

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA A, LISTA ZADAŃ 3.

1. Jeśli $P(A | B) = P(A \cap B)/P(B)$ (zakładając, że wartość w mianowniku nie jest równa zero), pokaż, że

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B | A)P(C | A \cap B).$$

2. Niech $\mathcal{A}$ oznacza klasę podzbiorów $[0, 1]$ składającą się ze skończonych sum przedziałów rozłącznych. Czy $\mathcal{A}$ jest ciałem? Uzasadnij.
3. Niech Ω będzie niepustym, przeliczalnym zbiorem. Niech $\mathcal{F}$ oznacza klasę wszystkich jego podzbiorów. Jeśli $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją taką, że $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, to pokaż, że $P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, $A \subseteq \Omega$ definiuje miarę probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F})$.
4. (Klasyczny schemat Bernoulliego) $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$,

$$p(\omega) = P(\{\omega\}) = p^{|\omega|}(1-p)^{n-|\omega|},$$

dla $p \in (0, 1)$, $\omega \in \Omega$ oraz $|\omega| = \omega_1 + \dots + \omega_n$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Niech $A_i^{c_i} = \{\omega : \omega_i = c_i\}$, dla $i = 1, \dots, n$, $c_i \in \{0, 1\}$. Sprawdź, że

$$P(A_1^{c_1} \cap \dots \cap A_n^{c_n}) = P(A_1^{c_1}) \dots P(A_n^{c_n}),$$

dla dowolnego wyboru ciągu sukcesów i porażek $c_1, \dots, c_n \in \{0, 1\}$.

5. Niech $\Omega = \{0, 1\}^n$, oraz dla $\omega \in \Omega$,

$$p(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_1, \omega_2} p_{\omega_2, \omega_3} \dots p_{\omega_{n-1}, \omega_n},$$

dla pewnych liczb $p_0, p_1 \in [0, 1]$, $p_{0,1}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,0} \in [0, 1]$. Sprawdź, że jeśli $p_0 + p_1 = 1$ i $p_{0,1} + p_{0,0} = 1$, $p_{1,0} + p_{1,1} = 1$, to $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

6. Na $\Omega = \{1, \dots, k\}^n$ i $\mathcal{F} = 2^\Omega$, zdefiniuj miarę probabilistyczną inną niż równomierne rozłożenie masy (tzn. $1/k^n$), tak, aby $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, dla $A = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \dots, k\}, \omega_1 = 1, i = 1, \dots, n\}$ i $B = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \dots, k\}, \omega_n = k, i = 1, \dots, n\}$.
7. W schemacie Bernoulliego $S_n(\omega) := \omega_1 + \dots + \omega_n$. Wylicz rozkład zmiennej $n - S_n$, tzn. $P(n - S_n = k)$, $k = 0, \dots, n$.

8. Niech $(X_1, \dots, X_n)$ będą próbami Bernoulliego w klasycznym schemacie Bernoulliego, tzn. $X_i(\omega) = \omega_i$. Niech prawdopodobieństwo sukcesu $p \in (0, 1)$ oraz $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Załóżmy, że $1 < n_1 < n_2 < n$ są liczbami naturalnymi, wtedy $S_{n_2} - S_{n_1}$ ma taki sam rozkład jak $S_{n_2 - n_1}$. Jaki?
9. Niech $(X_1, \dots, X_n)$ będą próbami Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p \in (0, 1)$ oraz $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Sprawdź, że

$$P(S_n = k) > P(S_n = k - 1) \Leftrightarrow k < (n + 1)p$$

$$P(S_n = k) = P(S_n = k - 1) \Leftrightarrow k = (n + 1)p \in \mathbb{N}$$
10. Niech $(X_1, \dots, X_n)$ będą próbami Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p \in (0, 1)$ oraz $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Dla $m \leq k \leq n$ naturalnych,

$$P(S_m = j \mid S_n = k) = \frac{\binom{m}{j} \binom{m-n}{k-j}}{\binom{n}{k}}, \quad j \in \{0, 1, \dots, m\}$$
11. Niech $(X_1, \dots, X_n)$ będą próbami Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p \in (0, 1)$. Wylicz rozkład zmiennej $X_1 X_2 \dots X_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.
12. Niech $(X_1, \dots, X_n)$ będą próbami Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p \in (0, 1)$. Wylicz rozkład zmiennej $1 - (1 - X_1)(1 - X_2) \dots (1 - X_n) = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.
13. Niech $(p_n : n = 1, 2, \dots, 5)$ będzie ciągiem skończonym liczb, który spełnia $p_n \geq 0$ oraz $p_1 + \dots + p_5 = 1$. Znajdź przestrzeń probabilistyczną i zmienną X na niej tak, aby $P(X = i) = p_i, i = 1, \dots, 5$.
14. Niech S_n będzie o rozkładzie dwumianowym z parametrami n oraz p . Jaka wartość p maksymalizuje $P(S_n = k)$ dla ustalonego n oraz k ?
15. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 wybieramy jedną, następnie z pozostałych wybieramy drugą. Opisz Ω dla tego eksperymentu. Przyjmując równe prawdopodobieństwa dla wszystkich elementów Ω , wylicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że obie wybrane cyfry są nieparzyste.

ZADANIA NADOBOWIĄZKOWE

16. (+5) Robert i Alek rzucają na zmianę rzutkami do celu. Alek rzuca pierwszy. Alek trafia z prawdopodobieństwem $1/4$, a Robert z prawdopodobieństwem $1/3$. Wygrywa ten, kto pierwszy trafi do celu i gra się wtedy kończy.
 - Zbuduj przestrzeń probabilistyczną do tej gry.
 - Jakie jest prawdopodobieństwo, że Alek wygra?

17. (+5) Trzech graczy A, B, C rzucają kolejno kostką do gry kolejno, w kolejności ABC. Gracz wypada z gry natychmiast, gdy wynik rzutu jest 6.
- Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych,
 - zatrzymując grę w chwili, gdy 2 graczy wyrzuci 6, opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych takiej gry,
 - jakie jest prawdopodobieństwo, że A jest drugim graczem, który odpadł?
18. (+5) Rzucamy dwie kostki do gry. Jeśli suma jest 7 lub 11, wygrywamy. Jeśli jest 2 lub 3 lub 12 przegrywamy. Jeśli jest inną liczbą, powiedzmy j , to rzucamy ponownie. Jeśli sumą w ponownym rzucie jest j wygrywamy, jeśli jest 7 przegrywamy. Jeśli jest inną liczbą, to rzucamy ponownie czekając na j lub 7, kończąc wygraną lub przegraną odpowiednio.
- Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych takiej gry.
 - Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?
19. (+7) Robimy test na wykrycie rzadkiej choroby, która występuje 1 raz na 100000 w populacji. Test pokazuje, że jesteś chory w rzeczywistym przypadku choroby z prawdopodobieństwem 0.95. Jeśli nie jesteś chory, test może pokazać, że jesteś chory z prawdopodobieństwem 0.005. Jeśli test pokazuje, że jesteś chory, jakie jest prawdopodobieństwo, że diagnoza jest słuszna?