybucji zmiennej Θ w punkcie θ_0 i wykorzystanie prawdopodobieństwa przeciwnego :

$$\bar{F}_{\Theta}(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_{\theta_0}^{\infty} (\beta\theta)^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta = \left[\begin{array}{ll} t & := \beta\theta \\ dt & := \beta d\theta \\ \frac{1}{\beta} dt & := d\theta \end{array} \right] =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\beta\theta_0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha, \beta\theta_0)}{\Gamma(\alpha)}$$

Czyli:

$$F_{\Theta}(\theta_0) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha, \beta\theta_0)}{\Gamma(\alpha)}$$

gdzie $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega} d\omega$ jest niekompletną funkcją Gamma.

Pozostaje obliczyć drugą część tj. całkę ze wzoru na prawdopodobieństwo ruiny, pamiętając z wcześniejszych rozważań, że $\theta_0 = \frac{\lambda}{c}$:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\infty} \frac{\lambda}{\theta c} e^{-(\theta - \frac{\lambda}{c})u} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta &= \frac{\theta_0 e^{\theta_0 u} \beta}{\Gamma(\alpha)} \int_{\theta_0}^{\infty} \beta^{\alpha-1} \theta^{\alpha-2} e^{-\theta(u+\beta)} d\theta = \\ \frac{\theta_0 e^{\theta_0 u} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(u+\beta)^{\alpha-2}} \int_{\theta_0}^{\infty} (\theta(\beta+u))^{\alpha-2} e^{-\theta(u+\beta)} d\theta &= \left[\begin{array}{ll} t & := \theta(\beta+u) \\ dt & := (\beta+u)d\theta \\ \frac{1}{(\beta+u)} dt & := d\theta \end{array} \right] = \\ \frac{\theta_0 e^{\theta_0 u} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(u+\beta)^{\alpha-1}} \int_{(\beta+u)\theta_0}^{\infty} t^{\alpha-2} e^{-t} dt &= \theta_0 e^{\theta_0 u} \beta \left(1 + \frac{u}{\beta}\right)^{-(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\alpha-1, (\beta+u)\theta_0)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Ostateczny wzór na prawdopodobieństwo ruiny dla danego przykładu to:

$$\psi(u) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha, \beta\theta_0)}{\Gamma(\alpha)} + \theta_0 e^{\theta_0 u} \beta \left(1 + \frac{u}{\beta}\right)^{-(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\alpha-1, (\beta+u)\theta_0)}{\Gamma(\alpha)}.$$

W szczególności, z (4.6.5) wynika:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha, \frac{\beta\lambda}{c})}{\Gamma(\alpha)} \quad (4.7.1)$$

Wreszcie dla kapitału początkowego $u=0$ otrzymujemy prosty wzór:

$$\psi(0) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha, \beta\theta_0)}{\Gamma(\alpha)} + \beta\theta_0 \frac{\Gamma(\alpha - 1, \beta\theta_0)}{\Gamma(\alpha)}$$

Warto podjąć próbę porównania wyników wzoru na prawdopodobieństwo ruiny dla modelu niezależnego i dla modelu z zależnymi ryzykami. Dlatego w celu porównania, dla obu przypadków założymy $\lambda = c = 1$ oraz, że wartości oczekiwane wielkość roszczeń będą równe. Rozkład brzegowy w niezależnym modelu to zwykły rozkład wykładniczy z wartości oczekiwaną $E[X] = 1/\theta$. Z kolei rozkład brzegowy wielkości roszczeń w modelu zależnym to rozkład $Pareto(\alpha, \beta)$. Wartość oczekiwana zmiennej z rozkładu $Pareto(\alpha, \beta)$ to $E[X] = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$. Tak, więc szukana równość to: $\frac{1}{\theta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$. Dodatkowe ograniczenia narzuca warunek składki netto, tj. $E[X] < \frac{c}{\lambda}$, czyli przy omówionych założeniach: $E[X] < 1$. Dla modelu niezależnego warunek jest spełniony, gdy $\theta > 1$, a dla zależnego, gdy $\beta < \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Po rozważeniu ograniczeń można zaproponować odpowiednie parametry np.: $\theta = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = \frac{1}{3}$.

Kolejno zostaną obliczone wzory na prawdopodobieństwo ruiny dla modelu niezależnego i z zależnościami.

Prawdopodobieństwo ruiny w modelu niezależnym:

$$\psi(u) = \min\{\frac{1}{2}\exp\{-u\}, 1\}$$

Prawdopodobieństwo ruiny w modelu z zależnymi wielkościami roszczeń:

$$\psi(u) = 1 - \frac{\Gamma(3, \frac{1}{3})}{\Gamma(3)} + e^u \frac{1}{3} (1 + 3u)^{-2} \frac{\Gamma(2, \frac{1}{3} + u)}{\Gamma(3)}$$

Wyniki obliczeń potrzebnych do ostatecznego wzoru, wykonane w Matlabie:

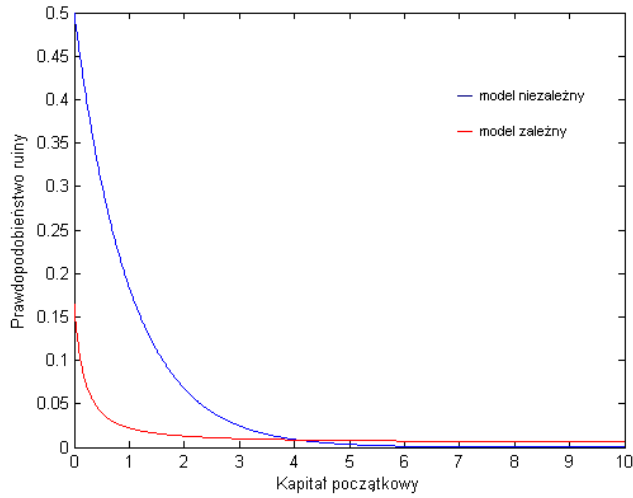
$$\Gamma(3) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$$

$$\Gamma(3, 1/3) = \int_{1/3}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{25}{9} e^{-1/3}$$

$$\Gamma(2, 1/3 + u) = (4/3 + u) e^{-(1/3+u)}$$

Prowadzi to do ostatecznego wzoru na prawdopodobieństwo ruiny w modelu zależnym:

$$\psi(u) = 1 - \frac{25}{18} e^{-1/3} + \frac{\frac{4}{3} + u}{6(1 + 3u)^2} e^{-1/3}$$



Z wykresu odczytujemy, że prawdopodobieństwo ruiny dla modelu niezależnego jest z początku dużo wyższe niż prawdopodobieństwo ruiny w modelu z zależnymi ryzykami, ale również szybciej maleje. Dla $u > 4$ prawdopodobieństwo ruiny dla modelu niezależnego jest już mniejsze. Przykładowo obliczę prawdopodobieństwa ruiny obu modeli dla $u=0$ oraz dla $u=5$:

Model niezależny:

$$\psi(0) = \min\left\{\frac{1}{2}, 1\right\} = 0,5$$

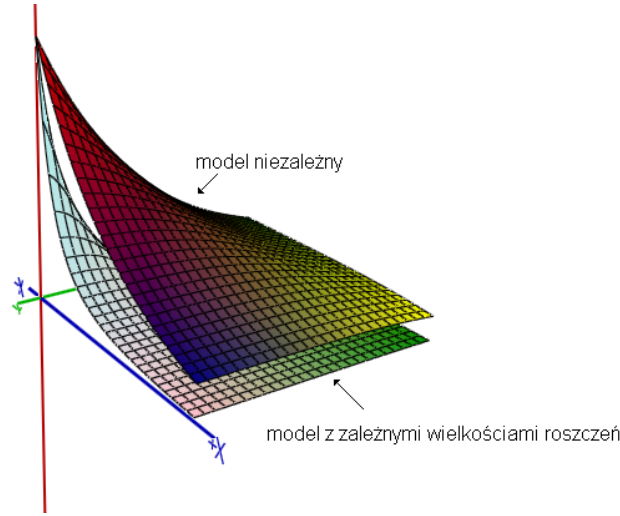
$$\psi(5) = \min\left\{\frac{1}{2}\exp\{-5\}, 1\right\} = 0,5 \cdot e^{-5} \approx 0,0035$$

Model zależny:

$$\psi(0) = 1 - \frac{25}{18}e^{-1/3} + \frac{4}{18}e^{-1/3} = 1 - \frac{21}{18}e^{-1/3} \approx 0,2$$

$$\psi(5) = 1 - \frac{25}{18}e^{-1/3} + \frac{\frac{4}{3} + 5}{6(1+15)^2}e^{-1/3} \approx 0,0077$$

Dla zerowego kapitału początkowego prawdopodobieństwo ruiny w modelu niezależnym jest dużo większe, ale dla $u = 5$ jest już nieznacznie mniejsze niż w modelu z zależnymi ryzykami. Poniżej został umieszczony wykres funkcji copuła przeżycia dla obu modeli, zgodnie z ustalonymi parametrami, dla dwóch zmiennych X i Y :



4.7.2 Roszczenia o rozkładzie Weibull'a z funkcją Copula Gumbel'a

Rozważmy kolejny model zależności. Tym razem zmienna losowa Θ pochodzi z rozkładu stabilnego (1/2) (zwanego również rozkładem Levy'ego) z gęstością:

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}\theta^3} e^{-\alpha^2/4\theta}, \quad \theta > 0$$

Otrzymany wówczas rozkład łączny wielkości roszczeń to:

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) = \int_0^{\infty} e^{-\theta(x_1 + \dots + x_n)} \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}\theta^3} e^{-\alpha^2/4\theta} d\theta$$

Analogicznie do poprzedniego przykładu zostanie obliczony rozkład brzegowy $\bar{F}_X(x)$ i generator funkcji copula, aby następnie skorzystać z twierdzenia 3.1. W celu otrzymania rozkładu brzegowego zmiennej X_1 , należy wykluczyć z rozkładu łącznego wpływ pozostałych zmiennych przez podstawienie $X_2 = \dots = X_n = 0$:

$$\bar{F}_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-\theta x} f_{\Theta}(\theta) d\theta = \exp\{-\alpha x^{1/2}\}, \quad x \geq 0.$$

Uzyskany rozkład brzegowy to rozkład Weibull'a z parametrem kształtu 1/2. Ponieważ $\mathcal{L}(F_{\Theta})(s) = \bar{F}_{\Theta}(s) = e^{-\alpha\sqrt{s}}$, to otrzymany generator $\varphi(t)$, jako funkcja odwrotna ogona dystrybucyjnego rozkładu wielkości roszczeń, ma wartość $(\mathcal{L}(F_{\Theta}))^{-1}(t) = (-\ln t)^2$ (dla wszystkich wartości α). Zgodnie z definicją dana kopuła Archimedesowa jest kopułą Gumbel'a (przykład 2.2), którą opisuje wzór:

$$C_2^{Gumbel}(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = \exp \left[- \left(\sum_{i=1}^d (-\ln(1 - e^{-\alpha\sqrt{x_i}}))^2 \right)^{1/2} \right].$$

Należy pamiętać, że rozkład brzegowy roszczeń zmienia się w zależności od wyboru α , natomiast kopuła pozostaje niezmienną. Z równości (4.6.5) otrzymujemy:

$$\psi(u) = F_{\Theta}(\lambda/c) + \int_{\lambda/c}^{\infty} \frac{\lambda}{\theta c} e^{-\theta u} e^{\lambda c/u} \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}\theta^3} e^{-\alpha^2/4\theta} d\theta,$$

co można też wyrazić za pomocą funkcji błędu

$$Erfc(z) = 1 - Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = 2\Phi(-z\sqrt{2})$$

jako:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= Erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda/c}}\right) + \frac{\lambda}{\alpha^2 c} e^{-\alpha^2 c/4\lambda} \left(-\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi\lambda/c}} + e^{(c\alpha - 2\sqrt{u}\lambda)^2/4c\lambda} (1 + \alpha\sqrt{u})\right) \\ &Erfc\left(\sqrt{u\lambda/c} - \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda/c}}\right) + e^{(c\alpha + 2\sqrt{u}\lambda)^2/4c\lambda} (-1 + \alpha\sqrt{u}) Erfc\left(\sqrt{u\lambda/c} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda/c}}\right) \end{aligned}$$

Dla $z > 0$: $Erfc(z) = \Gamma(1/2, z^2)/\sqrt{\pi}$. Dla $u=0$ otrzymujemy:

$$\psi(0) = Erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda/c}}\right) - \frac{2\sqrt{\lambda/c}}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-c\alpha^2/4\lambda} + \frac{2\lambda}{c\alpha^2} Erf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda/c}}\right)$$

oraz

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = Erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda/c}}\right)$$

Jeśli $F_{\Theta}(a) = 0$ dla $a > 0$ (tzn. nie ma żadnej masy prawdopodobieństwa w okolicach 0), otrzymany rozkład brzegowy wielkości roszczeń jest lekkoogonowy. Oznacza to, że ogon dystrybuanty da się ograniczyć przez pewną funkcję wykładniczą.

