

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA A, LISTA ZADAŃ 11.

1. Niech (X, Y) mają łączną gęstość $f(x, y) = c(x + y)\mathbf{I}_{(0,1) \times (0,1)}(x, y)$. Wylicz c oraz $P(X < 1/2)$.
2. Niech (X, Y) mają łączną gęstość $f(x, y) = 1\mathbf{I}_{(0,1) \times (0,1)}(x, y)$. Wylicz $P(XY < z)$.
3. Jeśli (X, Y) mają łączną gęstość $f_{(X,Y)}(x, y)$ oraz gęstości brzegowe

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dy$$

i

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dx,$$

to

$$f_X(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

dla każdego ustalonego $y \in R$ określa gęstość na R (nazywamy ją **gęstością warunkową X pod warunkiem $Y = y$**). Policz tą gęstość, gdy $X = \text{gamma}(n, \lambda)$, $Y = X + Z$, gdzie Z jest niezależna od X i $Z = \text{gamma}(m, \lambda)$.

4. Niech (X, Y) mają łączną gęstość $f(x, y) = (x + 2y^3)\mathbf{I}_{(0,1) \times (0,1)}$. Wylicz gęstości brzegowe X i Y .
5. Niech (X, Y, Z) będzie losowym punktem w kuli jednostkowej, tzn.

$$f(x, y, z) = (3/4\pi)\mathbf{I}_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}}(x, y, z).$$

Znajdź gęstość brzegową (X, Y) .

6. Niech (X, Y) mają łączną gęstość $f(x, y) = 6xy^2\mathbf{I}_{(0,1) \times (0,1)}(x, y)$. Wylicz $P(X + Y < 1)$.
7. W pewnej loterii wybiera się losowo liczbę całkowitą między 0 i 999. Gramy w tej loterii 250 razy. Użyj przybliżenia Poissona do przybliżenia prawdopodobieństwa, że ani razu nie wygramy i porównaj wynik z dokładną odpowiedzią.

8. Firma ubezpieczeniowa ubezpiecza 3000 osób, z których każda ma $1/1000$ szansę wypadku w danym roku. Użyj przybliżenia Poissona do oszacowania prawdopodobieństwa, że będą co najwyżej 2 wypadki.
9. Rzucamy monetą symetryczną 900 razy, oznaczając wynik w i -tym rzucie X_i , gdzie $X_i \in \{0, 1\}$. Użyj CTG do przybliżenia prawdopodobieństwa, że uzyskamy co najmniej 465 orłów. Porównaj z $P(X_1 + \dots + X_{900} \geq 464.5)$ oraz z wynikiem dokładnym.
10. Załóżmy, że ilość klientów przychodzących do punktu obsługi w ciągu jednej godziny jest zmienną losową o rozkładzie Poissona i wynosi średnio 225. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zgłosi się w ciągu 1 godziny mniej niż 200 klientów? (Użyj CTG).
11. Gramy w ruletkę stawiając 1 za każdym razem na czarne. Wygrywamy w i -tej grze 1 z prawdopodobieństwem $18/38$, przegrywamy 1 z prawdopodobieństwem $20/38$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że saldo gry będzie dodatnie po 81 grach? (Użyj CTG).
12. (Całkowanie metodą Monte Carlo) Niech r będzie taka, że $\int_0^1 |r(x)| dx < \infty$. Jeśli $U_1, U_2, \dots$ są iid o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$ to pokaż, że $(r(U_1) + \dots + r(U_n))/n \xrightarrow{P_{n \rightarrow \infty}} \int_0^1 r(x) dx$, (zbieżność według prawdopodobieństwa).
13. Zdefiniujmy na podzbiorach $\Omega = \{0, 1, 2\}^n$, $n \in \mathbb{N}_+$ miarę poprzez zadanie wartości na jednoelementowych podzbiorach

$$P(\{\omega\}) = p_{\omega_1} p_{\omega_1, \omega_2} p_{\omega_2, \omega_3} \cdots p_{\omega_{n-1}, \omega_n},$$

gdzie $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_i \in \{0, 1, 2\}$, oraz $p_i, p_{i,j}$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$ są liczbami z odcinka $[0, 1]$, takimi, że $\sum_j p_{i,j} = 1$, dla każdego i oraz $\sum_i p_i = 1$. Sprawdź, że P jest miarą probabilistyczną. Kiedy tak opisana przestrzeń sprowadza się do schematu Bernoulliego?

14. Na przestrzeni z poprzedniego zadania definiujemy zmienne losowe $X_i(\omega) = \omega_i$. Wylicz prawdopodobieństwa $P(X_1 = 0)$, $P(X_1 = 1)$, $P(X_2 = 0)$, $P(X_2 = 1)$, $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$, $P(X_2 = 0|X_1 = 0)$, $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$, $P(X_2 = 0|X_1 = 1)$, $P(X_3 = 1|X_2 = 1, X_1 = 1)$, $P(X_3 = 1|X_2 = 1)$, $P(X_n = 0|X_{n-1} = 1)$, $P(X_n = 1|X_{n-1} = 0, X_{n-2} = 1, \dots, X_1 = 0)$.
15. Zbuduj analogicznie przestrzeń, gdy $\Omega = \{0, 1, \dots, m\}^n$. Sprawdź, czy $P(X_n = j|X_{n-1} = i, X_{n-2} = 1, \dots, X_1 = 0) = P(X_n = j|X_{n-1} = i)$, dla $i, j \in \Omega$. Wylicz $P(X_3 = j)$. Jak zapisać wartość tego prawdopodobieństwa przy użyciu macierzy $\mathbf{P} = [p_{i,j}]_{i,j \in \{0,1,\dots,m\}}$?

NADOBOWIAŹKOWE po 6pkt

16. (tw. o zbieżności monotonicznej) Niech $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots$ będzie (rosnącym) ciągiem nieujemnych zmiennych losowych, takich, że $X_n(\omega) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} X(\omega)$ dla każdego $\omega \in \Omega$. Załóżmy, że $EX < \infty$. Pokaż, że wtedy $E(X_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} EX$.
17. (tw. o zbieżności ograniczonej) Niech $X_1, X_2, X_3, \dots$ będzie ciągiem zmiennych losowych, takim, że $X_n(\omega) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} X(\omega)$ dla każdego $\omega \in \Omega$. Pokaż, że jeśli istnieje zmienna losowa Y taka, że $EY < \infty$ oraz $|X_n| \leq Y$ dla każdego n , to $E(X_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} EX$.