

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA A, LISTA 4

1. Użyj wzoru Bayesa, aby pokazać, że $P(A | B) > P(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(B | A^c) < P(B | A)$. To znaczy warunkowanie względem B zwiększa prawdopodobieństwo A wtedy i tylko wtedy, gdy B ma większe prawdopodobieństwo, gdy A zajdzie, niż gdy nie zajdzie.

2. Niech $A_1, \dots, A_n$ będą niezależne. Pokaż, że

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = 1 - \prod_i (1 - P(A_i)).$$

3. Niech $(X_1, \dots, X_n)$ będą próbami Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p \in (0, 1)$ oraz $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Załóżmy, że $1 < n_1 < n_2 < n$ są liczbami naturalnymi, wtedy $S_{n_1}, S_{n_2} - S_{n_1}, S_n - S_{n_2}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Uzasadnij.

4. Niech Y będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrami n, p oraz Z niezależną od Y zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrami m, p . Wylicz rozkład zmiennej $Y + Z$.

5. Jeśli zdarzenia w warunku mają dodatnie prawdopodobieństwo, to

jeśli $B \subseteq A$, to $P(A|B) = 1$,

jeśli $A \subseteq B$, to $P(A|B) = P(A)/P(B)$,

jeśli A i B są rozłączne to $P(A|B) = 0$.

6. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie (skończoną) przestrzenią probabilistyczną. Jeśli X jest funkcją przekształcającą Ω w zbiór Λ z wyróżnioną rodziną podzbiorów $\mathcal{G}$ tworzącą σ -ciało podzbiorów Λ , przy czym X spełnia własność $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in G\} \in \mathcal{F}$ o ile tylko $G \in \mathcal{G}$, wtedy (sprawdź, że) przyporządkowanie $P^X(G) := P(X \in G)$ jest prawdopodobieństwem na $\mathcal{G}$ (nazywanym rozkładem zmiennej X na $(\Lambda, \mathcal{G})$).

7. Rzucamy dwa razy, niezależnie kostką. Niech X oraz Y oznaczają odpowiednio liczby uzyskanych oczek.

Znajdź rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych $R = |X - Y|$ oraz $S = X + Y$.

8. Niech R, S będą z poprzedniego zadania. Znajdź rozkład łączny $P(R = i, S = j)$ w postaci tablicy liczb.

9. Dla trzech zdarzeń A, B, C prawdopodobieństwo A pod warunkiem B względem miary probabilistycznej $P(\cdot|C)$ jest równe prawdopodobieństwu A pod warunkiem

$B \cap C$ względem miary P , tzn. (zakładając, że zdarzenia względem których warunkujemy mają dodatnie prawdopodobieństwa).

$$\frac{P(A \cap B | C)}{P(B | C)} = P(A | B \cap C)$$

10. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich permutacji symboli 1234. Niech $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $p(\omega) = 1/24$. Niech A_i oznacza zdarzenie, że symbol i znajduje się na swoim naturalnym miejscu ($i = 1, \dots, 4$). Wylicz $P(A_2 \cup A_3)$.
11. Dla Ω z poprzedniego zadania pokaż, że $A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \subset A_4^c$.
12. Rozmieszczamy 3 różne kule w trzech ponumerowanych komórkach. Przyjmujemy jednakowe prawdopodobieństwo dla wszystkich rozmieszczeń. Niech A_1 będzie zdarzeniem, że w pierwszej urnie jest 1 kula i A_2 niech będzie zdarzeniem, że w drugiej urnie jest 1 kula. Policz $P(A_1 \cup A_2)$.
13. Niech $(X_1, \dots, X_n)$ będą próbami Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p \in (0, 1)$. Niech $U_{n,k} = 1$, gdy $\sum_{i=1}^n X_i \geq k$, dla $k \leq n$, poza tym $U_{n,k} = 0$. Przedstaw $U_{3,1}, U_{3,2}, U_{3,3}$ jako funkcję (wielomian) zmiennych X_1, X_2, X_3 .
14. Rzucamy monetą do chwili uzyskania 2 tych samych wyników. Każdemu ciągowi długości n kończącemu rzuty dajemy prawdopodobieństwo $1/(2^{n-1})$. Opisz $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dla tego eksperymentu. Policz prawdopodobieństwo zdarzenia, że eksperyment zakończy się przed 6 rzutem.
15. Dla eksperymentu z poprzedniego zadania policz prawdopodobieństwo, że zakończy się on w parzystej liczbie rzutów.

ZADANIA NADOBOWIĄZKOWE

16. (+5) Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie przeliczalną kolekcją podzbiorów Ω . Jeśli dla dowolnych podzbiorów $J \subseteq I$ oraz $K \subseteq I$ o takiej samej liczebności, tzn. $\#(J) = \#(K)$ zachodzi

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = P\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right)$$
 to mówimy, że zdarzenia $\{A_i : i \in I\}$ są *wymienialne*. Pokaż, że wtedy

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} p_k$$
 gdzie $p_k = P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$, przy $\#(J) = k$.
17. (+5) Schemat urnowy Polya. Urna zawiera c czerwonych kul oraz b białych. Wyciągamy losowo jedną i odnotowując jej kolor wrzucamy do urny wraz z d dodatkowymi kulami odnotowanego koloru. Powtarzamy taką procedurę w kolejnych krokach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy drugim losowaniu wyciągniemy kulę czerwoną? Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsza wyciągnięta kula jest czerwona pod warunkiem, że w drugim losowaniu wyciągnięto kulę czerwoną?