Tak jak w poprzednim przykładzie spróbujemy porównać model niezależny z modelem z zależnymi ryzykami (tym razem Θ ma rozkład stabilny (1/2)). Zakładamy $\lambda = c = 1$ oraz, że wartości oczekiwane wielkość roszczeń w modelach będą równe. Wartość oczekiwana zmiennej z rozkładu Weibulla to: $\frac{1}{\alpha^2}$, czyli szukamy parametrów spełniających równość: $\frac{1}{\theta} = \frac{2}{\alpha^2}$. Dodatkowo, średnia szkoda musi być mniejsza od składki tj.: $E[X] < \frac{c}{\lambda} = 1$. Parametry spełniające wszystkie podane warunki to np.: $\theta = 2$, $\alpha = 2$. Kolejno zostaną obliczone wzory na prawdopodobieństwo ruiny dla modelu niezależnego i z zależnościami.

Prawdopodobieństwo ruiny w modelu niezależnym:

$$\psi(u) = \min\left\{\frac{1}{2}\exp\{-u\}, 1\right\}$$

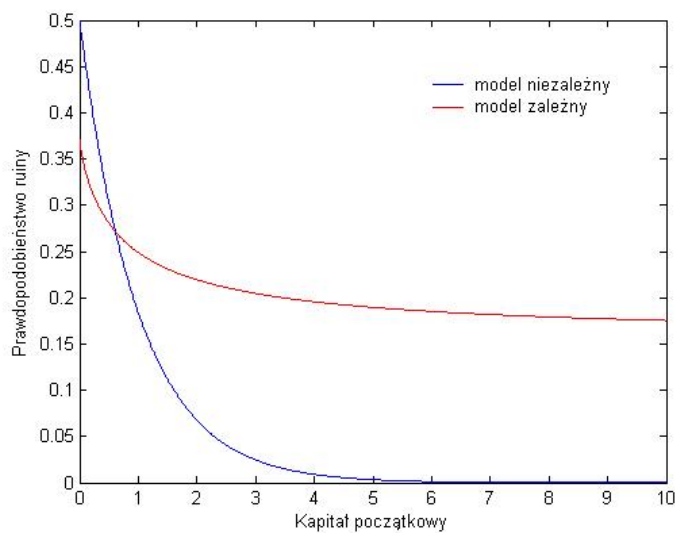
Prawdopodobieństwo ruiny w modelu z zależnymi wielkościami roszczeń:

$$\psi(u) = \operatorname{Erfc}(1) + \frac{1}{4}e^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{\pi}} + e^{(1-\sqrt{u})^2}(1 + 2\sqrt{u})\right) \cdot$$

$$\operatorname{Erfc}(\sqrt{u} - 1) + e^{(1+\sqrt{u})^2}(-1 + 2\sqrt{u})\operatorname{Erfc}(\sqrt{u} + 1))$$

Kolejno zostały porównane prawdopodobieństwa ruiny dla kilku wybranych wartości kapitału początkowego:

Kapitał początkowy	Prawdopodobieństwo ruiny	
	Model niezależny	Model zależny
0	0,5	0,3712
1	0,184	0,2492
3	0,0249	0,2039
5	0,0034	0,192188



Tak, jak w poprzednim przykładzie, dla zerowego kapitału początkowego prawdopodobieństwo ruiny w modelu niezależnym jest większe, ale również szybciej maleje. Już dla $u=1$ prawdopodobieństwo ruiny w modelu niezależnym jest mniejsze niż w modelu z zależnymi ryzykami.

4.7.3 Odstępy między roszczeniami o rozkładzie Pareto z funkcją Copula Claytona

Rozważmy model, gdzie parametr Λ ma rozkład $Gamma(\alpha, \beta)$ z gęstością:

$$f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Wzór na rozkład brzegowy odstępów czasowych jest analogiczny do (4.6.7):

$$\bar{F}_T(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda = (1 + t/\beta)^{-\alpha}, \quad t \geq 0.$$

Natomiast ich strukturę zależności, zgodnie z twierdzeniem (??), opisuje funkcja copula Claytona z generatorem:

$$\varphi(t) = t^{-1/\alpha} - 1.$$

Jeśli rozważamy szczególny przypadek, gdy wielkości roszczeń mają rozkład wykładniczy z parametrem $\frac{1}{EX}$ (tym razem ustalonym), to otrzymujemy wzór (??):

$$\psi_{\lambda}(u) = \min\left\{EX \frac{\lambda}{c} \exp\left\{-\left(\frac{1}{EX} - \frac{\lambda}{c}\right)u\right\}, 1\right\}, \quad u \geq 0. \quad (4.7.2)$$

Zgodnie ze wzorem (??) oraz warunkiem zysku netto z wartością progową $\lambda_0 = \frac{c}{EX}$ otrzymujemy ostateczny wzór na prawdopodobieństwo ruiny:

$$\psi(u) = EX \frac{\beta^{\alpha} e^{-\frac{u}{EX}}}{c} (\beta - u/c)^{-1-\alpha} \left(\alpha - \frac{\Gamma(\alpha + 1, \frac{1}{EX}(c\beta - u))}{\Gamma(\alpha)} \right) + \frac{\Gamma(\alpha, \frac{\beta c}{EX})}{\Gamma(\alpha)}, \quad u \geq 0. \quad (4.7.3)$$

W szczególności dla $u=0$ mamy:

$$\psi(0) = EX \frac{1}{\beta c} \left(\alpha - \frac{\Gamma(\alpha + 1, \frac{c\beta}{EX})}{\Gamma(\alpha)} \right) + \frac{\Gamma(\alpha, \frac{c\beta}{EX})}{\Gamma(\alpha)}$$

i

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \frac{\Gamma(\alpha, \frac{c\beta}{EX})}{\Gamma(\alpha)}.$$

W tym przypadku również podejmiemy próbę porównania wyników z modelem niezależnym. Dla obu modeli przyjmujemy $\frac{1}{EX} = \frac{1}{3}$, $c = 1$. Zakładam również, że wartości oczekiwane odstępów czasowych w modelu zależnym i niezależnym będą równe tj.: $\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$ oraz nie zostanie złamany warunek zysku netto tzn.: $\lambda < \frac{c}{EX} = 3$.

Parametry, które spełniają wszystkie powyższe warunki to np.: $\lambda = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = \frac{1}{3}$. Poniżej przedstawiam wzory na prawdopodobieństwo ruiny dla modelu zależnego i niezależnego, obliczone dla wybranych parametrów:

Prawdopodobieństwo ruiny w modelu niezależnym:

$$\psi(u) = \min\left\{\frac{2}{3}\exp\{-u\}, 1\right\}$$

Prawdopodobieństwo ruiny w modelu z zależnymi odstępami czasowymi:

$$\psi(u) = \frac{(\frac{1}{3})^3 e^{-3}}{3} (\frac{1}{3} - u)^{-4} \left(3 - \frac{\Gamma(4, 1 - 3u)}{\Gamma(3)}\right) + \frac{\Gamma(3, 1)}{\Gamma(3)}$$

Potrzebne obliczenia zostały wykonane w Matlabie:

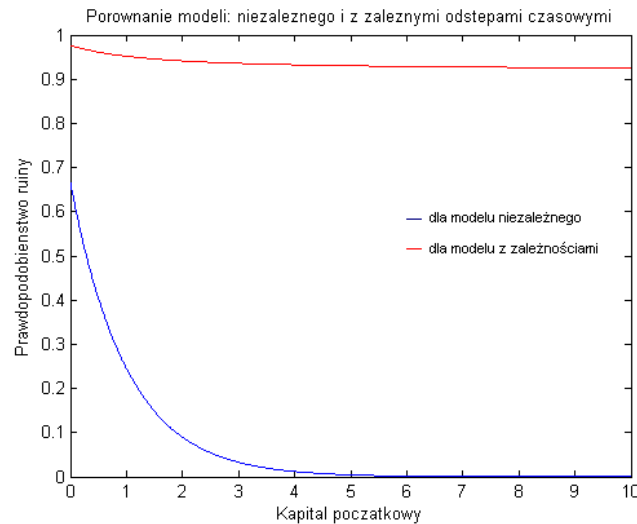
$$\Gamma(3, 1) = \int_1^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 5e^{-1}$$

$$\Gamma(4, 1 - 3u) = \int_{1-3u}^{\infty} x^3 e^{-x} dx = e^{-(1-3u)} ((1-3u)^3 + 3(1-3u)^2 + 6(1-3u) + 6)$$

Ostateczny wzór dla modelu zależnego to:

$$\psi(u) = \frac{e^{-3u}}{3^4} (\frac{1}{3} - u)^{-4} \left(3 - \frac{e^{-(1-3u)}}{2} ((1-3u)^3 + 3(1-3u)^2 + 6(1-3u) + 6)\right) + \frac{5}{2e}$$

Wzory zostały naniesione na wykres.



Otrzymane prawdopodobieństwo ruiny w modelu z zależnościami, dla każdego $u \geq 0$,

jest dużo wyższe niż w modelu niezależnym. Poniżej obliczę prawdopodobieństwa ruiny w obu modelach dla przykładowych wartości u :

Model niezależny:

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \min\left\{\frac{2}{3}, 1\right\} = \frac{2}{3} = 0, (6) \\ \psi(5) &= \min\left\{\frac{2}{3}\exp\{-5\}, 1\right\} = \frac{2}{3} \cdot e^{-5} \approx 0,0045\end{aligned}$$

Model zależny:

$$\begin{aligned}\psi(0) &= 3 - \frac{\Gamma(4,1)}{\Gamma(3)} + \frac{\Gamma(3,1)}{\Gamma(3)} \approx 0,9767 \\ \psi(5) &= \frac{e^{-3 \cdot 5}}{(3 \cdot (\frac{1}{3} - 5))^4} \left(3 - \frac{e^{-(1-3 \cdot 5)}}{2} ((1 - 3 \cdot 5)^3 + 3(1 - 3 \cdot 5)^2 + 6(1 - 3 \cdot 5) + 6) \right) + \\ &\quad \frac{5}{2e} \approx 0,9304\end{aligned}$$

4.7.4 Odstępy między roszczeniami o rozkładzie Weibulla z funkcją Copula Gumbel'a

Rozważmy model, w którym zmienna losowa Λ (nasz czynnik "frailty") ma rozkład stabilny (1/2) z gęstością:

$$f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}\lambda^3} e^{-\alpha^2/4\lambda}, \quad \lambda > 0$$

Wtedy, analogicznie do przykładu (4.2), otrzymany rozkład brzegowy odstępów czasowych T_k to:

$$\bar{F}_T(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda = \exp\{-\alpha t^{1/2}\}, \quad t \geq 0$$

Oznacza to, że odstępów czasowe mają rozkład Weibulla z parametrem kształtu równym 1/2, natomiast ich struktura zależności, na podstawie twierdzenia (??), jest opisana funkcją copula Gumbela tj. funkcją copula z rodziny copul Archimedesów z generatorem $\varphi(t) = (-\ln t)^2$. Prawdopodobieństwo ruiny, dla tego modelu, na podstawie wzoru (??) to:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{\alpha i e^{-i\alpha\sqrt{u/c-u\theta}}}{4\theta\sqrt{cu}} \left(-1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{c\theta}} - i\sqrt{u\theta} \right) + e^{2i\sqrt{u/c\alpha}} \operatorname{Erfc} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{c\theta}} + i\sqrt{u\theta} \right) \right) + \\ &\quad \operatorname{Erfc} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{c\theta}} \right)\end{aligned}\tag{4.7.4}$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$. Można wykazać, że otrzymana część urojona z prawej strony równania (4.7.4) jest równa zero, co oznacza, że wyrażenie jest w istocie liczbą rzeczywistą. Dla $u=0$ otrzymujemy:

$$\psi(0) = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2c\theta}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{c\theta}}\right) + \frac{\alpha}{\sqrt{\theta\pi c}} e^{-\alpha^2/4c\theta}$$

dla dużych u : $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{c\theta}}\right)$.

