

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA A, LISTA 9.

1. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $(0, 10)$, tzn. $F_X(x) = x/10$, $x \in (0, 10)$ (poza tym odpowiednio 0 i 1). Niech $Y = (X - 6)_+ := \max(0, X - 6)$. Policz EY .
2. c.d. Policz $VarX$ i $VarY$.
3. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie standardowym wykładniczym, tzn. $F_X(x) = 1 - \exp(-x)$, $x \in (0, \infty)$ (poza tym 0). Niech $Y = (X - d)_+ := \max(0, X - d)$. Policz EY .
4. c.d. Policz $VarY$.
5. Czy istnieje zmienna losowa taka, że $EX = 3$ i $E(X^2) = 8$? Odpowiedź uzasadnij.
6. Niech dla zmiennej losowej X zachodzi $P(X \in \{1, 2, 3\}) = 1$ oraz $EX = 2.5$. Jakie są możliwe największa i najmniejsza wartość dla $E(X^2)$?
7. (Randomizacja w rozkładzie dwumianowym) Załóżmy, że parametr p w rozkładzie dwumianowym jest losowy. Przyjmijmy, że p ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$. Policz dla $k = 0, \dots, n$,

$$P(S = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} dp.$$

Jaki jest to rozkład?

8. (Randomizacja w rozkładzie Poissona). Załóżmy, że parametr λ w rozkładzie Poissona jest losowy o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Policz

$$P(N = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} d\lambda.$$

dla $k = 0, 1, \dots$. Jaki jest to rozkład?

9. Jeśli $X_1, \dots, X_n$ są niezależne, o jednakowym rozkładzie o dystrybuancie $F_X(t) = 1 - e^{-t^2}$, $t > 0$, (zero poza tym). Wylicz $E(\min\{X_1, \dots, X_5\})$.
10. c.d. Wylicz $E(\max\{X_1, \dots, X_5\})$.
11. Niech X, Y będą niezależne. Załóżmy, że Y ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$, X ma gęstość $f_X = F'_X$. Pokaż, że $X + Y$ ma gęstość $f_{X+Y} = F'_{X+Y}$ daną wzorem $f_{X+Y}(x) = F_X(x) - F_Y(x - 1)$.
12. Podaj prosty przykład przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F})$, miar probabilistycznych na niej, P_1, P_2 oraz zmiennej losowej X tak, aby wartość oczekiwana X względem P_1 była różna od wartości oczekiwanej względem P_2 .
13. Dla pary gęstości f, g rozkładów pewnych dodatnich zmiennych losowych X, Y , określamy działanie splotu przez $f * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx$. Sprawdź, że $f * g = g * f$.

14. c.d. Dla pary gęstości f, g rozkładów pewnych dodatnich zmiennych losowych X, Y , jeśli X, Y są niezależne, to pokaż, że dystrybuenta sumy $X + Y$ ma gęstość $F'_{X+Y}(t) = f * g(t)$.
15. Jeśli $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n \geq 1$ są zmiennymi niezależnymi o jednakowych rozkładach wykładniczych, $F_X(t) = 1 - \exp(-x)$, $x \geq 0$, to pokaż, że gęstość $f_{X_1+\dots+X_n}(x) = F'_{X_1+\dots+X_n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-x)$, $x > 0$.

NADOBOWIĄZKOWE

16. (+5) Gęstość $g(x) = \lambda^n x^{n-1} ((n-1)!)^{-1} e^{-\lambda x}$ nazywamy gęstością gamma z parametrami $n \in \mathbb{N}, \lambda > 0$ (rozkład o tej gęstości oznaczamy $gamma(n, \lambda)$). Uzasadnij, że jeśli $X \sim gamma(n, \lambda)$, $Y \sim gamma(m, \lambda)$ oraz X, Y są niezależne, to $X + Y \sim gamma(m+n, \lambda)$ ($X \sim \dots$ oznacza, że X ma rozkład $\dots$).
17. (+5) Gęstość $g_{\alpha, \lambda}(x) = \lambda^\alpha x^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)^{-1} e^{-\lambda x}$ nazywamy gęstością gamma z parametrami $\alpha > 0, \lambda > 0$, (rozkład o tej gęstości oznaczamy $gamma(\alpha, \lambda)$), gdzie

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Pokaż, że

$$g_{\alpha_1, \lambda} * g_{\alpha_2, \lambda} = g_{\alpha_1 + \alpha_2, \lambda}.$$

18. (+7) (Gęstość χ^2 (chi-kwadrat) o n stopniach swobody). Jeżeli $X_1, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach standardowych normalnych, pokaż, że gęstość rozkładu zmiennej $X_1^2 + \dots + X_n^2$ jest gęstością gamma. Znajdź jej parametry α i λ . (Zob. Feller).
19. (+7) Rozważmy następujący proces awarii: w kolejnych chwilach $0, 1, 2, \dots$ sprawdzamy, czy pracujący element uległ awarii. Szansa na to, że w chwili sprawdzenia stwierdzimy awarię wynosi $p = 1/n$, dla ustalonego n . Oznaczamy kolejne chwile, gdy stwierdzona jest awaria przez 1, otrzymując ciąg zer i jedynek na osi liczb naturalnych. Przyjmujemy, że w zerze zaczynamy od 1. Niech D_1 oznacza liczbę zer poprzedzających następną jedynkę po chwili zero. Niech $X = D_1 + 1$. Oblicz $P(X/n > a)$, dla ustalonego $a > 0$. Znajdź granicę, przy $n \rightarrow \infty$, tej wartości.