18. (+8) W populacji kobiet proporcja p tej populacji wykazuje patologiczne komórki szyjki macicy. Testowanie polega na pobraniu próbki w celu wykrycia komórek patologicznych. W przypadku, gdy patologiczne komórki są obecne, próbka ich nie zawiera z prawdopodobieństwem μ . W próbce zawierającej patologiczne komórki test ich nie wykaże z prawdopodobieństwem ν . W próbce bez komórek patologicznych test wykaże patologię z prawdopodobieństwem π . Wszystkie kroki w pobieraniu i klasyfikowaniu próbek są niezależne. Badana jest losowo wybrana kobieta z populacji. Jakie jest prawdopodobieństwo, że test da błędny wynik? Jeśli test wykazuje obecność patologii, jakie jest prawdopodobieństwo, że kobieta nie ma komórek patologicznych? Wylicz wartości tych prawdopodobieństw dla $p = 1/10$ oraz $\mu = \nu = \pi = 1/10$ oraz dla $p = 1/2$, $\mu = 1/10$, $\nu = \pi = 1/100$.

19. (+5) Rozważmy następujące pytanie: Tomek ma jako rodzeństwo jedno dziecko. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to siostra? Czy jest to dobrze określony problem? Jeśli uważasz, że tak, to zapisz rozwiązanie i porównaj do następujących argumentów.

1. Są trzy możliwe układy w rodzeństwie: dwie siostry, dwaj bracia, brat i siostra. Dwie siostry wykluczamy, więc szanse na dwa pozostałe są $1/2$.

2. Rodziny mające syna Tomka pojawiają się w równie prawdopodobnych konfiguracjach: Tomek i brat; brat i Tomek (w kolejności narodzin); Tomek i siostra; siostra i Tomek. Konfiguracji z bratem jest tyle ile konfiguracji z siostrą, więc szansa na siostrę jest $1/2$.

3. Są cztery możliwe przypadki rodzeństwa: brat i brat, brat i siostra, siostra i brat, siostra i siostra. Ostatni układ wykluczamy, stąd są dwa sprzyjające układy spośród 3, szansa więc wynosi $2/3$.

4. Zakładając, że płeć rodzeństwa jest niezależna, jest szansa $1/2$ na to, że jest to siostra.

Z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa, zagadnienie to nie prowadzi do jednoznacznego określenia przestrzeni probabilistycznej, można wtedy powiedzieć, że zagadnienie jest źle określone. W tym przypadku problem polega na tym, że element opisu, którym jest Tomek, jako element eksperymentu nie został doprecyzowany, sposób wyboru Tomka nie został określony.

Opisując zagadnienie można je doprecyzować na różne sposoby, które są dobrze określone:

I. Kobieta ma 2 dzieci, które z jednakowym prawdopodobieństwem są ustalonej płci. Jednym z dzieci jest Tomek. Tutaj $\Omega = \{CD, DC, DD, CC\}$. Interesuje nas $A = \{DC, CD\}$, przy warunku $B = \{CD, DC, CC\}$. Stąd $P(A | B) = 2/3$.

II. Kobieta ma 2 dzieci, które z jednakowym prawdopodobieństwem są ustalonej płci. Jej pierwszy syn nazywa się Tomek z prawdopodobieństwem p_1 . Jeśli ma ona 2 synów, oraz starszy nie nazywa się Tomek, to drugi syn nazywa się Tomek z prawdopodobieństwem p_2 . Przestrzeń $\Omega = \{CC, CT, TC, TD, CD, DT, DC, DD\}$. (C=chłopiec, D=dziewczyna, T=Tomek). Wtedy na przykład $P(CT) = (1-p_1)p_2/4$.

Wylicz prawdopodobieństwo, że Tomek ma siostrę pod warunkiem, że Tomek jest w rodzinie. Sprawdź, że szukane prawdopodobieństwo zawarte jest w przedziale $[1/2, 2/3]$. Znajdź warunki, aby szukane prawdopodobieństwo było równe $1/2$.

20. (+7) Problem Monty Halla. Bierzymy udział w następującym dziwnym konkursie. Do wyboru mamy trzy drzwi do otwarcia. Za jednym z nich jest drogi samochód. Za pozostałymi są tanie kozy. Wybierasz pierwsze drzwi, po czym osoba prowadząca konkurs otwiera trzecie drzwi pokazując za nimi kozę. Po czym proponuje ponowną możliwość wyboru drzwi. Czy można policzyć prawdopodobieństwo, że samochód jest za drugimi drzwiami?

Zwykle rozwiązujący to zadanie stoją na stanowisku, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie, spory są o wartość prawdopodobieństwa, czy $1/2$, czy też $2/3$. Jakie jest Twoje stanowisko i rozwiązanie?

Jeśli uważasz, że problem jest źle postawiony, wytłumacz dlaczego.

21. (+5) Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej i na niej różnych zmiennych losowych X, Y , które mają taki sam rozkład dwumianowy $b(k, n, p)$.
- (a) tak, aby były one niezależne
 - (b) tak, aby nie były one niezależne.