W celu porównania prawdopodobieństwa ruiny opisywanego modelu z modelem niezależnym, należy ustalić parametry λ , α , EX , c . Przy czym, wartości oczekiwane odstępów czasowych w obu modelach powinny być równe, tj.: $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\alpha^2}$ oraz musi być spełniony warunek zysku netto tj.: $\lambda < \frac{c}{EX}$. Wybrane wartości to: $\lambda = \alpha = 2$, $\frac{1}{EX} = 3$, $c = 1$. Poniżej przedstawiam wzory, dla obu modeli, dla wybranych parametrów:

Model niezależny:

$$\psi(u) = \min\{\frac{2}{3}\exp\{-u\}, 1\}$$

$$\psi(0) = \min\{\frac{2}{3}\exp\{0\}, 1\} = \frac{2}{3} = 0,6667$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$$

Model zależny:

$$\psi(u) = \frac{2ie^{-i2\sqrt{u}-3u}}{12\sqrt{u}} \left(-1 + \operatorname{Erf}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}} - i\sqrt{3u}\right) + e^{2i\sqrt{u}2} \operatorname{Erfc}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}} + i\sqrt{3u}\right)\right) + \operatorname{Erfc}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\psi(0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,6042$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,4122$$

Dla $u = 0$ prawdopodobieństwo ruiny w modelu niezależnym jest większe, jednak wraz ze wzrostem u , dąży ono do 0. Natomiast dolna granica prawdopodobieństwa ruiny w modelu zależnym to w przybliżeniu 0,4122, co oznacza, że dla dużych u , prawdopodobieństwo ruiny w tym modelu jest większe niż w niezależnym.

Uwaga

Dla ciężko-ogonowych rozkładów odstępów czasowych między roszczeniami zwykle

techniki, takie jak łańcuchy Markowa nie działają, a w literaturze nie jest dostępny żaden jawny wzór na prawdopodobieństwo ruiny. W konsekwencji, wzory (4.7.3) i (4.7.4) mogą być pierwszymi przykładami jawnych wzorów na prawdopodobieństwo ruiny dla identycznych, ciężkoogonowych rozkładów odstępów czasowych między roszczeniami, z zależnościami opisanymi odpowiednio przez funkcję copula Clayтона i Gumbela.

4.8 Dalsze rozszerzenia metody mieszania

Pomysł mieszania przedstawiony w obecnej pracy może być kontynuowany na różne sposoby. Oto kilka z nich:

Przykład 4.8.1 Jednym ze sposobów jest jednoczesne mieszanie odstępów czasowych między roszczeniami oraz wielkości roszczeń, niezależnie od siebie. Prowadzi to w obu przypadkach do funkcji copula Archimedesesa. Prawdopodobieństwo ruiny wyraża się wówczas wzorem:

$$\psi(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_{(\theta,\lambda)}(u) dF_\Theta(\theta) dF_\Lambda(\lambda)$$

gdzie $\psi_{(\theta,\lambda)}(u)$ to warunkowe prawdopodobieństwo ruiny dla $\Theta = \theta$ i $\Lambda = \lambda$. Jawny wzór na $\psi_{(\theta,\lambda)}(u)$, zawsze doprowadzi nas do otrzymania jawnego wzoru na $\psi(u)$ w modelach odnowy z zależnymi zarówno odstępami czasowymi jak i wielkościami roszczeń.

Przykład 4.8.2 Istnieje również możliwość wprowadzenia zależności Archimedesesa pomiędzy wielkościami roszczeń, a odstępami czasowymi, w tym samym czasie wprowadzając zależność pomiędzy odstępami czasowymi i zależność pomiędzy wielkościami roszczeń. Sposobem na to jest comotonic mixing, gdzie realizacja λ jest funkcją deterministyczną realizacji θ w postaci:

$$\lambda(\theta) = F_\Lambda^{-1}(F_\Theta(\theta)).$$

Prawdopodobieństwo ruiny w takim modelu jest opisane wzorem:

$$\psi(u) = \int_0^\infty \psi_{(\theta,\lambda(\theta))}(u) dF_\Theta(\theta),$$

gdzie $\psi_{(\theta,\lambda)}(u)$ to warunkowe prawdopodobieństwo ruiny dla $\Theta = \theta$ i $\Lambda = \lambda$.

Przykład 4.8.3 Odwołując się do podrozdziału (4.1), w celu uzyskania wzoru na prawdopodobieństwo ruiny dla pewnych, całkowicie monotonicznych rozkładów brzegowych roszczeń, konieczne było ustalenie ich struktury zależności. W rzeczywistości istnieje sposób, aby zmienić strukturę zależności, pozostawiając jednocześnie asymptotyczny ogon rozkładu brzegowego roszczenia niezmienny i nadal otrzymywać jawne wzory. Niech proces nadwyżki będzie opisany wzorem:

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k - \sum_{l=1}^{N'(t)} Y_l$$

gdzie są dwa niezależne procesy Poisson'a: $N'(t)$ z intensywnością λ' generujący niezależne roszczenia $Y_1, Y_2, \dots$ o rozkładzie wykładniczym $Exp(\nu)$, gdzie ν jest ustaloną stałą. Z kolei proces $N(t)$ z intensywnością λ generuje strumień zależnych roszczeń $X_1, X_2, \dots$, tak jak w (4.6.1), gdzie Θ jest dodatnią zmienną losową. Jeśli rozkład zmiennej Θ jest np. taki jak w podrozdziale (4.1) lub w podrozdziale (4.2), to zależne roszczenia $X_1, X_2, \dots$ są ciężkoogonowe. Równoważnie możemy przedstawić powstały proces ryzyka jako:

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N''(t)} Z_k,$$

gdzie $N''(t)$ jest procesem Poisson'a o intensywności $\lambda + \lambda'$ oraz brzegowe rozkłady wielkości roszczeń $Z_1, Z_2, \dots$ są wyrażone jako:

$$f_Z(x) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda'} \theta e^{-\theta x} + \frac{\lambda'}{\lambda + \lambda'} \nu e^{-\nu x}, \quad x \geq 0. \quad (4.8.1)$$

Oznacza to, że rozkład wielkości roszczeń jest mieszkanką dwóch rozkładów wykładniczych, ale wymieszany jest po wartościach parametru θ . Brzegowy rozkład $X_1, X_2, \dots$ określa zachowanie ogona, jeśli jest on ciężkoogonowy. Ponieważ dla ustalonego θ , prawdopodobieństwo ruiny $\psi_\theta(u)$ w klasycznym modelu ryzyka z rozkładem wielkości roszczeń z równania (4.8.1) ma jawną formę jako ważona suma dwóch wykładniczych wyrażeń, po raz kolejny otrzymywany jest jawny wzór na prawdopodobieństwo ruiny na mocy (4.6.3). Należy pamiętać, że mieszanie strumienia zależnych roszczeń $X_1, X_2, \dots$ z niezależnymi (w tym przypadku wykładniczymi) roszczeniami zredukuje zależności. W szczególności, jeśli tau Kendall'a dwóch dowolnych roszczeń X_i, X_j wynosi τ_0 , to wartość tau Kendall'a dla dwóch dowolnych roszczeń Z_i, Z_j w nowym modelu wynosi $\tau_1 = (\frac{\lambda}{\lambda + \lambda'})^2 \tau_0$, ponieważ jedyny sposób na dodatnią korelację pomiędzy losowo wybranymi wielkościami roszczeń jest wybrać dwa roszczenia pochodzące z procesu $N(t)$ i ponieważ prawdopodobieństwo, że roszczenie wygenerowane przez $N''(t)$ pochodzi z $N(t)$ jest równe $\frac{\lambda}{\lambda + \lambda'}$. W ten sposób określiliśmy metodę, w której zależności pomiędzy wielkościami roszczeń powinny zostać osłabione, zachowanie brzegowego ogona powinno zostać takie jak opisane w procesie $N(t)$, a przez odpowiednie wybranie parametru λ' , można wygenerować jawne wzory dla modeli dla

każdej wartości τ_1 pomiędzy 0 i τ_0 . Należy pamiętać, że odbywa się to kosztem utraty jawnego typu zależności Archimedesesa, który był dostępny dla $\lambda' = 0$. Zamiast tego, ogon łącznej dystrybuanty zmiennych $Z_1, Z_2, \dots$ otrzymano w następujący sposób: każdy z zaistniałych roszczeń Z_i jest typu X_i z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda}{\lambda + \lambda'}$ oraz typu Y_i w pozostałych przypadkach. Wówczas łączna dystrybucja jest odpowiednią mieszkanką niezależnych typów Y_i oraz struktury zależności Archimedesesa typów X_i .

W całkowicie analogiczny sposób można zmieniać strukturę zależności pomiędzy odstępami czasowymi, w dalszym ciągu otrzymując jawne wzory na prawdopodobieństwa ruiny.

Uwaga

Model ryzyka otrzymany w powyższym przykładzie obejmuje dwa rodzaje roszczeń: niezależne, lekko-ogonowe roszczenia oraz zależne, ciężko-ogonowe (na odpowiednich założeniach dla θ). W zakresie praktycznej interpretacji, może to rzeczywiście opisywać realną sytuację portfela: zależność pomiędzy ciężko-ogonowymi wielkościami roszczeń może pochodzić z niepewności parametrów, lub z innych źródeł korelacji jak ryzyko środowiskowe, zmiany klimatu lub ryzyko prawne. Rzeczywiście, wiele modeli wewnętrznych dla Solvency II współpracuje z regularnie zmieniającymi się losowymi stratami agregowanymi przez kopułę przeżycia Claytona.

Uwaga

Analizując przykład (4.8.3), staje się oczywista możliwość wygenerowania wiele więcej przykładów jawnych wzorów dla modeli ryzyka z zależnością przez zastąpienie dystrybuanty rozkładu wykładniczego bardziej ogólną dystrybucją dla której wzór na $\psi_\theta(u)$ jest jawnie określony. Otrzymana struktura zależności oraz brzegowe rozkłady wielkości roszczeń będą wynikiem oddziaływania pomiędzy tym wyborem, a rozkładem zmiennej Θ (analogicznie do równania (4.6.1)).

Rozdział 5

Techniki statystyczne dla rozkładów ciągłych

W rozdziale tym zajmiemy się opisem rozkładów ciągłych, które służą do modelowania wielkości szkód oraz metodami statystycznymi pozwalającymi zidentyfikować owe rozkłady na podstawie zgromadzonych danych.

Najpopularniejsze rozkłady ciągłe używane w matematyce ubezpieczeniowej (nie tylko w kontekście wielkości szkód) to:

- rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$
- rozkłady fazowe, m.in.
 - rozkład wykładniczy $Exp(\lambda)$;
 - rozkład Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$;
- rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma)$;
- rozkład Pareto $Par(\alpha, c)$;
- rozkład Weibulla

Rozkłady fazowe omówiliśmy krótko w Rozdziale ???. Podstawowe wiadomości o rozkładach normalnym, wykładniczym, Gamma, czy logarytmiczno-normalnym, wraz z estymacją parametrów, można znaleźć w Dodatku. Tutaj zajmiemy się głównie rozkładami Pareto i ich modyfikacjami, szczególnie w kontekście dość skomplikowanej estymacji parametru α .

Na początek omówimy pewne techniki statystyczne służące do dopasowania rozkładu do danych.

