

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA A, LISTA 12

1. Niech $\mathbb{E} = \{e_0, e_1, \dots, e_M\}$ będzie dowolnym zbiorem skończonym. Zdefiniujmy na podzbiorach $\Omega = \mathbb{E}^n$ funkcję P , poprzez zadanie wartości na jednoelementowych podzbiorach o elementach postaci $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_i \in \mathbb{E}$,

$$P(\{\omega\}) = p_{\omega_1} p_{\omega_1, \omega_2} p_{\omega_2, \omega_3} \cdots p_{\omega_{n-1}, \omega_n},$$

gdzie dla $p_{ij} = p_{e_i, e_j}$ oraz $p_i = p_{e_i}$, które są liczbami z odcinka $[0, 1]$, zachodzi

$$\sum_j p_{ij} = 1, i = 0, \dots, M,$$

$$\sum_i p_i = 1.$$

Sprawdź, że P jest miarą probabilistyczną na podzbiorach Ω . (Macierz $\mathbb{P} = [p_{ij}]_{0 \leq i, j \leq M}$ nazywamy macierzą prawdopodobieństw przejść.)

2. Dla przestrzeni z poprzedniego zadania, niech $X_i(\omega) = \omega_i$, będą zmiennymi losowymi o wartościach w przestrzeni stanów $\mathbb{E}$. Sprawdź, że

$$P(X_{k+1} = e_j | X_k = e_i) = p_{ij},$$

dla każdego $k = 1, \dots, n-1$, $i, j \in \{0, \dots, M\}$. (Prawdopodobieństwo przejścia od stanu e_i do stanu e_j dane jest przez p_{ij} , tzn. przez elementy macierzy prawdopodobieństw przejść.)

3. Niech $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, gdzie $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach $P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = 1/2$. Sprawdź, że $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{10}$ jest łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów

$$\mathbb{E} = \{-10, -9, \dots, 0, 1, 2, \dots, 10\}$$

i znajdź odpowiadającą mu macierz prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P}$.

4. Niech $(Z_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych iid o wartościach naturalnych. Niech $X_{n+1} = \max(0, X_n - 1) + Z_{n+1}$, $n \geq 0$, $X_0 = 0$. Pokaż, że ciąg $(X_n)_{n \geq 0}$ jest łańcuchem Markowa. Czy można zinterpretować X_n jako ilość aut do naprawy w kolejnym dniu warsztacie naprawiającym 1 auto dziennie?

5. Niech $(Z_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych iid o wartościach naturalnych. Niech $X_0 = S$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - Z_{n+1}, & s < X_n \leq S \\ S - Z_{n+1}, & X_n \leq s, \end{cases}$$

dla $s < S$ naturalnych liczb. Pokaż, że $(X_n)_{n \geq 0}$ jest łańcuchem Markowa. Czy można zinterpretować X_n jako stan magazynu w n tym dniu?

6. Niech $(Z_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych iid o wartościach naturalnych. Niech $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$, gdzie funkcja f przyjmuje wartości rzeczywiste. Jakie ogólne założenia na funkcję f zaproponujesz, tak aby $(X_n)_{n \geq 0}$ był łańcuchem Markowa. Jakie założenia na X_0 są potrzebne w tym celu?

7. Niech X_n oznacza stan pogody w n tym dniu, przy czym 1 = pogoda deszczowa, 2 = pogoda słoneczna. Niech nasz model pogody będzie łańcuchem Markowa o macierzy przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Założmy, że o pierwszym dniu wiemy, że $P(X_1 = 1) = 0.3$, $P(X_2 = 0.7)$. Policz prawdopodobieństwa dni słonecznych w dniu 2 i 3.

8. W modelu pogody z zadania poprzedniego wylicz rozkład π taki, że $\pi = \pi P$.
9. W modelu pogody z zadania poprzedniego wylicz $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1)$.
10. Niech $(X_n)_{n \geq 0}$ będzie łańcuchem Markowa o macierzy przejść

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},$$

gdzie $a, b \in [0, 1]$. Wylicz rozkład π taki, że $\pi = \pi P$.

11. Jeśli $(X_n, n \geq 1)$ jest łańcuchem Markowa, pokaż, że $Y_n = X_{2n}$, też jest łańcuchem Markowa.
12. Jeśli $(X_n, n \geq 1)$ jest łańcuchem Markowa, pokaż, że $Y_n = (X_n, X_{n+1})$ jest łańcuchem Markowa. Jakie są jego prawdopodobieństwa przejść?
13. Jeśli $(X_n, n \geq 1)$ jest łańcuchem Markowa, pokaż, że $Y_n = |X_n|$ nie musi być łańcuchem Markowa.
14. W modelu Ehrenfestów dla $M = 5$ cząstek (bariery odbijające) rozważamy łańcuch

o macierzy przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{M-1}{M} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{M} & 0 & \frac{M-2}{M} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{M-1}{M} & 0 & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wylicz rozkład π taki, że $\pi = \pi P$.

15. Niech

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Wylicz rozkład π taki, że $\pi = \pi P$. Przedstaw ewolucję łańcucha o macierzy przejść P jako proste błędzenie losowe po grafie.

NADOBOWIĄZKOWE

16. (+7) W modelu Bernoulliego-Laplace'a dla $M = 5$ cząstek (bariery odbijające) rozważamy łańcuch o macierzy przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ (\frac{1}{M})^2 & r_1 & (\frac{M-1}{M})^2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & (\frac{2}{M})^2 & r_2 & (\frac{M-2}{M})^2 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (\frac{M-1}{M})^2 & r_{M-1} & (\frac{1}{M})^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie r_i są wartościami prawdopodobieństw pozostania w stanie takim, że sumy w wierszach są równe 1. Wylicz rozkład π taki, że $\pi = \pi P$.

17. (+7) (proces urodzin i śmierci) Macierz przejść jest rozmiaru $(n+1) \times (n+1)$ dla $p_i + q_i = 1$, $p_i, q_i \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, n-1$.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_{n-1} & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiąż układ równań $\pi = \pi P$. Czy rozwiązanie zmieni się, gdy na przekątnej macierzy P znajdą się dodatnie liczby r_i takie, że $p_i + r_i + q_i = 1$? Jaka będzie postać π , gdy macierz P rozszerzymy do macierzy nieskończonej dla pewnych ciągów $(p_i, r_i, q_i)_{i \geq 1}$. Czy π wtedy zawsze istnieje?

18. (7pkt) (Łańcuch: kot zjada mysz zjada ser)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zakładając, że łańcuch startuje z 1, policz prawdopodobieństwo, że łańcuch dojdzie do 5 (mysz zje ser nie zjedzona przez kota).

19. (+7) Niech $\mathbb{P}$ będzie macierzą prawdopodobieństw przejść w łańcuchu Markowa o skończonej przestrzeni stanów. Zakładając, że wszystkie elementy macierzy są dodatnie, pokaż, że istnieje granica (po współrzędnych) $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}^k$.