

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA A, LISTA ZADAŃ 7

1. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona, tzn. $P(N = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, dla ustalonego $\lambda > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Zmienna M ma rozkład $P(M = k) = e^{-\beta} \beta^k / k!$, $\beta > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Zakładając, że M i N są niezależne, policz $P(M + N = k)$.
2. Policz wartość $\sum_{k=0}^{\infty} kP(N = k)$.
(Wartość tej sumy nazywana jest wartością średnią rozkładu Poissona lub wartością oczekiwaną tego rozkładu.)
3. Niech $P(N = k) = p(1 - p)^k$, dla $p \in (0, 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, oraz $P(M = k) = p(1 - p)^k$. Zakładając, że M i N są niezależne, policz $P(M + N = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.
4. c.d. Zinterpretuj zmienną $M + N$ w terminach oczekiwania na sukces w niezależnych próbach.
5. c.d. Policz $\sum_{k=0}^{\infty} kP(N = k)$.
6. Niech $P(N = k) = 1/4$ dla $k = 1, \dots, 4$, $P(M = k) = 1/4$, dla $k = 1, \dots, 4$. Zakładając niezależność M , N , policz $P(M + N = k)$.
7. Policz $P(M - N = k)$.
8. Niech $P(N = k) = 1/4(3/4)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Zdefiniujmy $M = \min(N, 5)$, $K = \max(5, N)$, $L = \max(0, N - 5)$. Policz $P(M = k)$, $P(K = k)$, $P(L = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.
9. c.d. Policz $\sum_{k=0}^{\infty} kP(M = k)$, $\sum_{k=0}^{\infty} kP(K = k)$, $\sum_{k=0}^{\infty} kP(L = k)$.
10. Niech Θ będzie zmienną $P(\Theta = 1) = P(\Theta = 2) = 1/2$. Zakładając, że $P(N = k \mid \Theta = \theta) = e^{-\theta} \theta^k / k!$, $\theta = 1, 2$, policz $P(N = k)$ oraz $\sum_{k=0}^{\infty} kP(N = k)$.
11. Niech N będzie zmienną losową o wartościach naturalnych. Pokaż, że $\sum_{k=0}^{\infty} kP(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N > k)$.
12. Niech X będzie zmienną losową o wartościach nieujemnych o dystrybucji F_X takiej, że istnieje pochodna $F'_X = f_X$. Pokaż, że $\int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx$.
13. Niech X będzie zmienną losową o wartościach rzeczywistych o dystrybucji F_X takiej, że istnieje pochodna $F'_X = f_X$. Pokaż, że $\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx$.

14. (+4) Niech $N_1, N_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach geometrycznych ($P(N_i = k) = p(1-p)^k$). Niech M będzie niezależną od nich zmienną $P(M = k) = (1-p)p^k$. Niech $S = N_1 + N_2 + \dots + N_M$. Policz $P(S = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$
15. c.d. Policz $\sum_{k=0}^{\infty} kP(S = k)$.

ZADANIA NADOBOWIĄZKOWE

16. (+5) Zmienna M ma rozkład $P(M = k) = e^{-\beta}\beta^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona, $P(N = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. Niech $S_1 = X_1 + \dots + X_M$, $S_2 = Y_1 + \dots + Y_N$. Zakładając niezależność M i N oraz ich niezależność od ciągów $(X_i, i \geq 1)$ oraz $(Y_i, i \geq 1)$, które są niezależne od siebie i są iid o rozkładach $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = P(Y_i = 1) = P(Y_i = 0) = 1/2$. Policz $P(S_1 + S_2 = k)$.
17. (+6) Ze wzoru Stirlinga sprawdź, że

$$b(k, n, p) \sim \left(\frac{n}{2k\pi(n-k)}\right)^{1/2} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

18. (+6) Pokaż oszacowanie $|\log((1 + x_kqh)(1 - x_kph))| \leq \frac{3}{4} |x_k| h$, gdy $h | x_k | \max(p, q) \leq \frac{1}{2}$, oraz $h = (\sqrt{npq})^{-1}$, $x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $p = 1 - q$, $p \in (0, 1)$. Wsk. Jakubowski-Sztencel str. 171.
19. (+5) Policz rozkład dla sumy k niezależnych składników o rozkładzie geometrycznym.
20. (+6) Pokaż, że $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$.