5.1 Dopasowanie rozkładu do danych

Będziemy stosowali następujące funkcje do oceny dopasowania modelu empirycznego do wybranego modelu teoretycznego:

- **Dystrybuanta empiryczna** $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \#\{i = 1, \dots, n : X_i \leq x\}$. Wielkość ta będzie przybliżała prawdziwy rozkład szkód;
- **Empiryczna funkcja kwantylowa** $\hat{Q}_n(p) = X_i^*$ jeżeli $p \in (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, gdzie $X_1^* \leq \dots \leq X_n^*$ są uporządkowanymi wielkościami szkód. Wielkość ta będzie przybliżała prawdziwą **funkcję kwantylową** $Q(p) = F^{-1}(p)$;
- **Empiryczna funkcja nadwyżki** $e_{\hat{F}_n}(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u) I(u < X_i)}{\sum_{i=1}^n I(u < X_i)}$. Wielkość ta będzie przybliżała prawdziwą średnią funkcję nadwyżki.

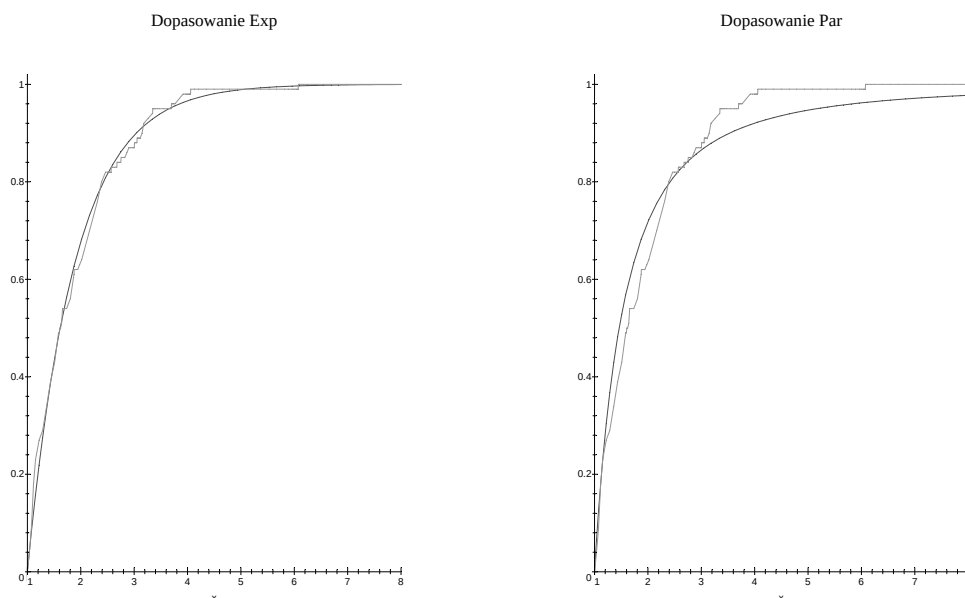
5.1.1 Dystrybuanta empiryczna

Z tzw. twierdzenia Kołmogorowa-Smirnowa mamy $\sup_{x \in (0, \infty)} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Tak więc przy dużej liczbie obserwacji dystrybuanta empiryczna przybliża prawdziwy rozkład szkody F .

Przykład 5.1.1 Rysunki poniżej otrzymane zostały w sposób następujący. Wygenerowano $n = 100$ liczb $X_1, \dots, X_n$ z rozkładu o gęstości $f(x) = \lambda \exp(-\lambda(x-1))$, $x > 1$. Jest to po prostu przesunięty o 1 rozkładem wykładniczym (chodzi o to, by rozkład wykładniczy i Pareto miały te same nośniki). Bierzemy $\lambda = 1$. Dla tak wylosowanych liczb tworzymy dystrybuantę empiryczną $\hat{F}_n$. Do dystrybuanty empirycznej dopasowujemy najpierw rozkład wykładniczy, a potem Pareto. Ponieważ $E[X_1] = \frac{1}{\lambda} + 1$, więc metodą momentów $\hat{\lambda} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i/n - 1}$. Na jednym rysunku (lewy) przedstawiamy dystrybuantę empiryczną $\hat{F}_n$ i przesunięty rozkład wykładniczy o gęstości $\hat{\lambda} \exp(-\hat{\lambda}(x-1))$. Dopasowanie jest dobre. Spróbujemy teraz dopasować rozkład Pareto. Estymujemy $\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}$, i wyrysowujemy $\hat{F}_n$ wspólnie z rozkładem $Par(\hat{\alpha}, 1)$. Dopasowanie nie jest dobre.¹

□

¹ciagle-1.mws



5.1.2 Wykres kwantylowy (Q-Q plot)

Idea wykresu kwantylowego jest następująca: wybierzmy rozkład F . Nanosimy na jednym układzie współrzędnych pary punktów postaci $(Q(p), \hat{Q}_n(p))$, $p \in (0, 1)$. Najbardziej typowym wyborem punktów p jest $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Wtedy $\hat{Q}_n(\frac{i}{n}) = X_i^*$. Z pewnych przyczyn technicznych wybiera się $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+1}$. Pary punktów będą miały więc współrzędne: (kwantyl teoretyczny, kwantyl próbkowy). Jeżeli teraz utworzona wykres będzie w przybliżeniu linią prostą, będzie to oznaczało, że kwantyle próbkowe są bliskie kwantylom teoretycznym, a więc nasze dane pasują do wybranego przez nas modelu teoretycznego.

Przykład 5.1.2 Wykładniczy wykres kwantylowy: Dla rozkładu wykładniczego $Exp(\lambda)$ mamy: $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $Q(p) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - p)$. Wykres kwantylowy będzie miał więc postać: $\{(-\log(1 - \frac{i}{n+1}), X_i^*), i = 1, \dots, n\}$. W przypadku, gdy otrzymaliśmy wykres w przybliżeniu liniowy, to ma sens dopasowanie "najlepszej" funkcji liniowej $y = ax$ metodą najmniejszych kwadratów. Współczynnik nachylenia a ma wtedy postać

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^* q_i}{\sum_{i=1}^n q_i^2},$$

gdzie $q_i = -\log(1 - \frac{i}{n+1})$, i jest oszacowaniem parametru $1/\lambda$.

Weibullowski wykres kwantylowy: Dla rozkładu $Weibull(\lambda, r)$ mamy: $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x^r)$, $Q(p) = \left(-\frac{1}{\lambda} \log(1 - p)\right)^{1/r}$ lub alternatywnie $\log Q(p) = \frac{1}{r} \log(\frac{1}{\lambda}) + \frac{1}{r} \log(-\log(1 - p))$. Wykres kwantylowy będzie miał więc postać: $\{(\log(-\log(1 - \frac{i}{n+1})), \log(X_i^*)), i = 1, \dots, n\}$. W przypadku, gdy otrzymaliśmy wykres w przybliżeniu liniowy, to nachylenie prostej stanowi aproksymację parametru $1/r$, natomiast minimalna wartość na osi x przybliża $\log(1/\lambda)/r$.

Log-normalny wykres kwantylowy: Niech Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Lognormalny wykres kwantylowy jest postaci $\{\Phi^{-1}(\frac{i}{n+1}), \log(X_i^*)\}$, $i = 1, \dots, n$. Nachylenie krzywej daje aproksymację dla σ , a minimalna wartość na osi poziomej przybliża wartość μ .

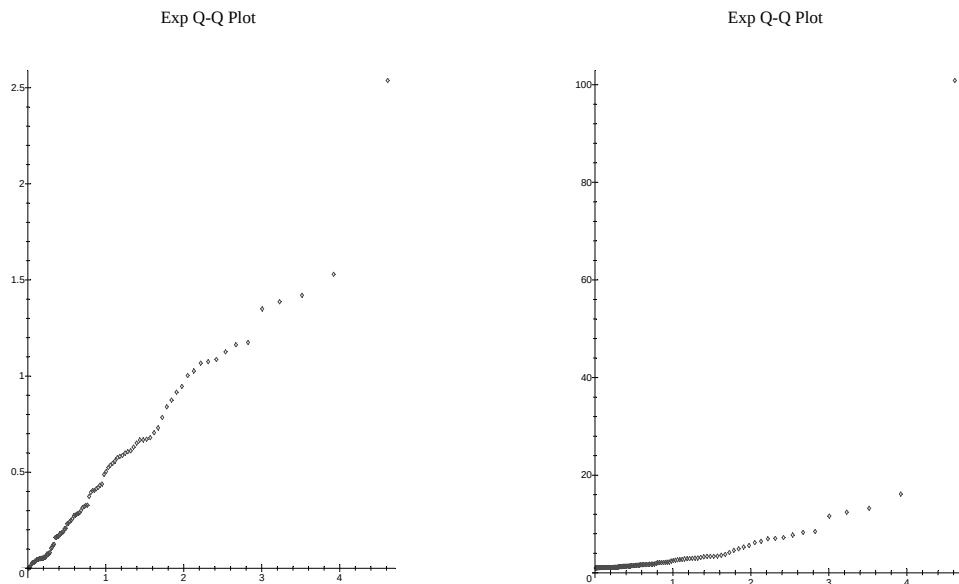
Wykres kwantylowy Pareto: Dla rozkładu $Par(\alpha)$ mamy: $Q(p) = (1 - p)^{-1/\alpha} - 1$ lub alternatywnie $\log Q(p) = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - p)$. Rysunek kwantylowy będzie miał więc postać: $\{(-\log(1 - \frac{i}{n+1}), \log(X_i^*)), i = 1, \dots, n\}$. W przypadku, gdy otrzymaliśmy wykres w przybliżeniu liniowy, to nachylenie prostej stanowi aproksymację parametru $1/\alpha$.

Następnie, do wygenerowanych liczb z rozkładu wykładniczego, stosujemy Weibullowski wykres kwantylowy, log-normalny wykres kwantylowy, wykres kwantylowy Pareto. Żaden wykres nie jest 'linią prostą'.

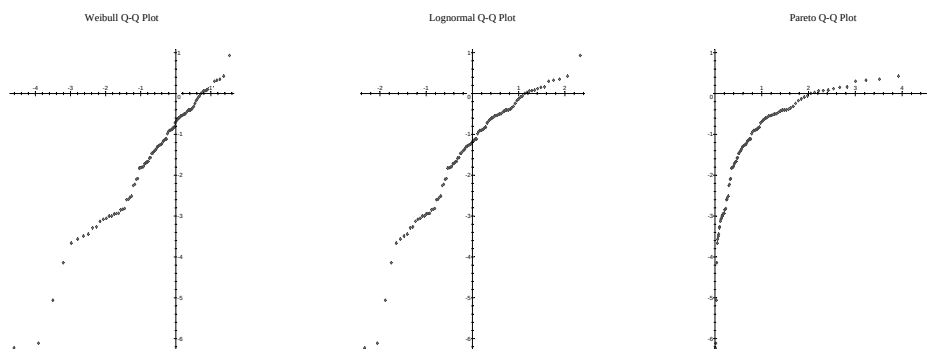
Na podstawie Q-Q plots odrzucimy na pewno rozkład Pareto, raczej też odrzucimy rozkład log-normalny, nie będziemy jednak w stanie odrzucić 'hipotezy' o tym, że rozkład jest Weibulla.²

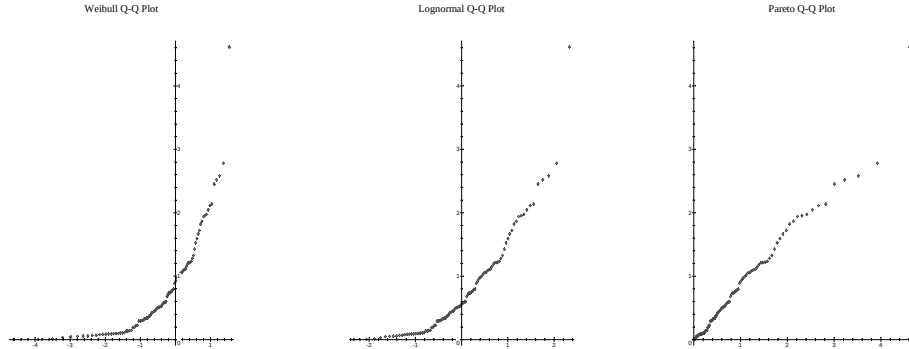
□

Przykład 5.1.3 Do wygenerowanych liczb z rozkładu Pareto, stosujemy Weibullowski wykres kwantylowy, log-normalny wykres kwantylowy, wykres kwantylowy Pareto. Tylko ostatni rysunek jest 'linią prostą'.³



Rysunek 5.1.1: Wykładniczy wykres kwantylowy dla 100 danych z rozkładów $Exp(2)$ i $Par(1.1, 1)$. Lewy wykres pokazuje dobre dopasowanie do rozkładu wykładniczego, podczas gdy prawy wykres pokazuje, że dane zostały z rozkładu 'cięższego' niż wykładniczy.





