

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA A, LISTA ZADAŃ 5

1. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych przyjmujących wartości 0 lub 1, o rozkładach $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0)$, dla dowolnego $p \in (0, 1)$. Niech $N = \min\{n \in \mathbb{N}_+ : X_n = 1\}$. Pokaż, że $P(N = n) = p(1 - p)^{n-1}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ i że jest to właściwy rozkład na liczbach naturalnych (rozkład geometryczny).
2. Dla N z poprzedniego zadania pokaż, że $P(N > n) = (1 - p)^n$.
3. Niech $F(x) := P(N \leq x), x \in \mathbb{R}$, dla N z poprzedniego zadania. Pokaż, że

$$F^{-1}(r) = \left\lceil \frac{\ln(1 - r)}{\ln(1 - p)} \right\rceil, \quad r \in (0, 1)$$

gdzie $F^{-1}(r) = \min\{n \in \mathbb{N}_+ : F(n) \geq r\}$ jest tak zwaną funkcją kwantylową.

4. Dla dowolnej zmiennej losowej T o wartościach $1, 2, 3, \dots$ określamy funkcję hazardową przez

$$h(n) = P(T = n \mid T \geq n) = \frac{P(T = n)}{P(T \geq n)}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

Wylicz funkcję hazardową dla zmiennej N z poprzedniego zadania.

5. Dla N z zad. 1, wylicz rozkład $P(N = k \mid X_1 + \dots + X_n = 1)$, $k = 1, \dots, n$.
6. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych przyjmujących wartości 0 lub 1, o rozkładach $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0)$, dla dowolnego $p \in (0, 1)$. Niech $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ oraz

$$V_k = \min\{n \in \mathbb{N}_+ : Y_n = k\}.$$

Policz rozkład zmiennej V_1 .

7. Policz rozkład zmiennej V_2 .
8. Niech $U_1 = V_1$ oraz $U_k = V_k - V_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$. Pokaż, że $U_1, U_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład geometryczny na $1, 2, \dots$.
9. Dla zmiennej losowej X oznaczmy przez $f_X(k) = P(X = k)$, $k \in D \subseteq \mathbb{N}$. Niech kolejno zmienna Y oznacza: $-X$; $X^+ = \max\{0, X\}$; $X^- = \max\{0, -X\}$; $|X| = X^+ + X^-$; $\text{sgn} X = I_{\{X \neq 0\}} X / |X|$. Wylicz wzór na $f_Y(k)$ jako funkcji od $f_X(k)$, dla $Y = -X$.

10. Wylicz wzór na $f_Y(k)$ jako funkcji od $f_X(k)$, dla $Y = X^-$ i $Y = X^+$.
11. Wylicz wzór na $f_Y(k)$ jako funkcji od $f_X(k)$, dla $Y = |X|$ i $Y = \operatorname{sgn} X$.
12. Niech X będzie zmienną losową taką, że $f_X(k) = 1/(2^n)$ dla $k = 1, \dots, 2^n$, $n > 2$. Znajdź $f_{X|B}(k) = P(X = k | X \in B)$ dla $B = [0, 2^{n-1}]$.
13. Zrób wykres obu funkcji dla $n = 3$.
14. Znajdź f_Y i $f_{Y|B}$, dla $Y = X - 2^{n-1}$.
15. Zrób wykres f_Y i $f_{Y|B}$ dla $n = 3$.

ZADANIA NADOBOWIĄZKOWE

16. (+5) Rzucamy symetryczną monetą. Ustalmy dowolny ustalony ciąg wyników o ustalonej długości r (dowolnie dużej). Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 tak ustalony układ pojawi się w trakcie powtarzanych rzutów.
17. (+5) Zakładając, że po dniu deszczowym następuje następny deszczowy z prawdopodobieństwem $1/2$, ale po słonecznym następuje słoneczny z prawdopodobieństwem $2/3$, jaka jest (graniczna) częstotliwość dni słonecznych w tym mało wyszukany model zmian pogody?
 - Zbuduj przestrzeń probabilistyczną opisującą ten model pogody i zmienne losowe na tej przestrzeni opisujące stan pogody w kolejnych dniach, w skończonym horyzoncie czasowym n .
18. (+5) Podaj wzór na prawdopodobieństwo, że w n -tym dniu jest dzień słoneczny.
19. (+5) Podaj przybliżenie na to prawdopodobieństwo dla dużych wartości n .
20. (+5) Jak wyniki poprzednich poleceń zależą od stanu pogody w pierwszym dniu? Czy można przyjąć, że pogoda w pierwszym dniu też jest zmienną losową?
21. (+4) Powtarzamy eksperyment o prawdopodobieństwie sukcesu p . Niech N_0 oznacza liczbę porażek poprzedzających pierwszy sukces. Pokaż własność braku pamięci tego rozkładu tzn., że

$$P(N_0 > m + n | N_0 > m) = P(N_0 > n)$$
 dla $m, n \geq 0$.
22. (+5) Pokój ma 4 ściany, sufit i podłogę. Mucha przemieszcza się siadając na jednej z tych powierzchni. Jeśli startuje z sufitu lub podłogi, to z jednakowym prawdopodobieństwem waraca na powierzchnię startu lub siada na jednej ze ścian. Jeśli startuje ze ściany to z jednakowym prawdopodobieństwem siada na jednej z pozostałych ścian lub na suficie lub na podłodze. Początkowo mucha siedzi na suficie. Niech F_k oznacza zdarzenie, że po k przemieszczeniach mucha siedzi na podłodze. Ile wynosi $P(F_k)$? Policz granicę, gdy $k \rightarrow \infty$.

23. (+5) Paradoks Galtona. Rzucamy trzy symetryczne monety jednym rzutem. Ponieważ przynajmniej 2 z nich spadną na tę samą stronę oraz jest szansa $1/2$, że pozostała moneta jest orłem lub reszką, stąd można wnosić, że szansa na to, że wszystkie trzy spadną na tę samą stronę jest $1/2$. Czy jest to dobry wynik? Jeśli nie, ile wynosi prawdopodobieństwo, że wszystkie spadną na tę samą stronę. Gdzie leży ewentualny błąd w pierwszym rozumowaniu?
24. (+5) Paradoks Bertranda. Dane są 3 pudełka. Jedno zawiera 2 czarne kule, drugie zawiera 2 białe kule, pozostałe zawiera jedną białą, jedną czarną kulę. Wybieramy losowo jedno z pudełek i wybieramy jedną kulę nie patrząc na kolor wybranej kuli. Z jednakowym prawdopodobieństwem wybrana kula jest czarna lub biała. Pozostała kula jest z jednakowym prawdopodobieństwem $1/2$ biała lub czarna. Stąd szansa, że w wybranym pudełku są jednakowe kule jest $1/2$. To rozumowanie jest błędne, a prawidłowa odpowiedź jest $2/3$. Zrób poprawne wyliczenia.