

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA A, LISTA 6

Urną zawiera n losów ponumerowanych od 1 do n . Wybieramy losowo, kolejno $r > 1$ losów z urny. Niech X oznacza największy wyciągnięty numer na losie, gdy po każdym pojedynczym ciągnięciu losy są zwracane do urny, oraz (drugie doświadczenie) Y niech oznacza największy numer jeśli losy nie są zwracane.

1. Opisz przestrzeń probabilistyczną wersji ze zwracaniem i znajdź dystrybuantę $F_X(x) := P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Opisz przestrzeń probabilistyczną wersji bez zwracania i znajdź $F_Y(x) := P(Y \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$. (tutaj symbol P oznacza co innego niż w zadaniu poprzednim).
3. Naszkicuj i porównaj wykresy dystrybuant (na $\mathbb{R}$) dla $n = 5$, $r = 4$.
4. Niech $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ będzie produktem kartezjańskim skończonych zbiorów Ω_i . Załóżmy, że na każdej Ω_i zadane jest prawdopodobieństwo P_i . Dla $\omega \in \Omega$, gdzie $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, definiujemy

$$p(\omega) := P(\{\omega\}) := P_1(\{\omega_1\}) \cdots P_n(\{\omega_n\}).$$

Uzasadnij, że P definiuje miarę probabilistyczną na (wszystkich) podzbiorach Ω .

5. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$ takimi, że $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$. Niech $Y_i = X_i + I_{\{1\}}(X_i) - 1$, ($I_A(x)$ oznacza indykator zbioru A). $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$, $n \geq 1$. Pokaż, że $P(S_n = j | S_{n-1} = i, S_{n-2} = s_{n-2}, \dots, S_1 = s_1) = P(S_n = j | S_{n-1} = i)$ dla wszystkich $i, s_{n-2}, \dots, s_1$ takich, że $P(S_{n-1} = i, S_{n-2} = s_{n-2}, \dots, S_1 = s_1) > 0$.
6. Grześ i Heniek grają rzucając (symetryczną) monetą. Gdy wypada orzeł Heniek wygrywa i otrzymuje 10 od Grzesia. W przypadku, gdy wypada reszka Grześ wygrywa 10 od Heńka. Grześ rozpoczynając grę ma 500, Heniek 250. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Heniek straci wszystkie pieniądze w tej grze? Podaj wynik liczbowy.
7. c.d. Jeśli zamiast rzucać monetą, rzucaliby oni kostką, a wygrana Grzesia zachodziłaby w przypadku wyrzucenia 5 lub 6. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Grzesia w takiej grze? Podaj wynik liczbowy.
8. Dla błądzenia losowego $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, (Y_n), gdzie $Y_n \in \{1, -1\}$ są iid, $P(Y_n = 1) = p \in (0, 1)$, niech $I_n = (Y_n + 1)/2$, $R_n = \sum_{i=1}^n I_i$ oznacza ilość ruchów w jednym kierunku w błądzeniu losowym. Pokaż, że $S_n = 2R_n - n$. Jaki ma rozkład zmienna losowa S_n , a jaki zmienna R_n ?

9. Zrób wykres dystrybuanty zmiennej R_n z poprzedniego zadania, dla $n = 4$.

10. c.d. Pokaż, że

$$P(S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2k+2n-1} \neq 0, S_{2k+2n} = 0 | S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0) = \\ P(S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2k+2n-1} \neq 0, S_{2k+2n} = 0 | S_{2k} = 0).$$

11. c.d. Pokaż, że $P(S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2k+2n-1} \neq 0, S_{2k+2n} = 0 | S_{2k} = 0) = f_{2n}$.

12. Rozważmy grę, w której wygrywamy 1 z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$, przegrywamy 1 z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Zaczynamy mając 50 i kończymy mając 100 lub gdy stracimy wszystko. Jaka jest szansa wygranej w ruletkę (kończymy posiadając 100), gdzie $p = 18/38$.

13. Niech dla naturalnych liczb $x, y \in \mathbb{N}$, takich, że $y \leq x$ symbol $N_{(x,y)}$ oznacza ilość możliwych ścieżek z punktu $(0, 0)$ do (x, y) o przyrostach równych 1 lub -1 w jednym kroku. Policz ile jest takich ścieżek.

14. Sprawdź, że $N_{(x-1,y-1)} - N_{(x-1,y+1)} = (y/x)N_{(x,y)}$.

15. Niech $u_{2n} = \binom{2n}{n}(1/2)^{2n}$, $u_0 = 1$, $n \geq 1$. Ze wzoru Stirlinga sprawdź, że $u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ (tutaj dla ciągów $a_n \sim b_n$, gdy $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$).

NADOBOWIĄZKOWE

16. (+5) Niech $f_{2n} = (2/(2n-1))\binom{2n-1}{n-1}(1/2)^{2n}$ oraz $u_{2n} = \binom{2n}{n}(1/2)^{2n}$, $u_0 = 1$. Sprawdź, że $u_{2n-2} - u_{2n} = f_{2n}$ oraz $1 - (f_2 + \dots + f_{2n}) = u_{2n}$.

17. (+5) W prostym, symetrycznym błędzeniu losowym z $P(Y_n = 1) = 1/2$, $S_0 = 0$, wylicz (np. korzystając z lematu z wykładu)

$$P(S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0).$$

18. (+7) Na przestrzeni $\Omega = \{0, 1\}^3$, zdefiniuj P_1 inaczej niż

$$P(\{\omega\}) = p^{|\omega|}(1-p)^{n-|\omega|},$$

dla $\omega \in \Omega$ oraz $|\omega| = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, tak, aby dla $A_{c_i}^i = \{\omega : \omega_i = c_i\}$, dla $i = 1, 2, 3$, $c_i \in \{0, 1\}$, zdarzenia $A_{c_1}^1, A_{c_2}^2, A_{c_3}^3$, tworzyły ciąg **zależnych** zdarzeń dla dowolnego wyboru $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ oraz $P(A_{c_1}^1) = P(A_{c_2}^2) = P(A_{c_3}^3)$.