□

5.1.3 Średnia funkcja nadwyżki

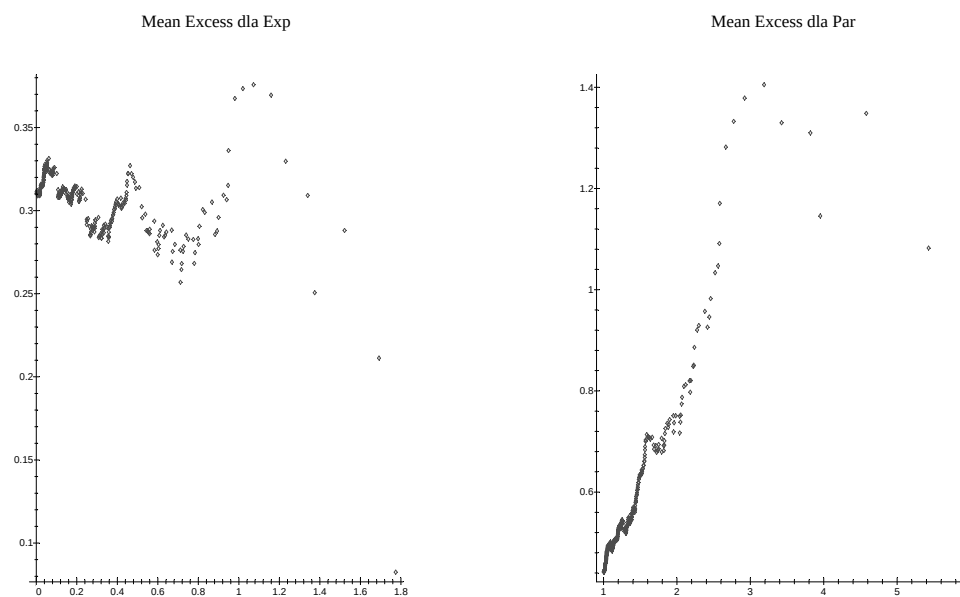
Innym sposobem diagnostyki jest tzw. średnia funkcja nadwyżki (*mean excess function*)

$$e_F(u) = E[X - u | X > u].$$

Funkcja ta jednoznacznie wyznacza dystrybuantę. Bezpośrednio z definicji otrzymujemy

$$\begin{aligned} e_F(u) &= \frac{E[(X - u)I(X > u)]}{P(X > u)} \\ &= \frac{\int_u^\infty \bar{F}(s) ds}{\bar{F}(u)} = \frac{E[(X - u)_+]}{P(X > u)}. \end{aligned}$$

przy założeniu, że $E[X] < \infty$. W praktyce estymujemy tą funkcję próbkową funkcją nadwyżki $e_{\hat{F}_n}(u)$. Funkcję $e_{\hat{F}_n}(u)$ rysuje się w punktach $u = X_{n-k}^*$, przyjmuje ona wtedy postać $e_{\hat{F}_n}(X_{n-k}^*) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{n-i+1}^* - X_{n-k}^*$, $k = 1, \dots, n-1$. Dla rozkładu wykładniczego $Exp(\lambda)$ mamy $e_F(u) = \frac{1}{\lambda}$. W przypadku, gdy dane pochodzą z rozkładu cięższego niż wykładniczy, to funkcja nadwyżki jest rosnąca, w przeciwnym razie jest malejąca.



Rysunek 5.1.2: Funkcja nadwyżki dla 300 danych z rozkładów $Exp(3)$ i $Par(3, 1)$.

5.2 Rozkład Pareto

Nazwa tej klasy rozkładów wzięła się od nazwiska Vilfredo Pareto (1897), szwajcarskiego ekonomisty, który bogactwo w populacji opisywał za pomocą $M = Ax^{-\alpha}$, gdzie M jest ilością osób, które mają dochód większy niż x . Jeżeli $\bar{F}(x) = P(X > x) = c^\alpha x^{-\alpha}$, $x > c$, to mówimy, że zmienna losowa X ma **rozkład Pareto** $Par(\alpha, c)$. Jeżeli $c = 1$ to będziemy pisali $Par(\alpha)$. Gęstość zadana jest wzorem $f(x) = c^\alpha x^{-(\alpha+1)}$, $x > c$. Rozkład taki ma średnią

$$E[X] = \frac{c\alpha}{\alpha - 1}. \quad (5.2.1)$$

Aby powyższa tożsamość miała sens, musimy założyć $\alpha > 1$.

Rozkład Pareto jest tzw. **rozkładem ciężkoogonowym**. W szczególności, dla $\alpha > k$ nie istnieje k -ty moment.

Dla próby $X_1, \dots, X_n$ z rozkładu $Par(\alpha, c)$ estymujemy parametry za pomocą metody **największej wiarogodności**. Jeżeli $L(\alpha, c, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$, to

$$\log L(\alpha, c; X_1, \dots, X_n) = n \log(\alpha) + n\alpha \log c - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log X_i.$$

Szukamy maksimum (względem α i c) funkcji L . Różniczkując względem α i c oraz przyrównując do zera, dostajemy układ równań

$$\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i/c)}, \quad (5.2.2)$$

$$\alpha = \frac{\alpha + 1}{n} \sum_{i=1}^n (1 + X_i/c)^{-1}, \quad (5.2.3)$$

który należy rozwiązać numerycznie.

Jeżeli chcemy uchronić się od procedur numerycznych możemy postąpić w następujący sposób. Parametr α estymujemy za pomocą wzoru (5.2.2), a następnie wstawiamy estymator c jako

$$\hat{c} = \min(X_1, \dots, X_n). \quad (5.2.4)$$

²Plik ciagle-2a.mws

³Plik ciagle-2b.mws

Postępowanie takie jest uzasadnione, gdyż musimy mieć $c \leq \min(X_1, \dots, X_n)$ i w celu maksymalizacji funkcji wiarygodności kładziemy (5.2.4). Należy dodać, że tak otrzymany estymator dla c jest obciążony: $E[\hat{c}] = \frac{nc\alpha}{n\alpha-1} \neq c$. Rzeczywiście, licząc rozkład minimum dostajemy

$$P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = P(X > x)^n = c^{n\alpha} x^{-n\alpha},$$

a więc rozkład Pareto $Par(n\alpha, c)$ (patrz (5.2.1)).

Jeżeli chcemy uchronić się od procedur numerycznych lub dysponujemy tylko obserwacjami przekraczającymi poziom u możemy postąpić jeszcze w inny sposób: Jeżeli $X \sim Par(\alpha, \sigma)$, to rozkład warunkowy $X|X > u$ jest też Pareto, nie zależy od σ i jego dystrybuanta ma postać $1 - u^\alpha x^{-\alpha}$, czyli $Par(\alpha, u)$. Oznaczając przez $Y_i, i = 1, \dots, n$, realizacje zmiennej losowej Y o powyższym rozkładzie warunkowym, funkcja wiarygodności ma postać

$$\ln L(\alpha; Y_1, \dots, Y_n) = n \log(\alpha) + n\alpha \log u - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log Y_i.$$

Różniczkując względem α i przyrównując do zera dostajemy

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(Y_i/u)}. \quad (5.2.5)$$

Jeżeli nasze dane dotyczą nie tych obserwacji, które są większe od u , ale k największych obserwacji, to

$$\hat{\alpha} = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \log(X_{n+1-i}^*/X_{n-k}^*)}, \quad (5.2.6)$$

gdzie $X_1^* < X_2^* < \dots < X_n^*$. W dalszej części będziemy nazywali estymator zadany wzorem (5.2.5) estymatorem Hilla typu I, a w drugim przypadku estymatorem Hilla typu II.

Parametr σ można wyestymować z zależności $\hat{\sigma} = u/\hat{\alpha}$. Jeżeli estymacje oparte są na k największych obserwacjach, to σ estymujemy z warunku

$$\hat{\sigma} = X_{n-k}^* \left(\frac{k}{n} \right)^{1/\hat{\alpha}}.$$

5.2.1 *Rozkłady typu Pareto

Mówimy, że L jest **funkcją wolno zmieniającą się**, jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$ dla każdego $t > 0$. Typowe przykłady to $L(x) = 1$, $L(x) = \log x$, $L(x) = \log \log x$.

Rozkłady, dla których $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, L jest funkcją wolno zmieniającą się w nieskończoności, nazywamy **rozkładami typu Pareto**. W klasie tej znajdują się m.in. omówione wcześniej rozkłady Pareto oraz rozkłady Burra, log-Gamma, log-logistyczny.

Przykład 5.2.1 Rozkład Burra ma ogon $\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\lambda$, $\alpha, \gamma, \lambda, x > 0$. Rozkład o gęstości

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha (\log x)^{\alpha-1} x^{-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 1,$$

gdzie $\alpha > 0$ nazywamy **rozkładem log-Gamma**. Rozkład o ogonie $\bar{F}(x) = (1 + \beta x)^{-\alpha}$, $\alpha > 1$, $\beta, x > 0$, nazywamy **rozkładem log-logistycznym**.

□

Wykładnik α charakteryzuje tempo zbieżności ogona do 0 i będziemy go nazywali **indeksem Pareto**.

Zauważmy delikatną różnię pomiędzy rozkładami Pareto a typu Pareto. Z uwagi na obecność funkcji L mamy jedynie informację o asymptotycznym zachowaniu ogona $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$. Funkcja L jest zazwyczaj nieznana i niemożliwa do wyestymowania. Powoduje to problemy związane z estymacją parametru α , w przeciwieństwie do zwykłego rozkładu Pareto.

Parametr α można estymować w sposób następujący: Niech $\gamma = \frac{1}{\alpha}$. Wtedy za estymator γ kładziemy

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log(X_{n-j+1}^*) - \log(X_{n-k}^*), \quad k = 1, \dots, n.$$

Otrzymujemy wtedy zbiór tzw. estymatorów Hilla.

Problem, który się pojawia, to wybór wartości $k = k_{opt}$ dla której będziemy rozważali estymator Hilla $H_{k,n}$. Procedura wyboru będzie oparta na własnościach wykresu kwantylowego, który został opisany w Rozdziale 5.1.2. Wykres kwantylowy Pareto jest postaci $\{(-\log(1 - \frac{i}{n+1}), \log(X_i^*)), i = 1, \dots, n\}$. Jeżeli dopasowanie do rozkładu Pareto jest dobre, to wykres kwantylowy jest w przybliżeniu liniowy i jego nachylenie można traktować jako estymator parametru γ . Estymator Hilla $H_{k,n}$ jest oszacowaniem nachylenia wykresu na prawo od punktu $(-\log(\frac{k+1}{n+1}), \log(X_{n-k}^*))$. Optymalną wartość k_{opt} (a tym samym $\gamma_{opt} := H_{k_{opt},n}$) wyznaczymy na podstawie linii regresji $l_1, \dots, l_{n-1}$ przechodzących przez punkty, odpowiednio, $(-\log(\frac{k+1}{n+1}), \log(X_{n-k}^*))$, $k = 1, \dots, n-1$ i mających nachylenie, odpowiednio, $H_{k,n}$ tak, aby średni błąd

kwadratowy dopasowania prostej $l_{k_{opt}}$ do punktów $\{(-\log(\frac{j}{n+1}), \log(X_{n-j+1}^*)), j = 1, \dots, k_{opt}\}$ na prawo od $(-\log(\frac{k_{opt}+1}{n+1}), \log(X_{n-k_{opt}}^*))$ był minimalny. Równanie l_k ma postać

$$y = \log X_{n-k}^* + H_{k,n} \left(x + \log \left(\frac{k+1}{n+1} \right) \right). \quad (5.2.7)$$

