

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA A, LISTA 13

1. Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych o wartości średniej 1. Niech $M := \min(X, Z)$, $N := \min(Y, X)$. Policz $P(M > x)$ oraz $P(N > x)$, $x, y \in \mathbb{R}$.
2. c.d. Policz $P(M > x, N > y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.
3. c.d. Policz $F_{(M,N)}(x, y) = P(M \leq x, N \leq y)$.
4. c.d. Policz $P(2 < M \leq 3, 4 < N \leq 5)$.
5. c.d. Zapisz ogólny wzór w języku $F_{(M,N)}$ na $P(a < M \leq b, c < N \leq d)$, $a < b, c < d$.
6. Wiemy, że $P(X > x, Y > y | \Lambda = \lambda) = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}$. Niech Λ będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o średniej wartości 1. Wylicz $F_{(X,Y)}(x, y)$.
7. c.d. Wylicz $P(X \in (1, 2], Y \in (1, 2])$.
8. c.d. Wylicz $P(X \leq x)$.
9. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, takich, że $EX = EY = 0$, $VarX = 1$, $VarY = 4$. Niech $M = (X + Y)/\sqrt{2}$, $N = (X - Y)/\sqrt{2}$. Wylicz rozkład łączny (M, N) (wsk. wylicz łączną gęstość).
10. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, takich, że $EX = EY = 0$, $VarX = 1$, $VarY = 1$. Niech $M = (X + Y)/\sqrt{2}$, $N = (X - Y)/\sqrt{2}$. Wylicz rozkład łączny (M, N) (wsk. wylicz łączną gęstość).
11. Niech (X, Y) mają łączną gęstość $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}/(2\pi)$. Niech $T(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Niech $g = T^{-1}$, tzn. $P(g(X, Y) \in B) = P((X, Y) \in T(B))$. Zmienne $(R, \Theta) = g(X, Y)$ nazywamy współrzędnymi biegunowymi wektora (X, Y) . Wylicz gęstość łączną (R, Θ) .
12. Niech R będzie zmienną losową o gęstości $f_R(x) = x e^{-x^2/2}$ oraz Θ niech będzie niezależną od R zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $(0, 2\pi)$. Policz łączny rozkład wektora losowego $T(R, \Theta) \in \mathbb{R}^2$, gdzie T jest z zadania poprzedniego.
13. Niech (X, Y) będą niezależne od rozkładach normalnych. Niech $M = X \cos \alpha + Y \sin \alpha$, $N = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha$, gdzie $\alpha \neq k\pi/2$. Wylicz rozkład łączny (M, N) .
14. Podaj przykład rozkładu na $\mathbb{R}^2$ o rozkładach brzegowych normalnych, ale nie będącego rozkładem dwuwymiarowym normalnym.

15. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych o wartości średniej 1. Niech $S = X + Y$. Wylicz rozkład łączny wektora (X, S) i warunkowy zmiennej X pod warunkiem, że $S = s$, $s > 0$.