

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA A, LISTA ZADAŃ 2.

1. P jest miarą probabilistyczną na ciele $\mathcal{F}$, $A, B \in \mathcal{F}$, wtedy
 - a. $P(A^c) = 1 - P(A)$
 - b. $P(\emptyset) = 0$
 - c. Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$
 - d. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. Pokaż, że jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
3. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$ oraz $P(\{a, b\}) = 0.7$ i $P(\{b, c\}) = 0.6$. Oblicz prawdopodobieństwa $\{a\}, \{b\}, \{c\}$.
4. Niech A i B będą rozłączne, przy czym $P(A) = 0.3$ i $P(B) = 0.5$. Ile wynosi prawdopodobieństwo $P(A^c \cap B^c)$?
5. Pokaż, że $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.
6. Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie przeliczalną partycją Ω . Wtedy dla każdego zdarzenia B

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B).$$

Uzasadnij.

7. P jest miarą probabilistyczną na σ -ciele $\mathcal{F}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$. Wtedy $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$
8. P jest miarą probabilistyczną na σ -ciele $\mathcal{F}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$. Wtedy Jeśli $A_1 \subset A_2 \subseteq \dots$ i $A = \bigcup_i A_i$, to $P(A_i) \rightarrow_{i \rightarrow \infty} P(A)$.
9. P jest miarą probabilistyczną na σ -ciele $\mathcal{F}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$. Wtedy Jeśli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ i $A = \bigcap_i A_i$, to $P(A_i) \rightarrow_{i \rightarrow \infty} P(A)$.
10. Pokaż, że $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i^c)$.
11. Niech Δ oznacza różnicę symetryczną, tzn. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Pokaż, że $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.
12. Załóżmy, że $P(A) = 1/3$, $P(A^c \cap B^c) = 1/2$, oraz $P(A \cap B) = 1/4$. Ile wynosi $P(B)$?
13. Przypuśćmy, że A i B są niezależne oraz B i C są niezależne. Czy A i C muszą być niezależne? Czy B jest niezależne od $A \cup C$? Czy B jest niezależne od $A \cap C$? Uzasadnij.

14. Przypuśćmy, że A i B są niezależne, czy A i B^c są niezależne? Uzasadnij.
15. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Dla każdego $k < n$, niech A_k oznacza zdarzenie: *wynik w k -tym rzucie i $(k + 1)$ -ym rzucie jest inny*. Pokaż, że A_k dla $1 \leq k < n$ są niezależne.

ZADANIA NADOBOWIĄZKOWE

16. (+3) Sprawdź dla dowolnych zdarzeń :
- $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - [P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(A \cap B \cap C)]$$
17. (+5) Jeśli liczebność zbioru indeksów I wynosi n (tzn. $\#(I) = n$), to
- $$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{J \subseteq I, \#(J)=k} P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$
- Pokaż ten wzór indukcyjnie.
18. (+4) Niech $\Omega = [0, 1)$. Rozwinięcie dwójkowe liczby $\omega \in [0, 1)$ zapisujemy w postaci $\omega = \frac{d_1(\omega)}{2} + \frac{d_2(\omega)}{2^2} + \dots$ (liczby wymierne zapisujemy tak, że od pewnego miejsca d_j są zerami). Niech $X_k(\omega) = d_k(\omega)$, dla $k = 1, 2, \dots$. Narysuj wykres funkcji $X_k(\omega)$, na $\Omega = [0, 1)$, dla $k = 3, 4$.
19. (+4) Urna zawiera 1000 losów ponumerowanych od 1 do 1000. Wybieramy losowo 1. Bookmacher oferuje wypłacić 30 zł każdemu, kto mu wpłaci 20 zł, jeśli wylosowany numer jest podzielny przez 2 lub 3 lub 5. Jeśli numer nie jest podzielny przez te liczby, tracimy 20 zł. Czy opłaca się robić taki zakład? (policz szansę na wygraną).
20. (+3) (*Kontrola jakości*). Wyprodukowano M żarówek, w tym N wadliwych. Testujemy n żarówek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie testowane żarówki są dobre?
21. (+6) (*Wnioskowanie o wielkości populacji*). Student biologii złowił w stawie 60 wodnych chrząszczy, oznaczył farbą i wypuścił. Po pewnym czasie wrócił i złowił 50 chrząszczy, w tym znajdując 12 oznaczonych farbą. Jak można oszacować wielkość populacji chrząszczy w tym stawie?
22. (+3) Urna zawiera n kul białych i n czerwonych. Dwie kule są wybrane jednocześnie z urny.
- Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych,
 - jakie jest prawdopodobieństwo, że kule są różnych kolorów
 - policz prawdopodobieństwo, że kule są tego samego koloru i policz granicę tej wartości, gdy n dąży do nieskończoności.
23. (+3) We wsi zamieszkałej przez 50 osób pewna osoba przekazała plotkę drugiej osobie, która następnie przekazała ją losowo jednej z osób z tej wsi, itd. W każdym kroku osoba wysłuchująca plotki jest wybierana zupełnie losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że plotka zostanie przekazana 8 razy bez natrafienia na osobę, która już ją słyszała?