Licząc średni błąd kwadratowy $MSE(k)$ dostajemy

$$\begin{aligned} MSE(k) &: = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\log(X_{n-j+1}^*) - \log X_{n-k}^* - H_{k,n} \left(-\log \left(\frac{j}{n+1} \right) + \log \left(\frac{k+1}{n+1} \right) \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\log \left(\frac{X_{n-j+1}^*}{X_{n-k}^*} \right) - H_{k,n} \log \left(\frac{k+1}{j} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Wartość optymalną k_{opt} wyznaczamy z warunku

$$MSE(k_{opt}) = \min_k MSE(k).$$

Ponieważ estymator Hilla jest asymptotycznie normalny, otrzymujemy przedział ufności na poziomie p dla indeksu Pareto:

$$(\gamma_{opt}^-, \gamma_{opt}^+) = \left(\frac{\gamma_{opt}}{1 + \frac{z_{p/2}}{\sqrt{k_{opt}}}}, \frac{\gamma_{opt}}{1 - \frac{z_{p/2}}{\sqrt{k_{opt}}}} \right). \quad (5.2.8)$$

Wykres kwantylowy służy także do estymacji kwantyli. Kładąc w (5.2.7) z $k = k_{opt}$ oraz $x = -\log p$ możemy traktować y jako estymator $\log Q(1-p)$ lub $\exp(y)$ jako estymator $Q(1-p)$, oznaczmy go przez $\hat{q}_{n,p}$.

$$\log \hat{q}_{n,p} = \log X_{n-k}^* + H_{k,n} \log \left(\frac{k+1}{(n+1)p} \right).$$

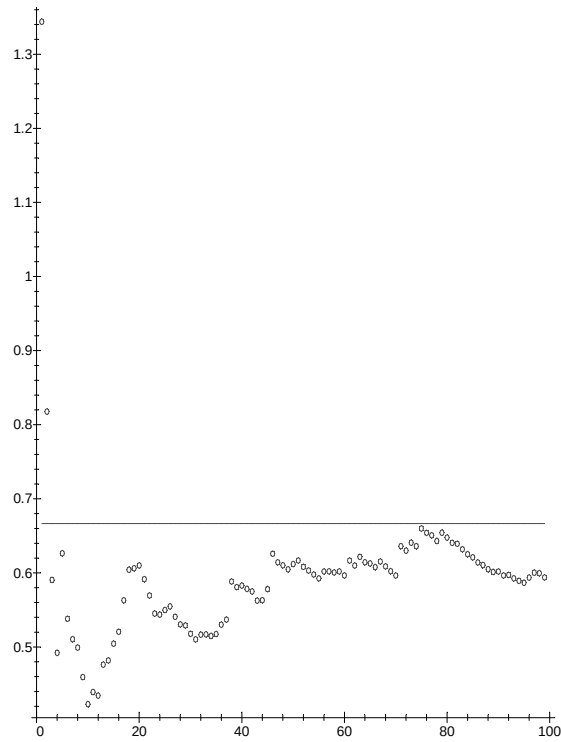
Daje to

$$\hat{q}_{n,p} = X_{n-k}^* \left(\frac{k+1}{(n+1)p} \right)^{H_{k,n}}, \quad (5.2.9)$$

gdzie $\hat{q}_{n,p}$ jest kwantylem rzędu p opartym na próbce n elementowej. Używając przedziału ufności dla γ_{opt} dostajemy analogiczne oszacowanie dla $\hat{q}_{n,p}$:

$$\left(X_{n-k}^* \left(\frac{k+1}{(n+1)p} \right)^{\gamma_{opt}^-}, X_{n-k}^* \left(\frac{k+1}{(n+1)p} \right)^{\gamma_{opt}^+} \right). \quad (5.2.10)$$

Estymator Hilla



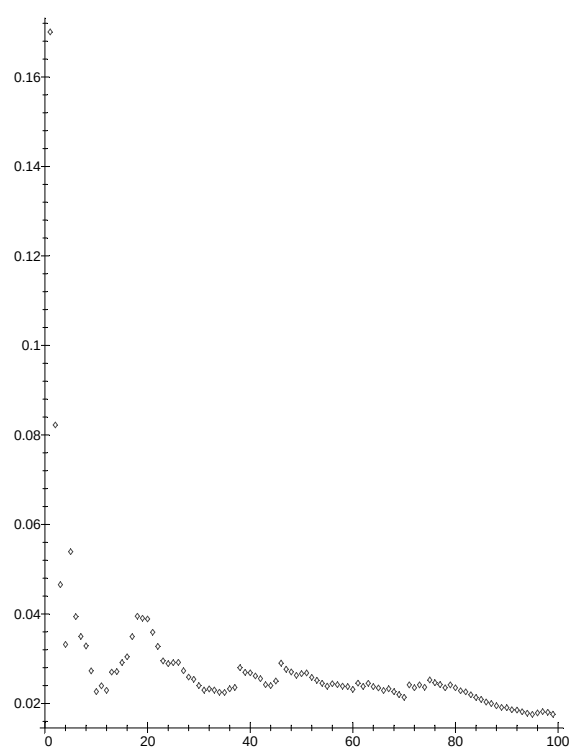
Podobnie jak wyżej dokonujemy estymacji $P(X > x)$:

$$\left(\frac{k+1}{n+1}\right) \left(\frac{x}{X_{n-k}^*}\right)^{-1/H_{k,n}}. \quad (5.2.11)$$

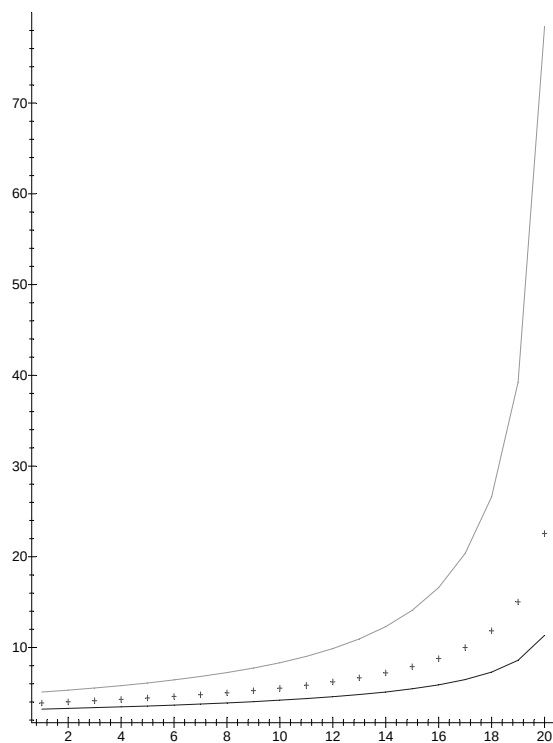
Przykład 5.2.2 ⁴Wygenerowano 100 liczb z rozkładu $Par(1.5, 1)$. Mamy wtedy $\gamma = 1/\alpha = 0.66$. Przedstawimy najpierw wykres dla estymatora Hilla:

Wyliczamy wartości $MSE(k)$ dla $k = 1, \dots, n$. Z rysunku odczytujemy, że k_{opt} jest pomiędzy 90 a 100. Wyliczając: $k_{opt} = 95$.

MSE dla indeksu Hilla



Przedział ufności dla kwantyli



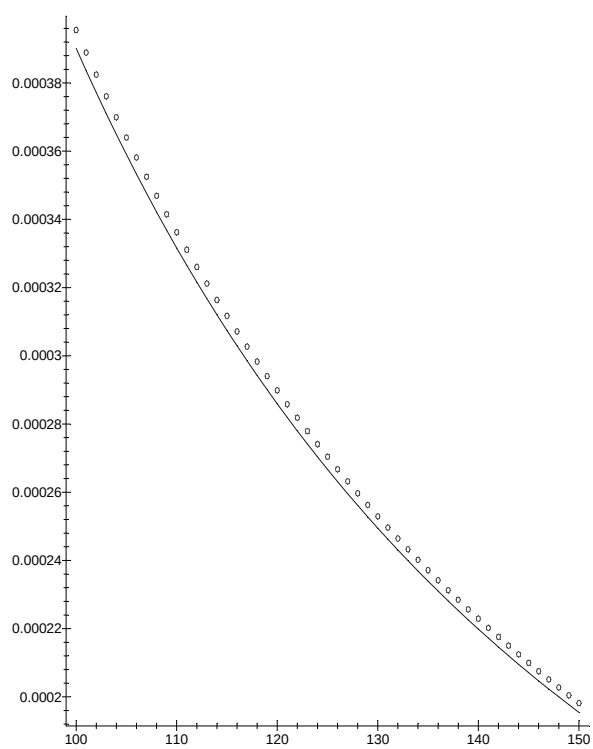
Wartość $H_{k_{opt},n} = \gamma_{opt} = 0.5867$ daje optymalny wybór dla estymatora parametru γ . Ze wzoru (5.2.8) dostajemy dla $p = 0.05$: $[0.48, 0.73]$, a więc prawdziwa wartość 0.66 należy do przedziału ufności.

Dalej, ze wzorów (5.2.9), (5.2.10) dostajemy kwantyle wraz z przedziałem ufności:

Następnie estymujemy wartości $P(X > x)$ za pomocą wzoru (5.2.11) (kółka) i $P(X > x) = x^{-\alpha_{opt}}$ (linia ciągła). Wartości te pokrywają się.

⁴ciagle-4.mws

Dopasowanie ogona



□

Pojawiają się dwa naturalne pytania:

1. Czy warto stosować skomplikowaną procedurę otrzymywania estymatora Hilla zamiast np. używać metodę momentów?
2. Jeżeli pozytywnie odpowiemy na poprzednie pytanie, to po co estymować wartości $P(X > u)$ za pomocą wzoru (5.2.11) zamiast od razu z $P(X > x) = x^{-\alpha_{opt}}$?

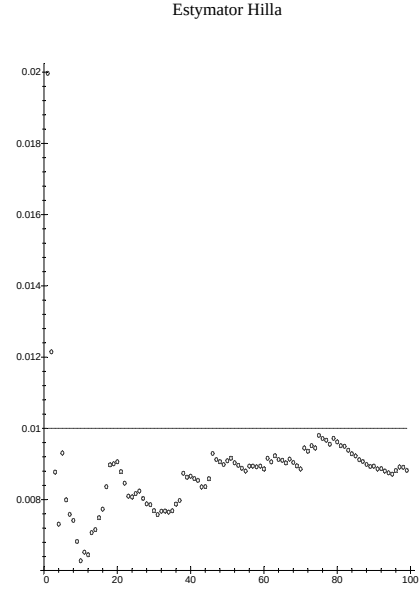
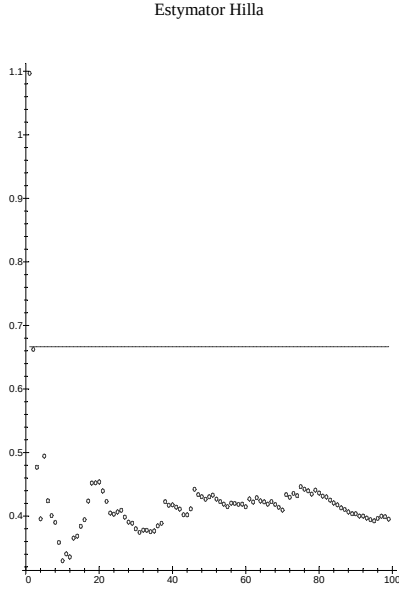
W przypadku pierwszego pytania odpowiedź otrzymamy w rozdziale poświęconym ciężkim ogonom. Estymatory MM są obarczone dużym błędem. Po drugie estymatory MM stosują się w przypadku rozkładu Pareto $P(X > x) = x^{-\alpha}$, a nie rozkładu typu Pareto $P(X > x) = x^{-\alpha}L(x)$ z nieznaną funkcją L . Powyższa uwaga daje też odpowiedź na drugie pytanie. Nie wiemy, czy nasze dane pochodzą z rozkładu Pareto czy z rozkładu typu Pareto i przyjęcia założenia, że $L(x) \equiv 1$ może prowadzić do znacznych błędów.

Przykład 5.2.3 ⁵Wygenerowano 100 liczb z rozkładu o dystrybuancie $1 - x^{-1.5} / \ln(\exp(1) * x)$, $x \geq 1$ oraz z o dystrybuancie $1 - x^{-100} / \ln(\exp(1) * x)$, $x \geq 1$. W każdym przypadku policzyliśmy estymator Hilla, odpowiednio lewy irawy rysunek.

