

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA A, LISTA 8.

1. Pokaż, że dystrybuanta dowolnej zmiennej losowej jest funkcją niemalejącą i prawostronnie ciągłą.
2. Jeśli X ma rozkład o gęstość f_X , to jaką gęstość ma $Y = cX + d$, $c > 0$?
3. Zmienna X ma rozkład jednostajny na $(0, \pi/2)$. Znajdź gęstość $Y = \sin X$. Jest to rozkład **arcusa sinusa**.
4. Jeśli X ma rozkład wykładniczy standardowy, tzn. $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(u)du$, gdzie $f_X(x) = e^{-x}\mathbf{I}_{(0,\infty)}(x)$, to znajdź gęstość, wartość oczekiwaną, $Y = X/\lambda$, $\lambda > 0$ (mówimy, że Y ma rozkład wykładniczy z parametrem (λ) , i piszemy $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$).
5. Jeśli $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ (to znaczy $F_X(x) = (1 - e^{-x})\mathbf{I}_{(0,\infty)}(x)$), to jaką dystrybuantę ma $Y = \ln(X)$. Otrzymany rozkład nazywamy **podwójnie wykładniczym**.
6. Sprawdź, że $F(x) = \min(1, -3x^2 + 2x^3)\mathbf{I}_{(0,\infty)}(x)$ określa dystrybuantę. Znajdź jej wartość oczekiwaną.
7. Zmienna X ma dystrybuantę $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(u)du$, gdzie f jest postaci (a) $f(x) = c(1 - x^2)\mathbf{I}_{(-1,1)}(x)$, (b) $f(x) = c(3 - |x|)\mathbf{I}_{(-3,3)}(x)$. Wyznacz c .
8. Zmienna X ma dystrybuantę $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(u)du$, gdzie $f(x) = (x/2)\mathbf{I}_{(0,2)}(x)$. Wylicz $P(X < 1)$, $P(X > 1.5)$.
9. c.d. Wylicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X .
10. Niech zmienna $T \geq 0$ ma dystrybuantę $F_T(t) = \int_{-\infty}^t f(u)du$, Definiujemy funkcję

$$r(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(t < T < t + h \mid T > t).$$

i nazywamy ją **intensywnością awarii** po przetrwaniu do czasu t . Wylicz $r(t)$ w zależności od f i F .

11. c.d. wylicz r , gdy $F(x) = (1 - \exp(-x^2))\mathbf{I}_{[0,\infty)}(x)$.
12. Jeśli X ma rozkład wykładniczy standardowy, tzn. $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(u)du$, gdzie $f_X(x) = e^{-x}\mathbf{I}_{(0,\infty)}(x)$, to znajdź wariancję oraz intensywność awarii zmiennej $Y = X/\lambda$, $\lambda > 0$.
13. Dla niezależnych zmiennych losowych $X_1, \dots, X_n$ o dystrybuancie F_X , wylicz dystrybuantę $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ oraz $m = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.
14. c.d. Jeśli F_X ma intensywność awarii $r(x)$, to jaka jest intensywność awarii zmiennej m .
15. c.d. Pokaż w szczególności, że jeśli F jest wykładnicza, to m ma rozkład wykładniczy (jak zmieni się parametr rozkładu?).

16. (+5) Znajdź funkcję h taką, aby zmienna $h(U)$ miała gęstość $3x^{-4}\mathbf{I}_{[1,\infty)}(x)$, przy założeniu, że U ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$.
17. (+5) Pokaż, że jeśli $F_1(x) \geq F_2(x)$, gdzie F_i są dystrybuantami na R , to można znaleźć zmienne X_1 i X_2 , dla których $X_1 \leq X_2$ i X_i ma rozkład F_i .
18. (+5) Zakładając, że X i Y są niezależne o rozkładach normalnych $N(0, 1)$, znajdź dystrybuantę $Z = (X^2 + Y^2)^{1/2}$. Jest to rozkład **Rayleigha**. (zob. Feller)
19. (+5) Podobnie X, Y, Z niech będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Znajdź dystrybuantę $V = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$. Jest to rozkład **Maxwella**. (zob. Feller)
20. (+6) Znajdź minimalną wartość $\min_{a \in R} E((X - a)^2)$, przy założeniu, że wartości pod min są skończone.
21. (+5) Znajdź dystrybuantę $Y = e^X$ dla X o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma^2)$. Rozkład ten nazywamy **logarytmicznie normalnym**.