Estymator zachowuje się źle dla $\alpha = 1.5$. Wytlumaczenie może być następujące. Funkcja $\ln(\exp(1) * x)$ powoduje szybsze malenie ogona. W efekcie estymator ma tendencję do pokazywania większej wartości niż prawdziwe α , czyli mniejsze wartości niż prawdziwe γ . W przypadku $\alpha = 100$ ogon maleje na tyle szybko, że dodatkowy efekt jest niezauważalny.

□

⁵ciagle-5.mws



5.3 Rozkłady z ciężkimi ogonami

W praktyce stosuje się często metodę momentów, tzn. estymuje się parametry modelu na bazie momentów próbkowych, np.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Rozważmy próbę $X_1, \dots, X_n$ z rozkładu $Par(\alpha, 1)$ i założmy na moment, że wiemy iż $X_n^* = \max\{X_1, \dots, X_n\} \leq d$. Obliczamy

$$\begin{aligned} E[\hat{\mu} | X_n^* \leq d] &= E[\hat{\mu} | X_1 \leq d, \dots, X_n \leq d] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i | X_1 \leq d, \dots, X_n \leq d] \\ &= E[X_1 | X_1 \leq d, \dots, X_n \leq d] \\ &= E[X_1 | X_1 \leq d] \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1 - (1 + d)^{-(\alpha-1)}}{1 - (1 + d)^{-\alpha}} - 1. \end{aligned}$$

Ponieważ prawdziwa średnia wynosi $\frac{1}{\alpha-1}$, więc błąd względny jaki popełniamy estymując średnią za pomocą $\hat{\mu}$ wynosi:

$$b := \frac{E[\hat{\mu}|X_n^* \leq d] - \frac{1}{\alpha-1}}{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{-\alpha(1+d)^{-(\alpha-1)} - (1+d)^{-\alpha}}{1 - (1+d)^{-\alpha}}.$$

Niech teraz $p \in (0, 1)$ i wybierzmy d takie, że $P(X_n^* \leq d) = p$, tzn. chcemy aby z (dużym) prawdopodobieństwem p nie popełniać błędu zakładając, że $X_n^* \leq d$. Wtedy

$$P(X_n^* \leq d) = (1 - (1+d)^{-\alpha})^n = p,$$

a stąd

$$b := -\alpha \frac{(1-p)^{(\alpha-1)/\alpha} - (1-p)^{1/n}}{p^{1/n}}.$$

Biorąc standardowe wartości $p = 0.99$ i $p = 0.95$ oraz próbę o liczebności $n = 100$ dostajemy dla różnych parametrów α :

W szczególności, jeżeli $\alpha = 1.5$ i $p = 0.95$ to błąd wynosi -12% . Jeśli więc prawdziwy parametr wynosi 1.5 , to nasza estymacja dla średniej jest aż o 12% za niska 'w 95 na 100 przypadkach'.

Powyższe rozważania pokazują, że używanie średniej próbkowej jako estymatora średniej jest bardzo niebezpieczne w przypadku rozkładu Pareto i ogólniej, w przypadku **rozkładów ciężkoogonowych**.

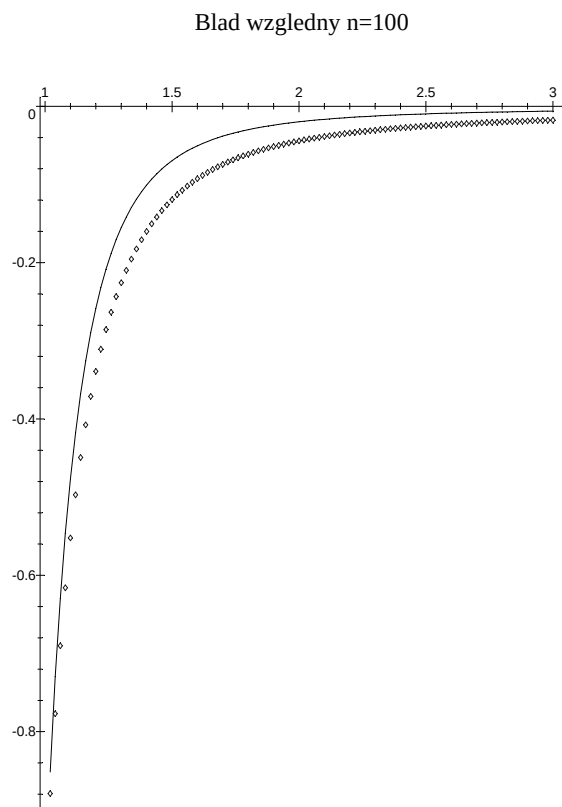
Dla nieujemnych zmiennych losowych i dla rozkładów skoncentrowanych na półprostej dodatniej istnieje wiele sposobów wyrażenia intuicji: zmienna X przyjmuje "duże" wartości z "istotnym" prawdopodobieństwem.

Definicja 5.3.1 Niech $F(0) = 0$. Zmienna losowa $X \sim F$ ma ciężki ogon, jeśli jej funkcja tworząca momenty

$$M(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) = \infty$$

dla wszystkich $s > 0$.

Uwaga 5.3.2 Dla rozkładu F z ciężkim ogonem $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \bar{F}(x) = \infty$ dla wszystkich $s > 0$.



Rysunek 5.3.1: Błąd względny dla $n = 100$ oraz $p = 0.95$ (linia kropkowana) i $p = 0.99$ (linia ciągła)

5.3.1 Klasy podwykładnicze

Rozkłady podwykładnicze są specjalną klasą rozkładów o ciężkich ogonach. Tego typu rozkłady często stosuje się w modelach ubezpieczeniowych do modelowania wielkości szkód po pożarach, huraganach lub powodziach.

Definicja 5.3.3 Rozkład F na $(0, \infty)$ nazywamy podwykładniczym jeśli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} = 2.$$

Klasę podwykładniczych rozkładów oznaczamy przez $\mathcal{S}$.

Niech $(X_i)_{i \geq 1}$ będą niezależnymi dodatnimi zmiennymi losowymi z tym samym rozkładem F takim, że $F(x) < 1$ dla wszystkich $x > 0$. Oznaczmy przez

$$\bar{F}^{n*}(x) = 1 - F^{n*}(x) = P(X_1 + \dots + X_n > x)$$

ogon n -tego spłotu F .

Twierdzenie 5.3.4 Warunek $F \in \mathcal{S}$ jest równoważny każdemu z następujących warunków:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} = n$ dla pewnego $n \geq 2$,
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, \dots, X_n) > x)} = 1$ dla pewnego $n \geq 2$.

Jeżeli F jest rozkładem podwykładniczym, to funkcja tworząca momenty nie istnieje.

Definicja 5.3.5 Niech F będzie rozkładem na $(0, \infty)$ takim, że $F(x) < 1$ dla wszystkich $x > 0$. Mówimy, że $F \in \mathcal{S}^*$, jeśli F ma skończoną średnią $\mu > 0$ i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \bar{F}(y) dy = 2\mu.$$

Twierdzenie 5.3.6 Jeśli $F \in \mathcal{S}^*$, wtedy $F \in \mathcal{S}$ i $\tilde{F} \in \mathcal{S}$, gdzie

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(u) du$$

jest rozkładem resztowym.

Powyższe twierdzenia mają ogromne znaczenia dla wyliczania prawdopodobieństwa ruiny dla rozkładów ciężkoogonowych (Rozdział 5.3).

Przykład 5.3.7 Typowe przykłady rozkładów z klasy $\mathcal{S}^*$ to $Wei(r, c)$, $0 < r < 1$, $c > 0$; $Par(\alpha, c)$, $\alpha > 1$; $LN(\mu, \sigma^2)$.

□

Rozdział 6

Dodatek

6.1 Funkcje specjalne

- **Funkcja Gamma**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Zachodzi: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

- **Niekompletna funkcja Gamma**

$$\Gamma(x, a) = \int_a^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

- **Funkcja Beta**

$$B(a, b) := \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

Zachodzi: $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

6.2 Parametry i funkcje rozkładów

Niech X będzie zmienną losową. Ze zmiennymi losowymi będziemy utożsamiali następujące funkcje:

- **Dystrybuanta**

$$F(x) = F_X(x) := P(X \leq x);$$

- **Funkcja przeżycia (ogon rozkładu)**

$$\bar{F}(x) := 1 - F(x);$$

- **Gęstość**

$$f(x) = f_X(x) = \frac{d}{dx}F(x);$$

- **Funkcja tworząca momenty**

$$M(t) = M_X(t) = E[\exp(tX)];$$

- **Funkcja tworząca kumulanty**

$$C(t) = C_X(t) = \log M_X(t).$$

- **Funkcja tworząca prawdopodobieństwa**

$$P(t) = P_X(t) = E[t^X] = M_X(\log t).$$

Oznaczmy teraz $\mu_k(X) = E[X^k]$, $m_k(X) = E[(X - E[X])^k]$. W przypadku, gdy wiadomo o jaką zmienną losową chodzi piszemy m_k i μ_k . Parametr μ_k nazywany jest k -tym **momentem zwykłym**, m_k - k -tym **momentem centralnym**. W szczególności $\mu_1 =: \mu$ jest średnią, a m_2 jest wariancją. Parametr $\gamma_3 := \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$ jest nazywany **skośnością**, a $\gamma_4 := \frac{m_4}{m_2^2} - 3$ **kurtozą**. Iloraz $\gamma_1 := \frac{m_2}{\mu}$ nazywamy **indeksem dyspersji**, a $\gamma_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\mu}$ **współczynnikiem zmienności**.

Drugi i trzeci moment centralny można wyrazić za pomocą momentów zwykłych:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2, \\ E[(X - E[X])^3] &= E[X^3] - 3E[X]E[X^2] + 2(E[X])^3. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące wzory pozwalające wyliczać momenty za pomocą funkcji tworzących:

$$M^{(k)}(0) = E[X^k],$$

$$C_X^{(1)}(0) = E[X], \quad C_X^{(2)}(0) = \text{Var}[X], \quad C_X^{(3)}(0) = E[(X - E[X])^3].$$

Tak więc pochodne funkcji tworzącej momenty pozwalają wyliczać momenty centralne, podczas gdy funkcji tworzącej C_X zwane są **kumulantami**.

6.3 Estymacja momentów

Najpopularniejszą metodą estymacji parametrów μ_k i m_k jest metoda momentów. Zasada jest następująca: estymujemy 'momenty teoretyczne' za pomocą odpowiednich momentów próbkowych dla danych $X_1, \dots, X_k$. I tak

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i =: \bar{X}; \quad E[\hat{\mu}_1] = \mu_1, \quad \text{Var}[\hat{\mu}_1] = \frac{\sigma^2}{k}$$

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - \mu_1)^2 \quad \mu_1 \text{ znane,}$$

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2 =: S^2 \quad \mu_1 \text{ nieznane;} \quad E[\hat{m}_2] = m_2; \quad \text{Var}[\hat{m}_2] = \frac{2m_2^2}{k-1}.$$

6.4 Rozkłady dyskretne

6.4.1 Rozkład dwumianowy $\text{Bin}(n, p)$

Jeżeli

$$P(X = m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m},$$

gdzie $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, \dots, n$, to X ma rozkład dwumianowy $\text{Bin}(n, p)$. Mamy

$P(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
$(q + pt)^n$	np	npq	q	$\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{np}}$	$n \frac{(q-p)}{\sqrt{npq}}$	$3 + \frac{1-6pq}{npq}$

Rozważmy teraz próbę $X_1, \dots, X_k \sim \text{Bin}(n_i, p)$, gdzie $\sum_{i=1}^k n_i = n$ jest znane. Parametr p rozkładu estymujemy w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{n}, \\ E[\hat{p}] &= p, \\ \text{Var}[\hat{p}] &= pq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

6.4.2 Rozkład Poissona $Poi(\lambda)$

Jeżeli

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

gdzie $\lambda > 0$, $m = 1, 2, 3, \dots$, to X ma rozkład Poissona $Poi(\lambda)$.

$P(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
$\exp(\lambda(t-1))$	λ	λ	1	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{1}{\lambda}$

Dla próby $X_1, \dots, X_k \sim Poi(\lambda)$,

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{k} \\ E[\hat{\lambda}] &= \lambda \\ \text{Var}[\hat{\lambda}] &= \frac{\lambda}{k}\end{aligned}$$

6.4.3 Rozkład ujemny dwumianowy $Bin^-(r, p)$

Jeżeli

$$P(X = m) = \binom{r+m-1}{m} p^r q^m,$$

$r \in \mathbf{R}_+$, $m = 0, 1, \dots$, tzn. X ma rozkład ujemny dwumianowy $Bin^-(r, p)$.

$P(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
$\left(\frac{p}{1-qt}\right)^r$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{\sqrt{rq}}$	$\frac{1+q}{\sqrt{rq}}$	$3 + \frac{p^2+6q}{rq}$

Jeżeli $r \in \mathbf{N}$, to dostajemy rozkład Pascala, jeżeli $r = 1$ - rozkład geometryczny $Geo(p)$. Jeżeli X ma rozkład $Geo(p)$ to zmienna losowa M o rozkładzie warunkowym takim jak X pod warunkiem $X > 0$ ma przesunięty rozkład geometryczny z $P(M = n) = pq^n$, $n \in \{1, 2, \dots\}$. Oba rozkłady geometryczne różnią się średnią, wariacje są takie same. Inaczej: M ma rozkład postaci $Geo(p) * \delta_1$.

Na podstawie próby $X_1, \dots, X_k \sim Poi(\lambda)$, estymacja wygląda następująco:

1. r znane:

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{r-1}{r + \sum_{i=1}^k X_i/k - 1}, \\ E[\hat{\lambda}] &= p\end{aligned}$$

2. r i p nieznane:

$$\begin{cases} \hat{r} = \frac{\overline{X^2}}{S^2 - \overline{X}} \\ \frac{1-\hat{p}}{\hat{p}} = \frac{S^2}{\overline{X}} - 1 \end{cases}$$

6.5 Rozkłady ciągłe

6.5.1 Rozkład normalny

Gęstość zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym ze średnią μ i wariancją σ^2 jest postaci

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x - \mu)^2/2\sigma^2).$$

Piszemy wtedy $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Jeżeli $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 1$ to mówimy o standardowym rozkładzie normalnym.

Parametry:

$M(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
$e^{\frac{(t\sigma)^2}{2} + t\mu}$,	μ	σ^2	$\frac{\sigma^2}{\mu}, \mu \neq 0$	$\frac{\sigma}{\mu}, \mu \neq 0$	0	0

Mając dane $X_1, \dots, X_k$, parametry μ i σ estymujemy metodą momentów.

6.5.2 Rozkład odwrotny normalny $IG(\mu, \sigma^2)$

Niech X ma gęstość zadaną wzorem

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\sigma}{2\mu} \left(\frac{x}{\mu} - 2 + \frac{\mu}{x}\right)\right\},$$

gdzie $\mu \in R$, $\sigma > 0$, $x \in \mathbf{R}$, tzn. X ma rozkład odwrotny normalny $IG(\mu, \sigma^2)$.

Parametry:

$M(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
,	μ	$\frac{\mu^3}{\sigma}$	$\frac{\mu^2}{\sigma}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}$	$3\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}$	$\frac{15\mu}{\sigma}$

Dla próby $X_1, \dots, X_k \sim IG(\mu, \sigma^2)$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i,$$

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (X_i^{-1} - \bar{X}^{-1})^2 \right]^{-1}.$$

6.5.3 Rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma)$

Niech X ma gęstość zadaną wzorem

$$f(x) = \frac{1}{(x\sigma\sqrt{2\pi})} \exp\left(\frac{-(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0, \mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0.$$

Wtedy X ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma)$.

$M(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
,	$e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$			$(e^{\sigma^2} + 2)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$	$e^{\sigma^4} + 2e^{\sigma^3} + 3e^{\sigma^2} - 3$

Jeśli Y jest $N(\mu, \sigma)$, to $X = e^Y \sim LN(\mu, \sigma)$.

Dla próby $X_1, \dots, X_k \sim LN(\mu, \sigma^2)$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_i,$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\log X_i - \hat{\mu})^2}.$$

6.5.4 Rozkład wykładniczy $Exp(\lambda)$

Niech X ma gęstość zadaną wzorem

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

gdzie $x > 0, \lambda > 0$, tzn. X ma rozkład wykładniczy $Exp(\lambda)$.

Parametry:

$M(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
$\frac{\lambda}{\lambda-t},$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$	1	0	

Dla próby $X_1, \dots, X_k \sim \text{Exp}(\lambda)$,

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\sum_{i=1}^k X_i}.$$

6.5.5 Rozkład Gamma $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$

Niech X ma gęstość zadaną wzorem

$$f_X(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x},$$

$\alpha > 0, \beta > 0, x > 0$, tzn. X ma rozkład Gamma $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$.

$M(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
$\frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha},$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\frac{1}{\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$		

Jeżeli $X \sim \Gamma(1, \beta)$, to $X \sim \text{Exp}(\beta)$.

Dla próby $X_1, \dots, X_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{(\bar{X})^2}{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \\ \hat{\beta} &= \frac{\bar{X}}{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2}. \end{aligned}$$

6.5.6 Rozkład Weibulla $\text{Wei}(r, c)$

Niech X ma gęstość zadaną wzorem

$$f(x) = rcx^{r-1} \exp(-cx^r), \quad x > 0,$$

gdzie $0 < r$ jest parametrem kształtu, $c > 0$ jest parametrem skali. Wtedy X ma rozkład Weibulla $\text{Wei}(r, c)$.

$M(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
$, \quad \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{r}} \Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right) - \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{r}} \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{r} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right) \right]^2 \right\}$						

Jeśli X jest $Wei(1, c)$, to $X \sim Exp(c)$.

Dla próby $X_1, \dots, X_n \sim Wei(r, c)$ parametry c i r estymujemy rozwiązując układ równań:

$$\begin{aligned} c \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^r &= 1 \\ \frac{r}{k} \sum_{i=1}^k (c X_i^r - 1) \log X_i &= 1 \end{aligned}$$

6.5.7 Rozkład Pareto $Par(\alpha, c)$

Niech X ma gęstość zadaną wzorem

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{c}\right) \left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha+1}, \quad x > c,$$

gdzie $\alpha > 0$, a $c > 0$ jest parametrem skali. Wtedy X ma rozkład Pareto $Par(\alpha, c)$.

$M(t)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
nie istnieje	$c \frac{\alpha}{\alpha-1}, \alpha > 1$	$c^2 \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \alpha > 2$			$2 \frac{\alpha+1}{\alpha-3} \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}, \alpha > 3$	

Bibliografia

- [1] S. Asmussen (2000). *Ruin probabilities*. World Scientific.
- [2] N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbitt (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.
- [3] F. Bassi, P. Embrechts, M. Kafetzaki (1997). *A survival kit on quantile estimation*. Switzerland: Departament of Mathematics, ETHZ, CH-8092 Zürich.
- [4] J. Beirlant, J. L. Teugels, P. Vynckier (1996). *Practical analysis of extreme values*. Leuven University Press, Belgia.
- [5] N. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels (1989). *Regular variation*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] H. Bühlmann (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer Verlag, Nowy Jork.
- [7] C.D. Daykin, T. Pentikäinen i M. Pesonen (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman & Hall, Londyn.
- [8] A. Dąbrowski (2000). *Statystyka matematyczna*. Skrypt, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
- [9] P. Duszeńko (2001). *Reasekuracja; typy i ich własności*. Praca magisterska, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski.
- [10] P. Embrechts, C. Klüppelberg i T. Mikosch (1997). *Modelling extremal events. For insurance and finance*. Springer-Verlag, Berlin.
- [11] W. Feller (1981). *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [12] J. Grandell (1991). *Aspects of risk theory*. Springer-Verlag, New York.
- [13] J. Jakubowski i R. Sztencel. (2000) *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT.

- [14] P. Jaworski i J. Micał (2005). *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Poltext, Warszawa.
- [15] J. Koronacki i J. Mielniczuk. (2001) *Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych*. WNT.
- [16] M. Mosior (2001). *Komputerowe aproksymacje prawdopodobieństwa ruiny i maksymalizacja zysków przy użyciu optymalnej kontroli dywidendy*. Praca dyplomowa, Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławska.
- [17] Müller, A. and Stoyan, D. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley, Chichester, 2002.
- [18] W. Niemirowicz (1997). *Teoria wiarygodności*. Podyplomowe Studium Ubezpieczeń WNE UW.
- [19] D. Pfeifer (1996-97). *Versicherungsmathematik*. Materiały do wykładów i ćwiczeń, Universität Hamburg.
- [20] R.-D. Reiss, M. Thomas (1997). *Statistical Analysis of Extreme Values from Insurance, Finance, Hydrology and other fields*. Birkhäuser Verlag.
- [21] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. L. Teugels (1998). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons.
- [22] H-P. Schmidli (2002). *Lecture notes on Risk Theory*. University of Aarhus, Denmark.
- [23] K. Schmidt (1996). *Lectures on Risk Theory*. Teubner, Stuttgart.
- [24] E. Straub (1988). *Non-Life Insurance Mathematics*. Springer, Association of Swiss Actuaries, Zurich.
- [25] B. Sundt. (1993). *An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics*. Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe.
- [26] S. Wieteska (2001). *Zbiór zadań z matematycznej teorii ryzyka ubezpieczeniowego*. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- [27] A. Wojtala (2002). *Matematyka ubezpieczeń majątkowych - teoria i zadania*. Praca magisterska, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski.
- [28] H. Albrecher, C. Constantinescu, S. Loisel, *Explicit ruin formulas for models with dependence among risks*, Insurance: Mathematics and Economics 48, 265-270, 2011.

- [29] S. Wanat, *Modelowanie struktur zależności za pomocą funkcji połączeń w analizie ryzyka ubezpieczyciela*, Acta universitatis lodziensis, folia oeconomica 254, 2011.
- [30] R.Szekli, *Matematyka ubezpieczeń majątkowych i osobowych*, skrypt do wykładu, Uniwersytet Wrocławski, 2010.
- [31] Roger B.Nelsen, *An Introduction To Copulas*, Second Edition, USA, 2006.
- [32] M.Denuit, J.Goovaerts, M.Kaas, *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, Wiley & Sons, New York, 2005.
- [33] H.C. Yeh, *The frailty and the Archimedean structure of the general multivariate Pareto distributions*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica 2 (3), 713-729, 2007.
- [34] S.Alink, M.Loewe, M.Wuethrich, *Diversification of aggregate dependent risks*, Insurance: Mathematics and Economics 35(1), 77-95, 2004.
- [35] T.Schmidt, *Coping with copulas*, Leibzig, 2006.
- [36] H.Albrecher, D.Kortschak, *On ruin probability and aggregate claim representations for Pareto claim size distributions*, Insurance: Mathematics and Economics 45(3), 362-373, 2009.
- [37] T.Rolski, V.Schmidt, H.Schmidli, J.Teugels, *Stochastic processes for insurance and finance*, J.Wiley & Sons, Chichester, 1999.
- [38] W. Feller, *An introduction to probability theory and its application*, Vol. II, J.Wiley & Sons, New York, 1970.
- [39] C.Genest, R.J. MacKay, *Copules archimediennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont donnees* Canadian Journal of Statistics 14, 145159, (1986b).

Spis rysunków

4.3.1	33
4.4.1 Trajektorie procesu ryzyka	34
5.1.1 Wykładniczy wykres kwantylowy dla 100 danych z rozkładów $Exp(2)$ i $Par(1.1, 1)$. Lewy wykres pokazuje dobre dopasowanie do rozkładu wykładniczego, podczas gdy prawy wykres pokazuje, że dane zostały z rozkładu 'cięższego' niż wykładniczy.	61
5.1.2 Funkcja nadwyżki dla 300 danych z rozkładów $Exp(3)$ i $Par(3, 1)$	63
5.3.1 Błąd względny dla $n = 100$ oraz $p = 0.95$ (linia kropkowana) i $p = 0.99$ (linia ciągła) .	75